



**USAC**  
TRICENTENARIA  
Universidad de San Carlos de Guatemala

# SELECCIÓN PARA MECÁNICA ANALÍTICA 1

CESAR A. GRIJALVA

INGENIERÍA CIVIL DIVISIÓN CIENCIAS INGENIERÍA

## **Descripción de la Actividad Curricular**

Es esta asignatura el inicio de la transición de ciencias básicas al área profesional. Es obligatoria para la mayor parte de ingeniarías, tales como: civil. Industrial, mecánica y mecánica – industrial.

Es el análisis de la estática de sumatoria de fuerzas igual cero, la búsqueda de sistemas en equilibrio. Es la particularidad de la segunda ley de Newton con una aceleración igual a cero. Se necesita de fuerzas coplanarias expresadas como vectores lineales, de donde es necesario el análisis vectorial aplicando la geometría clásica o euclidiana.

El propósito es la discusión de los sistemas de partículas y armaduras en equilibrio. Sin embargo, es un buen punto de inicio de las prácticas de la ingeniería en general, donde es pertinente el contexto, tal como los sistemas de medidas. Guatemala y el uso a un tiempo del Sistema Internacional de medidas, que es el oficial; del sistema inglés que predomina en las medidas y calibres de los materiales de construcción y del sistema español, herencia del colonialismo y que aun es importante en las medidas agrarias. La multidisciplinaria, transdisciplinaria e interdisciplinaria comienzan a tomar preponderancia en el oficio de ingeniero.

## **Contenidos**

1. Introducción: principios generales y sistemas de medidas.
2. Vectores de fuerza. Producto punto
3. Resultantes de sistemas de fuerzas. Producto cruz, principio de momentos, triple producto vectorial, momento par, carga distribuida.
4. Equilibrio de cuerpo rígido: diagrama de cuerpo libre, ecuaciones de equilibrio, restricciones
5. Análisis estructural: método de nodos, secciones y gráfico. Estructuras y máquinas.
6. Fuerzas internas: cables.
7. Fricción: fricción seca, cuñas.
8. Centro de Gravedad y Centroides
9. Momento de Inercia

## **Bibliografía**

Ingeniería Mecánica. (ESTÁTICA) R. C. Hibbeler. Prentice Hall  
Mecánica Vectorial Para Ingenieros. (ESTÁTICA) Ferdinand Beer & Russell Johnston. McGraw-Hill. Análisis Vectorial. Murray R. Spiegel. Serie Schaum. McGraw-Hill.  
Análisis Vectorial. Hwei P Hsu. Addison-Wesley Iberoamericana.  
Matrices. Frank Ayres, Jr. Serie Schaum. McGraw-Hill.  
Geometría Analítica. Charles H. Lehmann. Limusa, Noriega Editores

## Tabla de contenido

|                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------|----|
| INTRODUCCIÓN Y EXPLICACIÓN .....                                    | 3  |
| CURIOSIDADES Y PARTICULARIDADES DE LA INGENIERÍA GUATEMALTECA ..... | 4  |
| RELACIÓN DE CIRCUITOS EN GENERAL CON ARMADURAS EN EQUILIBRIO .....  | 4  |
| LOS SISTEMAS DE MEDIDAS EN GUATEMALA .....                          | 6  |
| VECTORES EN 2D .....                                                | 18 |
| CENTROIDES E INERCIA .....                                          | 29 |
| CENTROIDES .....                                                    | 54 |
| VECTORES EN 3D .....                                                | 61 |

## INTRODUCCIÓN Y EXPLICACIÓN

A continuación se tiene una serie de problemas y temas para el estudio de la Mecánica Analítica 1 de la Universidad de San Carlos de Guatemala. Puede que parezca una sorpresa, puesto que clásicamente se utilizan textos para esta asignatura. Ya hay textos y de buena calidad escritos. Sin embargo, son libros importados, de autores no nacionales. Lo que se intenta es una selección de diversos autores y contextualizar a las prácticas de la ingeniería en Guatemala.

Entre las curiosidades de hacer ingeniería en Guatemala, es la convivencia de diversos sistemas de medidas. Eso dificulta la práctica de ingeniería, y es un aspecto que pocas veces se le otorga la atención necesaria. Por ejemplo, según normativa y legislación guatemalteca, predomina el Sistema Internacional de Medidas, pero por costumbre los materiales para construir se comercializan en sistema inglés. Además en medición de tierras aun pesa el sistema de medidas Español, como herencia colonial.

Es una selección como libreto y guion de clase. Se toman problemas de libros diversos, para no anclar la exposición docente a un solo autor. La idea es que el aprendiente conozca a diversos autores, y sobre ello pueda escoger a un autor para el estudio de esta disciplina.

Un potencial problema puede ser la poca cultura de lectura, este aspecto limita la toma de criterios y toma de decisiones a la hora de estudiar. Es importante asumir este riesgo para presentar una diversidad de criterios. Esto se considera por la manera que predomina en la docencia en los primeros años de ingeniería, se sigue un texto definido. Tiene grandes ventajas, tal como uniformidad de criterio y una secuencia más clara de la exposición del docente, pero puede cerrar la oportunidad de hacer un poco de retórica al examinar diversos criterios para un mismo problema de estudio.

Incluso la manera de presentar los temas de Mecánica Analítica 1, cambia respecto a la propuesta de los textos clásicos de esta materia, sobre los que se apoya esta selección. Se parte de análisis vectorial en equilibrio en dos dimensiones, revisando la tensión compresión de cada elemento estructura. Luego se analiza las secciones o áreas de estos elementos, con temas tales como centroides e inercias. Y al final se analiza en el espacio, en las tres dimensiones. Es una propuesta desde otro criterio de selección de temática.

## **CURIOSIDADES Y PARTICULARIDADES DE LA INGENIERÍA GUATEMALTECA**

Además del uso de fórmulas de cálculos con sistemas híbridos de medidas, y eso ya es un punto considerable, también es importante mencionar algunas concepciones y puntos de partida para ciertas áreas de esta profesión.

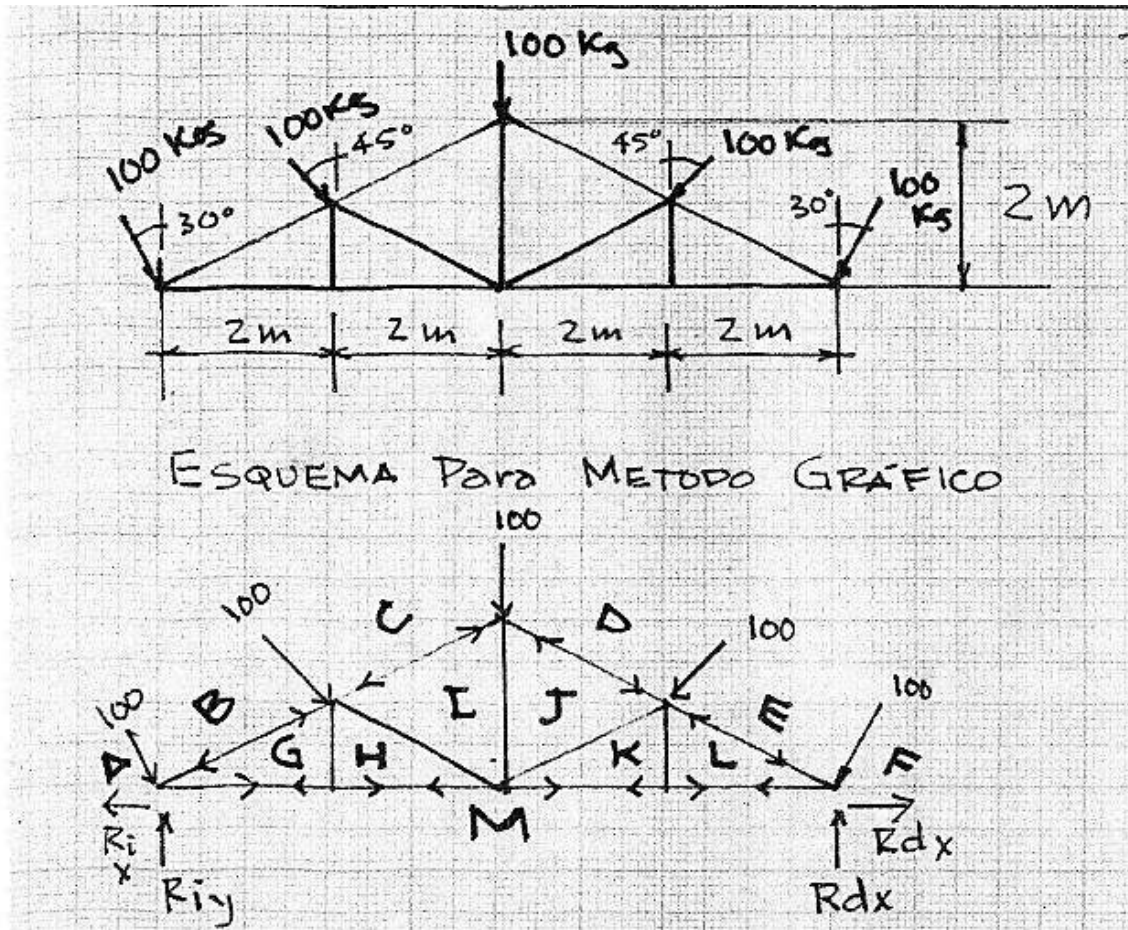
Si se divide la ingeniería civil en áreas macro tales como: agua y saneamiento, estructuras y edificaciones y caminos y carreteras, se pueden hacer las siguientes anotaciones. Agua y saneamiento parten de la herencia de la colonia en la construcción de acueductos por gravedad, por lo tanto, el estándar de dotaciones de agua es más cercano a las ideas europeas y no a la concepción norteamericana. Esto en términos prácticos, es la cuantía de dotaciones de agua para usos humanos mucho más pequeña, de la tercera a la cuarta parte de la dotación en América del Norte.

Ahora en el resto de las áreas de trabajo de la ingeniería civil guatemalteca, predominan las ideas de la ingeniería y estándares norteamericanos. Caminos y carreteras con una clara herencia de la Segunda Guerra Mundial. Es legendaria la influencia de estas ideas que incluso, son adoptadas en normativa alemana, siendo esta última enemiga de guerra de la Unión Americana. En parte es por la sencillez y practicidad de sus ideas.

No queda más que hacer referencia de la influencia del norte en normativa y estándares de construcción guatemalteca. Los criterios estructurales y de materiales de construcción, fuertemente permeados por estas ideas.

## **RELACIÓN DE CIRCUITOS EN GENERAL CON ARMADURAS EN EQUILIBRIO**

Los circuitos de agua, tanto de distribución como de drenaje y de electricidad, pueden relacionarse con una armadura, tal como la que se muestra a continuación.



En dicho diagrama se muestran las acciones y las reacciones, las primeras son las cargas sobre la armadura y las segundas, como las reacciones propias a los apoyos. En circuitos de electricidad, también se integran puntos de consumo, sobre la sumatoria de cargas de potencia instalada. Son las acciones como la representación de lo que debe de alimentar el circuito.

En los circuitos de distribución de agua como de electricidad, se tiene igualmente la dotación del circuito, lo que lo alimenta tal como las líneas de bombeo y las líneas de distribución, propias de acueductos. O las líneas maestras de las subestaciones eléctricas. Estas son las reacciones que suplen las demandas de las acciones o consumos de circuitos, similar a las reacciones para las combinaciones de cargas en armaduras.

Tal como en las armaduras, estos caudales externos, tales como las acciones y reacciones -de agua o corriente- deben estar en equilibrio, una sumatoria cero. Además, son externos a la armadura y/o red de distribución. Lo precedente es una suposición, una hipótesis, siempre hay pérdidas tales como fugas por malas juntas o uniones en tuberías de aguas, o corrientes parásitas y retroalimentaciones.

Los circuitos de electricidad, agua y armaduras también necesitan en su construcción del concepto de nodo, como punto de convergencia de esfuerzos para

las últimas, de caudales para circuitos de agua y de corriente para mallas eléctricas. En los nodos o nudos convergen esfuerzos, caudales o corrientes eléctricas externas e internas a la armadura, o a la malla de distribución, según el caso de aplicación. Es de tener presente que las acciones como reacciones, es lo externo a la armadura y/o malla, pero lo que une a los nodos, tal como elementos estructurales a tensión compresión en armaduras, tuberías de distribución o recolección de agua, o alambres para circuitos eléctricos, es lo que hay que calcular como parte del diseño.

Entonces, los esfuerzos paralelos a los elementos estructurales de armaduras, que pueden estar en tensión o compresión, son los esfuerzos internos a dicha armadura, y como hipótesis lógicas, se consideran paralelas a su elemento. De igual manera los caudales internos que se calculan circulando dentro de las tuberías que unen los nodos de un circuito de agua, son caudales internos a dicha red y se conciben paralelos a su tubería. Se distribuyen por Hardy Cross, por ejemplo, que se estudiarán en estas notas de clase. De igual forma las cantidades de corriente interna a una malla eléctrica es lo que se revisa en cálculo de circuitos eléctricos, y estas corrientes paralelas a su conductor o alambre.

Si en armaduras gracias a los esfuerzos internos se calculan secciones de elementos, en circuitos de agua se revisan diámetros de tuberías, así como en mallas de electricidad se estiman calibres de alambres.

Un punto importante del que se discutirá con más amplitud en el siguiente apartado, es la naturaleza de los números para este tipo de juego de sumatoria cero. En conclusión, la idea de estática está presente en este tipo de armaduras y circuitos, esa es la idea del diseño de ingeniería en estas aplicaciones. La gran diferencia estriba en que los circuitos de agua de distribución, como de recolección de aguas de drenajes, se utilizan los números reales, mientras que en circuitos y mallas eléctricas la sumatoria para el equilibrio se realiza por medio de los números imaginarios.

## **Los sistemas de medidas en Guatemala**

En Guatemala en el uso, cotización, venta y más de materiales de construcción, se utiliza el sistema inglés. Las longitudes van en pulgadas y pie inglese en medidas de láminas, tubería en general, áreas de planchas tales como: plywood, durpanel, panel W, melamina y otros.

La compra de granos u áridos tales como frijol, arroz e incluso clavo para lámina y en general, se tasan en libras, con sus submúltiplos, tales como la onza. No es el kilogramo como lo dicta la ley guatemalteca, predomina la tradición.

Una sencilla pero poderosa explicación estriba en la lógica de la construcción de los sistemas de medidas. Por ejemplo, en el sistema internacional o SI, la preeminencia es la potencia de base diez  $-10^-$ , es decir múltiplos y submúltiplos sobre de  $10^n$ .

Desde la matemática es fácil el cálculo, únicamente es necesario correr el punto decimal a la derecha o a la izquierda. Pero en la práctica hay una dificultad, esos múltiplos o submúltiplos son muy grandes o pequeños para la manipulación del ser humano. Fácil es decir una medida de aforo o medición de caudal de agua, tal como 5 metros<sup>3</sup>/segundo, pero 1 metro cúbico de agua con un peso medio de 1000 kilogramos. Obviamente se necesita de equipo para manipular y contar un caudal semejante.

El sistema inglés, al igual que el español es más amigable con el hombre, es antropomórfico. Se parte de medidas en base a partes del cuerpo humano, tal como la pulgada o grosor del pulgar, o el pie. Pero la lógica de los submúltiplos es la del medio. La unidad básica se divide por la mitad las veces necesarias es decir la siguiente secuencia de submúltiplos sobre la base del medio: 1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{16}$ ,  $\frac{1}{32}$ ,  $\frac{1}{64}$  y  $\frac{1}{128}$ . Como se puede ver, cada submúltiplo es la mitad del anterior. Aunque matemáticamente es trabajable, pero sin la facilidad de correr el punto decimal como el sistema SI, es más amigable con el cuerpo humano, es más manejable, en suma, es mucho más práctico y de ello su preeminencia en lo cotidiano.

Ahora es el momento de aclarar una pequeña dificultad del sistema inglés contra el sistema español de medidas que deja el colonialismo. Ambos sistemas en medidas de longitud parten de la pulgada, es decir que hay pulgada inglesa como pulgada española, siendo la primera más grande que la segunda. Sea la pulgada inglesa 2.54 centímetros y la española 2.32196 centímetros respectivamente. La referencia de pie de página de la anterior línea ya es muy atrás en el tiempo, pero hasta ahora no hay una publicación que tome esto como estudio en el medio de Guatemala. Lo que se ve son definiciones que vienen de otras publicaciones en los formatos de ley para estos temas. Ahora esta publicación del coronel e Ingeniero Luis Aguilar del pie de página coincide con un período de construcción y modernización de infraestructura en la Guatemala del tiempo del General Jorge Ubico. Se necesitaba un estudio y una publicación que estudiara y mediara este problema de sistema de medidas.

Una nota de contexto que arroja más luz a este problema de medidas es el recordar que tanto España como Inglaterra, países y en su momento imperios con sus colonias en la carrera por el mar, en el Renacimiento y Modernismo, han sido y son vecinas. Son parecidas y por lo tanto tienen que marcar sus diferencias. Es algo así como un encuentro de fútbol entre San Marcos y San Pedro Sacatepéquez, donde las diferencias desembocan cuando el Equipo Marquense se enfrenta al Xelajú MC, la afición sanpedrana apoya el último y no al primero. Regresando al inicio de este párrafo, la lógica del submúltiplo sobre el medio o fracción de dos -2- se mantiene intacta en los sistemas de medidas español e inglés.

La anterior diferencia ha traído una controversia en la medición de tierras en el área de las Verapaces guatemaltecas. Antes de explicar lo anterior se hace necesaria la siguiente capitulación y resumen. Tanto en el sistema inglés como español, se parte de la pulgada, con equivalencias en el Sistema Internacional diferentes, la primera



mayor a la segunda. Pero en ambos sistemas de medidas doce -12- pulgadas hacen un pie, inglés o español respectivamente. La diferencia está que 3 pie ingleses o 36 pulgadas inglesas hacen una yarda, mientras que 3 pie españoles o 36 pulgadas españolas hacen una vara. Revolviendo, la vara como la yarda española y la yarda como la vara inglesa.

El sistema español de medidas en Guatemala no solo es importante en las medidas agrarias que vienen desde el tiempo de la colonia, también esta deja influencia en los planos maestros de construcción de edificios de dicha época. Por ejemplo, los trazos y emplantillados de una localidad como la Antigua Guatemala, o el plano del neoclásico edificio de la municipalidad de Quetzaltenango.

La controversia a la que se refiere el inicio del anterior párrafo parte de la definición de cuerda como medida agraria del sistema español, que es un cuadro o cuadrado cuyo lado o arista equivale a 25 varas es decir 625 varas cuadradas de superficie. Pero con la intromisión inglesa en Belice, y en regiones aledañas tal como Izabal y las Verapaces, se interpretó cuerda como un cuadrado con 25 yardas de arista, lo que lleva a una superficie agraria de mayor tamaño. Lo mismo pasa con el quintal para peso. De paso es de recordar que una cuerda de 625 varas cuadradas equivale a 436.7114 metro cuadrado. Medidas de superficie con cuatro -4- decimales, si los lados se miden con cinta métrica que implica el metro con dos decimales, es decir centímetros. Si multiplicando y multiplicador con 2 decimales cada uno, por ser producto del trabajo con cinta métrica, el producto con 4 decimales por principio de aritmética.

Al final es importante la atención a los detalles de conversión en sistemas de medidas en el oficio de ingeniero. Por ejemplo, en hidráulica, el estándar de longitud de una tubería en sistema inglés es de 20 pie, equivalente a 6.09 metro. A menos que el fabricante ofrezca 6.00 metros exactos. El no prestar atención a lo anterior hace que, en un paso de zanjón con tubo de hierro galvanizado de 6 pulgadas de diámetro, por cada 10 tubos se acumula una diferencia de 0.90 metro o 90 centímetros. El no tomar esto en cuenta hace que se necesite al final cortar el tubo faltante a la medida, o la compra de uno extra y también cortar para cuadrar lo que pide el plano. En ambos casos se necesitará un trabajo extra de corte y torno para la fabricación de la rosca. Un costo surgente por descuido.

Es curiosa la ingeniería guatemalteca, sobre todo para la ingeniería civil, se tiene la convivencia<sup>1</sup> de al menos tres sistemas de medidas a la vez. Puede parecer, y para algunos es un desorden por corregir, tener tres sistemas de medidas a un tiempo, y no simplificar y manejar un solo sistema para facilitar grandemente las mediciones.

Sin embargo, la necesidad de utilizar factores de conversión entre diferentes sistemas de medidas, por trivial que parezca a primera vista este problema, plantea

---

<sup>1</sup> **Aguilar, Luis.** SISTEMA MÉTRICO DECIMAL Y EQUIVALENCIA DE MEDIDAS Y PESAS FRANCESAS, INGLESAS, ESPAÑOLAS Y AMERICANAS. Librería Cordón Hermanos, Guatemala, 1935.

la necesidad de una interdisciplinariedad con las diversas concepciones para medir y comparar.

Explicando de manera breve, según la ley guatemalteca en la Comisión Guatemalteca de Normas COGUANOR, estableció que *en Guatemala es obligatorio el sistema internacional de medidas* –COGUANOR NGO 4010- Es este el sistema oficial para medidas agrarias por ejemplo, para cotizar los trabajos de mantenimiento y construcción de caminos, carreteras y otros.

Sin embargo, la fuerte intromisión de Estados Unidos deja que, por costumbre, se maneje el sistema inglés de medidas en los materiales de construcción: longitud de tubería –hierro fundido, hierro galvanizado, cloruro de polivinilo (PVC) así como longitud de perfiles metálicos y hierro de construcción, que utilizan las longitudes estándar de 20 y 30 pies. –Aunque hoy día es también posible encontrar un redondeo de dichos materiales de construcción a 6 metros, sistema inglés redondeado a sistema internacional- por anotar ilustraciones pertinentes.

Pliegos de lámina –negra, galvanizada- como planchas de fibra: plywood, panel W y tablex en medida estándar de 4 por 8 pie. Longitudes de lámina de zinc para techos en pie también. La madera para construcción se cubica -se mide- la sección del perfil en pulgada y en consecuencia maneja el sistema inglés de medidas, el pie tablar. De igual manera se compra en los mercados guatemaltecos productos alimenticios como granos y azúcar y otros por libra y no por kilo.

Hay que dejar clara la lógica de estos dos sistemas de medidas en esta consideración, punto de partida para la transdisciplinariedad, pues son concepciones diferentes implícitas en los patrones de medidas.

En el sistema Internacional se manejan los múltiplos y submúltiplos en base al diez. Las unidades básicas de masa, longitud y tiempo son: kilogramo, metro y segundo. En el caso de la longitud se habla de decámetro, hectómetro y kilómetro manejan 10, 100 y 1000 metros respectivamente. O mencionar decímetro, centímetro y milímetro para: 1/10, 1/100 y 1/1000 metro respectivamente. En potencias de base diez, de kilómetro a milímetro, pasando por el metro,  $10^n = 10^3, 10^2, 10^1, 10^0, 10^{0.1}, 10^{0.01}$  y  $10^{0.001}$ . Se tiene el uso de potencias de base diez, con la facilidad de correr el punto decimal a la izquierda o a la derecha a conveniencia.

Para el sistema inglés, sus unidades básicas de masa, longitud y tiempo son respectivamente: libra, pulgada y segundo. Pero el sistema inglés es diferente en su lógica. Las unidades con la tendencia antropomórfica, con la pulgada como mejor ejemplo y doce pulgadas<sup>2</sup> un pie. Es decir que el pie como múltiplo de la pulgada, y sobre el pie, tres de estos últimos hacen una yarda. Ahora una gran diferencia con los submúltiplos es la lógica del medio, el factor común es la mitad. Se explica, de

---

<sup>2</sup> **Kula, Witold.** LAS MEDIDAS Y LOS HOMBRES. 4ta. Edición en español, Siglo XXI, Madrid, España, 1999.

una pulgada a  $\frac{1}{2}$  pulgada,  $\frac{1}{4}$  pulgada,  $\frac{1}{8}$  pulgada,  $\frac{1}{16}$  pulgada,  $\frac{1}{32}$  pulgada,  $\frac{1}{64}$  pulgada y  $\frac{1}{128}$  de pulgada. Cada nuevo submúltiplo es la mitad del anterior.

Si bien en el sistema Internacional de medidas se busca una practicidad en las matemáticas –por ser potencias de base diez y el corrimiento del punto decimal a discreción- la practicidad del sistema inglés es la manejabilidad de sus múltiplos y submúltiplos. Los primeros adecuados a las dimensiones promedio del humano y los segundos en la practicidad consuetudinaria de ir dividiendo por la mitad cada nueva unidad menor derivada del patrón, tal como la pulgada.

Los submúltiplos en el sistema inglés, generalmente los puede manipular de manera directa el ser humano, cargarlos, llevarlos, almacenarlos y más. Con el sistema internacional no es tan sencillo lo anterior, o es muy pequeño para observar de manera directa, o muy grande para manipular, necesitándose de maquinaria y herramientas. Tal vez el sistema inglés es uno de los más amigables con el hombre, y es práctico por lo que está ligado de fuerte manera al oficio de constructor artesano e ingeniero, en expresiones básicas con herramientas simples.

Ahora, es la Segunda Guerra mundial, la que con la intromisión –otra vez- de los Estados Unidos de América, deja una huella indeleble de factores promedio para la planificación en la ingeniería guatemalteca. Como también el sistema de medidas antes –inglés- referido.

Pero la herencia de la colonización en Guatemala como capitanía, deja también una huella importante para el oficio y profesión de ingeniero civil y constructor, el sistema español de medidas. A primera vista se manifiesta en las superficies agrarias –de fincas y terrenos- Es el caso de la cuerda, antes las fincas urbanas cuantificadas en esta, por ejemplo, dos o tres cuerdas para una vivienda, o lotes de  $\frac{1}{2}$  cuerda o  $\frac{1}{4}$  de cuerda. Aparece la misma lógica del medio - $\frac{1}{2}$ - del práctico sistema inglés. Pero ¿qué es una cuerda? No es más que el área de un cuadrado de terreno, cuya arista o lado tiene 25 varas de largo, es decir: 625 ( $v^2$ ) varas cuadradas. Analizando las unidades básicas del sistema español, para masa, longitud y tiempo se tiene: libra –española- pulgada –española- y segundo; respectivamente<sup>3</sup>.

Al observar un mapa de Europa se ve que Gran Bretaña como España son vecinos y manejan los mismos nombres para su sistema de medidas, es decir que para el sistema inglés como para el sistema español, en masa se tiene libra; para longitud pulgada, donde la pulgada inglesa es de mayor longitud que la española. En ambos sistemas doce -12- pulgadas es un -1- pie (inglés y español respectivamente) y tres -3- pie: una -1- yarda (inglesa) o una -1- vara (española) Revolviendo, la vara como yarda española y la yarda como vara inglesa. De donde, equiparando con el metro

---

<sup>3</sup> **Aguilar, Luis.** SISTEMA MÉTRICO DECIMAL Y EQUIVALENCIA DE MEDIDAS Y PESAS FRANCESAS, INGLESAS, ESPAÑOLAS Y AMERICANAS. Librería Cordón Hermanos, Guatemala, 1935.

la yarda y la vara se tiene: 1 yarda –o vara inglesa- = 0.9144 metro y 1 vara –o yarda española- = 0.8359 metro<sup>4</sup>.

Retomando el problema de la cuerda –sistema español- de 625 varas cuadradas se tiene en el sistema Internacional la equivalencia de 436.7114 metro cuadrado. Pero por la confusión que puede generar el sistema español versus el inglés, en algunas partes de Guatemala. Por ejemplo en las verapaces, se interpretó la cuerda como el área cuadrada de 25 varas –inglesas, entiéndase yardas- de arista. A primera vista, una cuerda con un área mayor al estándar español. Una confusión que ha traído problemas agrarios que se han resuelto con la oportuna negociación<sup>5</sup>.

Retomando el sistema español, es pertinente al momento de la restauración de monumentos y edificaciones que datan del tiempo de la colonización. Las medidas y acotados en base a dicho sistema. Así como la importancia de este sistema de medidas en trabajos de ebanistería, tal es el caso de las andas procesionales en el culto de la iglesia católica. De allí la expresión de “metro de carpintero” que hace referencia a un patrón de medidas, donde además del sistema Internacional e inglés, va también el sistema español –la pulgada española apreciada en carpintería fina, que es ebanistería. Al final cada cosa en su lugar<sup>6</sup>.

Entonces, en parcial conclusión, el aspecto de medición en Guatemala, forma a un ingeniero y artesano de la construcción con la necesidad de la habilidad de manejar varios sistemas de medidas a la vez. La normativa en este país indica un sistema, pero en la práctica, el contexto obliga a trabajar con otras concepciones de medición.

¿Cuándo utilizar cuál sistema? Es el contexto, que puede ser mixto para una respuesta. Por ejemplo, para cumplimiento con normativa nacional, los planos o instrucciones de construcción es el sistema internacional, pero para facilidad para financiamiento extranjero se necesita a la vez la misma información en sistema inglés. Otro ejemplo frecuente es el trabajo con materiales de construcción importados y concebidos en sistema inglés por parte del fabricante, pero para cumplir con normativa nacional se debe elaborar una versión en sistema internacional.

A primera vista parece ser el problema trivial de multiplicar o dividir por cierto factor de conversión entre los sistemas de medidas que son necesarios, pero es el inicio de algo más. El verdadero problema es la modelación para ajustar y aprovechar de

---

<sup>4</sup> **Aguilar, Luis.** SISTEMA MÉTRICO DECIMAL Y EQUIVALENCIA DE MEDIDAS Y PESAS FRANCESAS, INGLESAS, ESPAÑOLAS Y AMERICANAS. Librería Cordón Hermanos, Guatemala, 1935.

<sup>5</sup> **Aguilar, Luis.** SISTEMA MÉTRICO DECIMAL Y EQUIVALENCIA DE MEDIDAS Y PESAS FRANCESAS, INGLESAS, ESPAÑOLAS Y AMERICANAS. Librería Cordón Hermanos, Guatemala, 1935.

<sup>6</sup> **Aguilar, Luis.** SISTEMA MÉTRICO DECIMAL Y EQUIVALENCIA DE MEDIDAS Y PESAS FRANCESAS, INGLESAS, ESPAÑOLAS Y AMERICANAS. Librería Cordón Hermanos, Guatemala, 1935.

la mejor manera los materiales de construcción, pensados desde otra idiosincrasia y trabajar con ellos para las necesidades que plantea el proyecto. A veces hay muchas opciones y maneras de ir haciendo ajustes, de donde se complejiza el problema inicial.

Además, con menor frecuencia en Guatemala, se utiliza el sistema de medidas DINA o CGS -centímetro, gramos, segundo- que tiene para masa, longitud y tiempo: gramo, centímetro y segundo. Un sistema que puede tomarse como un derivado del sistema Internacional de medidas. Como se ve en el caso de las unidades de masa y longitud, se tienen pequeñas unidades, es un sistema de medidas para experimentación a pequeña escala en laboratorio, donde se trabaja con pócimas cuyos elementos integrantes se consideran en gramos, pequeñas cantidades. Es como el comentario de un estudiante universitario en ciencias, un ingeniero químico y un químico farmacéutico coinciden en el estudio de física – química, pero difieren estos grandemente con el sistema de medidas utilizado, en la magnitud de sus cálculos. El primero utilizará el Sistema Internacional, mientras que el segundo el sistema CGS.

Hasta ahora, si se es observador, puede verse que para estos cuatro sistemas de unidades coinciden en la unidad básica del tiempo, el segundo. ¿Por qué? Hay que dejar claro que hay dos sistemas de segundos: el sexagesimal y el centesimal o sistema gon. Para estos cuatro sistemas se sobreentiende que es el sistema sexagesimal o en base al número 60. Es decir 60 segundos un minuto y 60 minutos una hora. –Esto para el caso del tiempo, pero también para medidas angulares o de abertura, donde 60 minutos<sup>7</sup> un grado.

¿Por qué base 60 y no 100 en potencia de base 10? El sistema gon intenta la exactitud matemática al hacer que 100 segundos 1 minuto y 100 minutos un grado gon. Sin embargo, acá la belleza y exactitud matemática no puede contra el utilitarismo y practicidad que se encuentra en un sistema, cuya base es el número 60. El número 60 es el número con la mayor cantidad de submúltiplos enteros. Es decir, el número 60 es divisible en partes enteras entre: 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 y 30; siendo los cocientes enteros respectivos: 30, 20, 15, 12, 10, 6, 5, 4, 3 y 2. Esto no se puede hacer con el número 100, que sólo es divisible en partes enteras entre: 2, 4, 5, 10, 20, 25 y 50, siendo los cocientes respectivos: 50, 25, 20, 10, 5, 4 y 2. El 60 divisible entre 10 números –sin incluir el 1 y el 60 mismo- mientras que el 100 divisible entre 7 números –sin incluir 1 y el 100 mismo<sup>8</sup>.

---

<sup>7</sup> **Bell, E. T.** HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS. 2ra reimpresión de segunda edición. Fondo de Cultura Económica, México, 1995.

<sup>8</sup> **Bell, E. T.** HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS. 2ra reimpresión de segunda edición. Fondo de Cultura Económica, México, 1995.

Lo anterior deja una lección y factor importante en la ingeniería y la construcción, así como en sus criterios en general, lo utilitarista y la practicidad, de lo contrario no hay ingeniería y edificación. La practicidad revela el origen militar de la ingeniería<sup>9</sup>.

A continuación se coloca un resumen de equivalencias de sistemas de medidas, que desde la perspectiva del recopilador, peden ser interesantes y de utilidad al futuro ingeniero. Se piensa en lo cotidiano, de hacer el oficio de ingeniero durante todos los días.

#### **EQUIVALENCIAS DE UNIDADES DE MEDIDAS DE LONGITUD**

|                |                                |
|----------------|--------------------------------|
| <b>METRO =</b> | 1.196307 varas.                |
|                | 1.093611 yardas.               |
|                | 3.28083 pies ingleses.         |
|                | 39.37 pulgadas inglesas.       |
|                | 1000 milímetros.               |
|                | 100 centímetros.               |
|                | 10 decímetros.                 |
|                | 0.001 kilómetros.              |
|                | 0.047852 cadenas de 25 varas.  |
| <b>YARDA =</b> | 0.914402 metros.               |
|                | 1.093906 varas.                |
|                | 3 pies.                        |
|                | 36 pulgadas.                   |
|                | 0.0005681 millas terrestres.   |
|                | 0.0437542 de 25 varas.         |
| <b>VARA =</b>  | 0.83590575 metros.             |
|                | 0.91415564 yardas.             |
|                | 2.742465 pies ingleses.        |
|                | 32.90960304 pulgadas inglesas. |
|                | 0.000519 millas terrestres.    |
|                | 36 pulgadas españolas.         |
|                | 0.0274246 cadena de 100 pies.  |

---

<sup>9</sup> **Kula, Witold.** LAS MEDIDAS Y LOS HOMBRES. 4ta. Edición en español, Siglo XXI, Madrid, España, 1999.

|              |                            |
|--------------|----------------------------|
| PIE INGLES = | 12 pulgadas inglesas.      |
|              | 0.33333 yardas.            |
|              | 0.0606 rod.                |
|              | 0.00019 millas terrestres. |
|              | 0.730480 metros.           |
|              | 0.364635 varas.            |

|                   |                        |
|-------------------|------------------------|
| PULGADA INGLESA = | 0.08333 pies ingleses. |
|                   | 0.027777 yardas.       |
|                   | 0.0254 metros.         |
|                   | 0.030386 varas.        |
|                   | 0.254 decímetros.      |
|                   | 2.54 centímetros.      |
|                   | 25.4 milímetros.       |

|                       |                    |
|-----------------------|--------------------|
| CADENA DE INGENIERO = | 100 pies ingleses. |
|                       | 30.4801 metros.    |
|                       | 33.3333 yardas     |
|                       | 36.36358 varas.    |

|             |                             |
|-------------|-----------------------------|
| DECÁMETRO = | 10 metros.                  |
|             | 10.9361 yardas.             |
|             | 11.96307 varas.             |
|             | 0.47852 cadena de 25 varas. |
|             | 32.8083 pies ingleses.      |

|                      |                            |
|----------------------|----------------------------|
| CADENA DE 25 VARAS = | 68.5650 pies ingleses.     |
|                      | 22.8558 yardas.            |
|                      | 25 varas.                  |
|                      | 20.89764 metros.           |
|                      | 2.08976 decámetros.        |
|                      | 1.04488 dobles decámetros. |

|                   |                        |
|-------------------|------------------------|
| DOBLE DECAMETRO = | 20 metros.             |
|                   | 21.8722 yardas.        |
|                   | 23.9261 varas.         |
|                   | 65.6166 pies ingleses. |

|                      |                            |
|----------------------|----------------------------|
| CADENA DE 25 VARAS = | 68.5650 pies ingleses.     |
|                      | 22.8558 yardas.            |
|                      | 25 varas.                  |
|                      | 20.89764 metros.           |
|                      | 2.08976 decámetros.        |
|                      | 1.04488 dobles decámetros. |

|                   |                            |
|-------------------|----------------------------|
| MILLA TERRESTRE = | 52.8 cadenas de ingeniero. |
|                   | 1609.34928 metros.         |
|                   | 1925.2760 varas.           |
|                   | 1760 yardas.               |
|                   | 5280 pies ingleses.        |
|                   | 0.8684 millas náuticas.    |
|                   | 1.6093 kilómetros.         |
|                   | 0.3333 leguas.             |
|                   | 320 rods.                  |

|             |                            |
|-------------|----------------------------|
| KILOMETRO = | 1000 metros.               |
|             | 1093.61 yardas.            |
|             | 3280.83 pies ingleses.     |
|             | 1196.31 varas.             |
|             | 0.62137 millas terrestres. |
|             | 0.539615 millas náuticas.  |

|         |                               |
|---------|-------------------------------|
| LEGUA = | 5775 varas.                   |
|         | 4828 metros.                  |
|         | 5280 yardas.                  |
|         | 15840 pies ingleses.          |
|         | 3 millas terrestres (statute) |
|         | 4.8280 kilómetros.            |



## EQUIVALENCIAS EN UNIDADES DE SUPERFICIE

|                            |                              |
|----------------------------|------------------------------|
| METRO CUADRADO O CENTIÁREA | 1.195985 yardas cuadradas.   |
|                            | 1.43115 varas cuadradas.     |
|                            | 10.763865 pies cuadrados.    |
|                            | 1550 pulgadas cuadradas.     |
|                            | 10000 centímetros cuadrados. |
|                            | 0.000247104 acres.           |

|                |                            |
|----------------|----------------------------|
| YARDA CUADRADA | 0.836131 metros cuadrados. |
|                | 1.196627 varas cuadradas.  |
|                | 9 pies ingleses cuadrados. |
|                | 1296 pulgadas cuadradas.   |

|               |                                 |
|---------------|---------------------------------|
| VARA CUADRADA | 0.698738 metros cuadrados.      |
|               | 0.835678 yardas cuadradas.      |
|               | 7.521114 pies cuadrados.        |
|               | 1083.040456 pulgadas cuadradas. |
|               | 0.000172661 acres.              |

|                     |                                |
|---------------------|--------------------------------|
| PIE INGLES CUADRADO | 0.099034 metros cuadrados.     |
|                     | 929.034 centímetros cuadrados. |
|                     | 92903.4 milímetros cuadrados.  |
|                     | 0.1111111 yardas cuadradas.    |
|                     | 144 pulgadas cuadradas.        |
|                     | 0.132959 varas cuadradas.      |

|                            |                                       |
|----------------------------|---------------------------------------|
| HECTÁREA O MANZANA MÉTRICA | 10000 metros cuadrados o centiáreas.  |
|                            | 107639 pies ingleses cuadrados.       |
|                            | 2.47104 acres.                        |
|                            | 0.003861 millas terrestres cuadradas. |
|                            | 14311.5072 varas cuadradas.           |
|                            | 11959.828321 yardas cuadradas.        |
|                            | 0.02216035 caballerías.               |
|                            | 1.43115 manzanas.                     |

|         |                                            |
|---------|--------------------------------------------|
| MANZANA | 6987.3842 metros cuadrados.                |
|         | 0.69873842 hectáreas.                      |
|         | 8356.79 yardas cuadradas.                  |
|         | 10000 varas cuadradas.                     |
|         | 1.72661 acres.                             |
|         | 75211.14 pies cuadrados.                   |
|         | 16 cuerdas cuadradas de 25 varas por lado. |

|                                         |                            |
|-----------------------------------------|----------------------------|
| CUERDA CUADRADA DE 25 VARAS<br>POR LADO | 436.7114 metros cuadrados. |
|                                         | 625 varas cuadradas.       |
|                                         | 522.2994 yardas cuadradas. |
|                                         | 0.04367 hectáreas          |
|                                         | 0.1079 acres.              |
|                                         | 0.0625 manzanas.           |

|                    |                                       |
|--------------------|---------------------------------------|
| KILOMETRO CUADRADO | 1000000 metros cuadrados.             |
|                    | 100 hectáreas.                        |
|                    | 247.1050 acres.                       |
|                    | 0.386101 millas terrestres cuadradas. |
|                    | 2.2164 caballerías.                   |
|                    | 143.11507 manzanas.                   |
|                    | 2289.841252 cuerdas cuadradas.        |

|                          |                                |
|--------------------------|--------------------------------|
| MILLA TERRESTRE CUADRADA | 2589894.7692 metros cuadrados. |
|                          | 258.9895 hectáreas.            |
|                          | 2.5899 kilómetros cuadrados.   |
|                          | 3097474.8804 yardas cuadradas. |
|                          | 3706468 varas cuadradas.       |
|                          | 5.7392 caballerías.            |
|                          | 370.6468 manzanas.             |
|                          | 640 acres.                     |

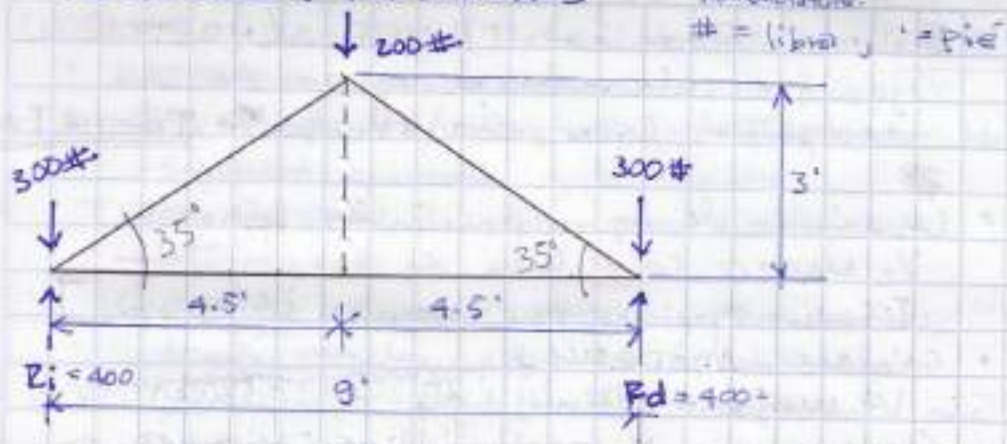
|      |                                                |
|------|------------------------------------------------|
| ACRE | 4046.8721 metros cuadrados.                    |
|      | 4840 yardas cuadradas.                         |
|      | 43560 pies ingleses cuadrados.                 |
|      | 5791.6810 varas cuadradas.                     |
|      | 0.404687 hectáreas.                            |
|      | 40.4687 áreas.                                 |
|      | 0.579168 manzanas.                             |
|      | 9.2667 cuerdas cuadradas de 25 varas por lado. |
|      | 0.0015625 millas terrestres cuadradas.         |
|      | 0.008968 caballerías.                          |

|            |                                                |
|------------|------------------------------------------------|
| CABALLERÍA | 451256.5407 metros cuadrados.                  |
|            | 45.12565407 hectáreas.                         |
|            | 0.451257 kilómetros cuadrados.                 |
|            | 539695.9815 yardas cuadradas.                  |
|            | 645816.1251 varas cuadradas.                   |
|            | 64.5816 manzanas.                              |
|            | 1033.3058 cuerdas cuadradas de varas por lado. |
|            | 111.5072 acres.                                |

## VECTORES EN 2D

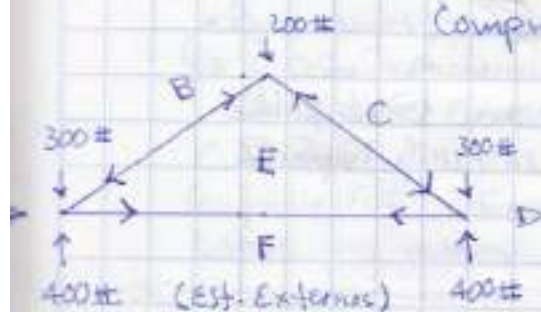
Ahora se adjntan tres problemas ilustrativos, donde se revisa el equilibrio de fuerzas en sistrmas en reposo. Cada problema se analiza y resuelve por método: Gráfico, nodos o nudos, sistema de matrices y sistema de ecuaciones. Tambien va el método de secciones para particiones parciales de armaduras. En si son quince problemas, de lo mas sencillo a lo complejo. La idea es haer una retórica de cada planteamiento, donde se hace práctica de la retórica, que es ver y analizar una problemática, desde diversos puntos de vista y planteamientos.

# VECTORES Y ARMADURAS

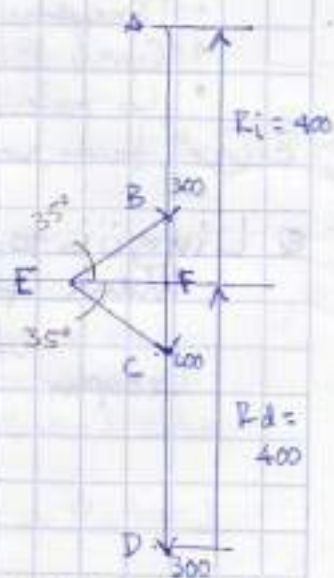


NOTA: por simetría de cargas y distribución de la armadura en el eje vertical:  $R_i = R_d = \frac{300 + 200 + 300}{2} = 400\#$

HIPÓTESIS: si esfuerzos internos // a los elementos correspondientes, COROLARIO: únicamente esfuerzos de:  
Tensión  $\rightarrow$  y  $(-)$  } o alternos  
Compresión  $\leftarrow$   $(+)$



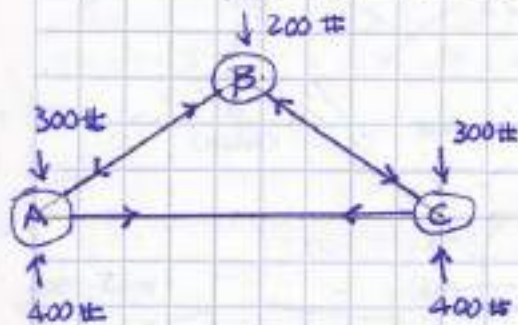
EJE  
Simétrico  
(CARGAS/ESTRUCTURA)



D.C.L. (Método Gráfico) A  
Escala  $1\text{cm} = 100\#$



B Método Nodos : hacer un P.C.L por nodo y plantear un sistema de ecuaciones definido.



**NODO A**



$\sum F_y = 0 \Rightarrow 300 \downarrow + C_{AB} \sin 35^\circ \downarrow = 400 \uparrow$   
 $\therefore C_{AB} = 174.34 \text{ lb}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_{AB} \cos 35^\circ = T_{AC}$   
 $174.34 \cos 35^\circ = T_{AC}$   
 $142.81 = T_{AC}$

**NODO B**



$\sum F_y = 0 \Rightarrow 300 \downarrow + T_{CA} \sin 35^\circ \downarrow = 400 \uparrow$   
 $C_{AB} = 174.34 \text{ lb}$   
 $\sum F_x = 0 \Rightarrow 174.34 \cos 35^\circ = T_{CA}$   
 $142.81 = T_{CA}$

**NODO C**



C Método de Secciones

hacer un DCL por sección

$\sum F_x = 0 \Rightarrow 174.34 \cos 35^\circ = 174.34 \cos 35^\circ$   
 $\sum F_y = 0 \Rightarrow 200 = 2 \times 174.34 \sin 35^\circ$   
 $200 = 199.99$



Sección A

Sección B  
VER NODO B  
(M. NODOS)

**DCL SECCIÓN A**



$\sum F_y = 0$   
 $400 \uparrow + C_{AB} \sin 35^\circ \uparrow = 300 \downarrow + 200 \downarrow$   
 $C_{AB} = 174.34 \text{ lb}$

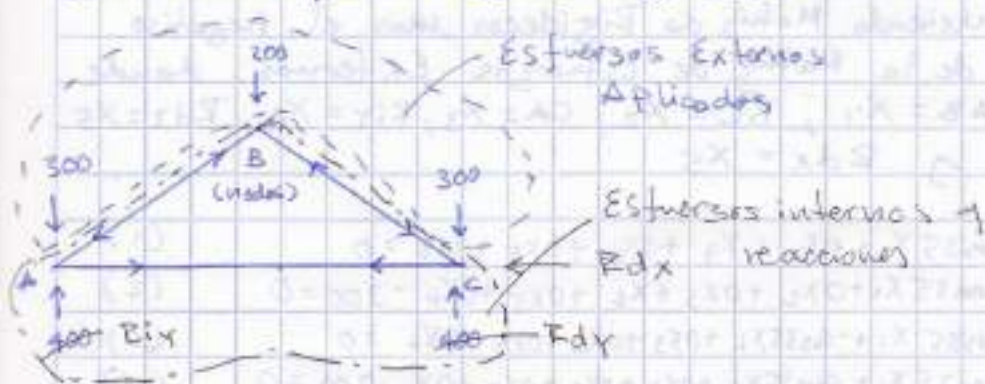
$\sum F_x = 0$

$T_{AC} = 174.34 \cos 35^\circ$

$\rightarrow \leftarrow$

$T_{AC} = 142.81$

# P. Planteo por Matriz de Rigideces de 109. III



MATRIZ RIGIDEZ  $[K] (6 \times 6)$ ;  $\text{Determinante } D = 0.9397$

|       | AB               | BC               | CA   | $R_{1x}$ | $R_{1y}$ | $R_{2x}$ |
|-------|------------------|------------------|------|----------|----------|----------|
| $A_x$ | $-\cos 35^\circ$ | 0                | 1    | 0        | 0        | 0        |
| $A_y$ | $-\sin 35^\circ$ | 0                | 0    | 1        | 0        | 0        |
| $B_x$ | $\cos 35^\circ$  | $-\cos 35^\circ$ | 0    | 0        | 0        | 0        |
| $B_y$ | $\sin 35^\circ$  | $-\sin 35^\circ$ | 0    | 0        | 0        | 0        |
| $C_x$ | 0                | $\cos 35^\circ$  | $-1$ | 0        | 0        | $-1$     |
| $C_y$ | 0                | $-\sin 35^\circ$ | 0    | 0        | 1        | 0        |

|          |        |
|----------|--------|
| AB       | 174.34 |
| BC       | 174.34 |
| CA       | 142.81 |
| $R_{1x}$ | 400    |
| $R_{1y}$ | 400    |
| $R_{2x}$ | 0      |

Matriz Inversa

|    |    |        |       |    |   |
|----|----|--------|-------|----|---|
| 0  | 0  | 0.610  | 0.871 | 0  | 0 |
| 0  | 0  | -0.610 | 0.871 | 0  | 0 |
| 1  | 0  | 0.5    | 0.714 | 0  | 0 |
| 0  | -1 | 0.350  | 0.5   | 0  | 0 |
| 0  | 0  | -0.350 | 0.5   | 0  | 1 |
| -1 | 0  | -1     | 0     | -1 | 0 |

Est. Externos

|     |          |
|-----|----------|
| 0   | AB       |
| 300 | BC       |
| 0   | CA       |
| 200 | $R_{1x}$ |
| 0   | $R_{1y}$ |
| 300 | $R_{2x}$ |

Resultados

## • Esquema

$$M. \text{ Inversa} \times M. \text{ Est. Externos} = M. \text{ Est. Internos y reacciones}$$

4

E. Por sistema de Ecuaciones  
 Uniendo Matriz de Rigideces mas el negativo  
 de la Matriz de Esfuerzos Externos, donde  
 $AB = X_1$ ;  $BC = X_2$ ,  $CA = X_3$ ,  $R_{ix} = X_4$ ,  $R_{dx} = X_5$   
 $\rightarrow R_{dx} = X_5$

$$-\cos 35^\circ X_1 + 0X_2 + X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 = 0 \quad (1)$$

$$-\sin 35^\circ X_1 + 0X_2 + 0X_3 + X_4 + 0X_5 + 0X_6 - 300 = 0 \quad (2)$$

$$\cos 35^\circ X_1 + \cos 35^\circ X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 = 0 \quad (3)$$

$$\sin 35^\circ X_1 + \sin 35^\circ X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 - 200 = 0 \quad (4)$$

$$0X_1 + \cos 35^\circ X_2 - X_3 + 0X_4 + 0X_5 - X_6 = 0 \quad (5)$$

$$0X_1 + -\sin 35^\circ X_2 + 0X_3 + 0X_4 + X_5 + 0X_6 - 300 = 0 \quad (6)$$

$$-\cos 35^\circ X_1 + X_3 = 0 \quad (1) \quad X_1 = 174.34$$

$$-\sin 35^\circ X_1 + X_4 - 300 = 0 \quad (2) \quad X_2 = 174.34$$

$$\cos 35^\circ X_1 - \cos 35^\circ X_2 = 0 \quad (3) \quad X_3 = 142.81$$

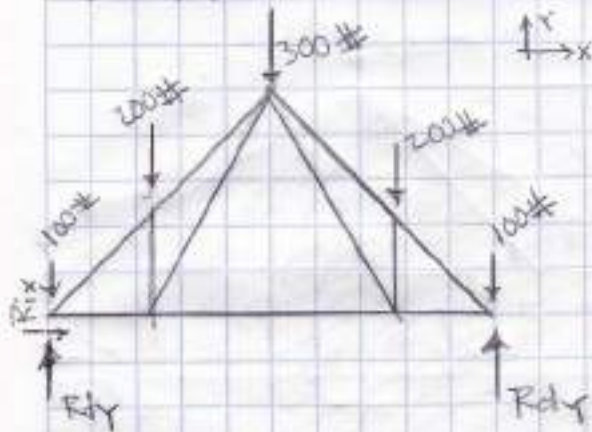
$$\sin 35^\circ X_1 + \sin 35^\circ X_2 - 200 = 0 \quad (4) \quad X_4 = 400$$

$$\cos 35^\circ X_2 - X_3 - X_6 = 0 \quad (5) \quad X_5 = 400$$

$$-\sin 35^\circ X_2 + X_5 - 300 = 0 \quad (6) \quad X_6 = 0$$



# VECTORES Y ARMADURAS 2 # = libra



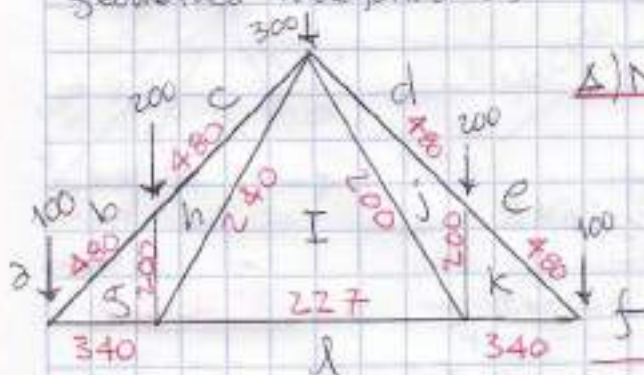
NOTA: por simetría (eje Vertical) de armadura y esfuerzos externos:

$$R_{lx} = R_{dx} = \frac{100 + 200 + 300 + 200 + 100}{2}$$

$$R_{ly} = R_{dy} = 450 \text{ #}$$

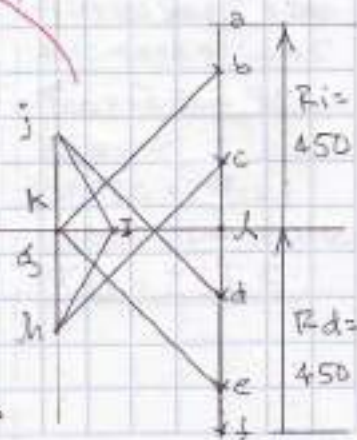
## HIPÓTESIS BÁSICAS:

- a) Esfuerzos internos paralelos a los elementos
- b) Esfuerzos (Int/Ext) concentrados en nodos
- c) Armaduras integradas por triángulos (A única figura geométrica indeformable)



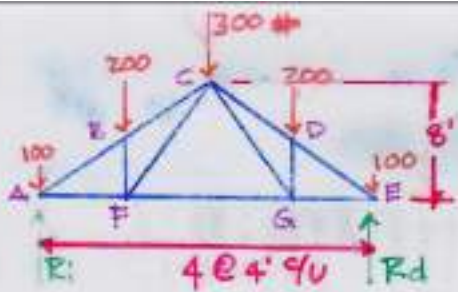
## MÉTODO GRÁFICO

Medir valores en D.C.L



ESCALA (D.C.L) 100 # =

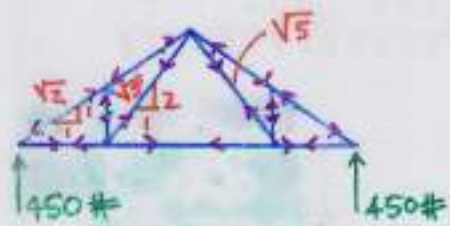




$$\sum F_y = 0 \text{ x Simetría } R_i = R_d$$

$$\sum R_i = 900 \# \wedge$$

$$R_i = R_d = 450 \#$$



**NODO A**

$$\sum F_x = 0$$

$$T_{AF} = C_{AB} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$450 = 100 + C_{AB} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$350 \sqrt{2} = C_{AB}$$

$$350 = T_{AF}$$

**NODO B**

$$\sum F_x = 0$$

$$350 \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = C_{BC} \frac{1}{\sqrt{2}} \therefore C_{BC} = 350 \sqrt{2}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$200 + C_{BC} \frac{1}{\sqrt{2}} = C_{BA} \frac{1}{\sqrt{2}} + C_{BF}$$

$$200 \# = C_{BF}$$

**NODO F**

$$\sum F_y = 0 \therefore$$

$$200 = T_{FC} \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$100 \sqrt{5} = T_{FC}$$

$$\sum F_x = 0 \therefore 350 = 100 \sqrt{5} \frac{1}{\sqrt{5}} + T_{FG}$$

$$250 = T_{FG}$$

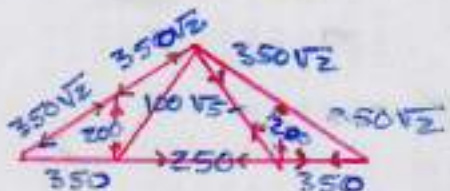
**NODO C** comprobación x SIMETRÍA

$$\sum F_y = 0$$

$$300 + 2 \cdot 100 \sqrt{5} \frac{2}{\sqrt{5}} = 2 \cdot 350 \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$300 + 400 = 700$$

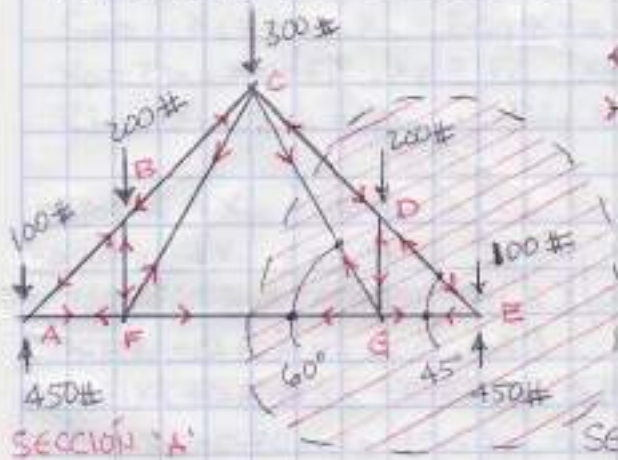
$$700 = 700$$



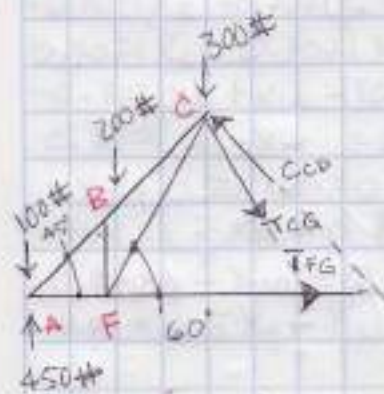
POR SIMETRÍA

**EJEMPLO MÉTODO DE NODOS.**

## C. METODO DE SECCIONES (1 DCL/section)



↔ Compresión (C)  
 ↔ Tensión (T)



SECCION 'A'



$\sum M_G = 0$  (Eliminar  $T_{CG}$  y  $T_{GF}$ )

$$C_{DC} \cos 45 + 100 = 450; \quad C_{DC} = 494.97$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum M_C = 0 \text{ (Eliminar } C_{CD} \text{ y } T_{FG})$$

$$100 \times 5 + 200 \times 2.89 + T_{FG} \times 5 = 450 \times 5$$

$$T_{FG} = 234.4 \rightarrow$$

$$\sum F_y = 0$$

$$100 + 200 + 300 + T_{CG} \sin 60 = C_{CD} \sin 45 + 450$$

$$150 = C_{CD} \sin 45 - T_{CG} \sin 60$$

$$\sum F_x = 0$$

$$234.4 + T_{CG} \cos 60 = C_{CD} \cos 45$$

$$234.4 = C_{CD} \sin 45 - T_{CG} \sin 60$$

$$= 494.54 \sin 45 = 230.58 = T_{CG}$$

$$450 + T_{CG} \sin 60 = 200$$

$$+ 100 + 494.97 \sin 45$$

$$T_{CG} = 230.94$$

$$\sum F_x = 0$$

$$494.97 \cos 45 = T_{GF} +$$

$$230.94 \cos 60$$

$$T_{GF} = 234.5$$



# SEGUNDO EJEMPLO

|    | escriba estancias internas |         |         |         |    |    |       |       |      |    |    |    |     |     | esLeft |  |
|----|----------------------------|---------|---------|---------|----|----|-------|-------|------|----|----|----|-----|-----|--------|--|
|    | AB                         | BC      | CD      | DE      | EF | FD | FC    | FG    | GC   | GB | GA | Ry | Rix | Rdy |        |  |
| Ay | -0.7071                    | 0       | 0       | 0       | 0  | 0  | 0     | 0     | 0    | 0  | 0  | 1  | 0   | 0   | 100    |  |
| Ac | 0.7071                     | 0       | 0       | 0       | 0  | 0  | 0     | 0     | 0    | 0  | 1  | 0  | 1   | 0   | 0      |  |
| Dy | 0.7071                     | -0.7071 | 0       | 0       | 0  | 0  | 0     | 0     | 0    | 0  | 0  | 0  | 0   | 0   | 200    |  |
| Ba | -0.7071                    | -0.7071 | 0       | 0       | 0  | 0  | 0     | 0     | 0    | 0  | 0  | 0  | 0   | 0   | 0      |  |
| Cy | 0                          | 0.7071  | 0.7071  | 0       | 0  | 0  | -0.87 | -0.87 | 0    | 0  | 0  | 0  | 0   | 0   | 300    |  |
| Ca | 0                          | 0.7071  | -0.7071 | 0       | 0  | 0  | 0.5   | 0     | -0.5 | 0  | 0  | 0  | 0   | 0   | 0      |  |
| Dx | 0                          | 0       | -0.7071 | 0.7071  | 0  | 1  | 0     | 0     | 0    | 0  | 0  | 0  | 0   | 0   | 200    |  |
| Dy | 0                          | 0       | 0.7071  | -0.7071 | 0  | 0  | 0     | 0     | 0    | 0  | 0  | 0  | 0   | 0   | 0      |  |
| Ey | 0                          | 0       | 0       | -0.7071 | 0  | 0  | 0     | 0     | 0    | 0  | 0  | 0  | 0   | 0   | 100    |  |
| Ex | 0                          | 0       | 0       | 0.7071  | -1 | 0  | 0     | 0     | 0    | 0  | 0  | 0  | 0   | 0   | 0      |  |
| Fy | 0                          | 0       | 0       | 0       | 0  | -1 | 0.866 | 0     | 0    | 0  | 0  | 0  | 0   | 0   | 0      |  |
| Fx | 0                          | 0       | 0       | 0       | 1  | 0  | -0.5  | -1    | 0    | 0  | 0  | 0  | 0   | 0   | 0      |  |
| Gy | 0                          | 0       | 0       | 0       | 0  | 0  | 0     | 0     | 0.87 | -1 | 0  | 0  | 0   | 0   | 0      |  |
| Gx | 0                          | 0       | 0       | 0       | 0  | 0  | 0     | 1     | 0.5  | 0  | -1 | 0  | 0   | 0   | 0      |  |

α 45

detorm -0.38

|        | escriba estancias |        |         |       |        |         |       |    |    |       |    |        |     |     |     |              |
|--------|-------------------|--------|---------|-------|--------|---------|-------|----|----|-------|----|--------|-----|-----|-----|--------------|
|        | AB                | BC     | CD      | DE    | EF     | FD      | FC    | FG | GC | GB    | GA | Ry     | Rix | Rdy |     |              |
| 0      | 0                 | 1.1154 | 0.2988  | 0.707 | 0.707  | 0.299   | 0.3   | 0  | 0  | 0.298 | 0  | 1.115  | 0   |     | AB  | 496.6747468  |
| 0      | 0                 | 1.1154 | -1.1154 | 0.707 | 0.707  | -0.299  | 0.3   | 0  | 0  | 0.298 | 0  | 1.115  | 0   |     | BC  | 494.5747468  |
| 0      | 0                 | 0.2989 | -0.2989 | 0.707 | -0.707 | 1.115   | 1.12  | 0  | 0  | 1.115 | 0  | -0.299 | 0   |     | CD  | 494.5747468  |
| 0      | 0                 | 0.2989 | -0.2989 | 0.707 | -0.707 | 1.115   | 0.3   | 0  | 0  | 1.115 | 0  | 0.299  | 0   |     | DE  | 494.5747468  |
| 0      | 0                 | 0.2113 | -0.2113 | 0.5   | -0.5   | 0.789   | -0.21 | 0  | -1 | 0.789 | 0  | 0.211  | 0   |     | EF  | 350          |
| 45-17  | 0                 | 1E-16  | 1.1E-16 | 0     | 0      | 1       | 1     | 0  | 0  | 1E-16 | 0  | 0      | 0   |     | FD  | 200          |
| -50-17 | 0                 | 1E-16  | 1.1E-16 | 0     | -1E-16 | 1.1E-16 | 1.15  | 0  | 0  | 1.15E | 0  | -0     | 0   |     | FC  | 230.9491077  |
| -20-17 | 0                 | 0.2113 | -0.2113 | 0.5   | -0.5   | 0.211   | 0.75  | 0  | -1 | 0.211 | -1 | 0.211  | 0   |     | FG  | 234.5299462  |
| 20-17  | 0                 | 1.1547 | -1.1547 | 0     | 1E-16  | -0      | 0     | 0  | 0  | -0    | 0  | 1.155  | 0   |     | GC  | 230.9491077  |
| 0      | 0                 | 1      | -1      | 0     | 0      | 0       | 0     | 0  | 0  | 0     | 0  | 0      | 0   |     | GB  | 200          |
| -10-23 | 0                 | 0.7887 | -0.7887 | 0.5   | -0.5   | 0.211   | -0.79 | 0  | -1 | 0.211 | -1 | 0.789  | -1  |     | GA  | 350          |
| 1      | 0                 | 0.7887 | 0.2113  | 0.5   | 0.5    | 0.211   | 0.21  | 0  | 0  | 0.211 | 0  | 0.789  | 0   |     | Ry  | 450          |
| 54-24  | 1                 | -1E-17 | 1       | 4E-17 | 1      | -0      | 1     | 0  | 1  | -0    | 1  | -0     | 1   |     | Rix | -3.55113E-15 |
| 4E-17  | 0                 | 0.2113 | -0.2113 | 0.5   | -0.5   | 0.789   | 0.21  | 1  | 0  | 0.789 | 0  | 0.211  | 0   |     | Rdy | 450          |

## Sistema de Ecuaciones

Sea  $X_1 = AB$ ,  $X_2 = BC$ ,  $X_3 = CD$ ,  $X_4 = DE$ ,  $X_5 = EF$ ,  
 $X_6 = FD$ ,  $X_7 = FC$ ,  $X_8 = FG$ ,  $X_9 = GC$ ,  $X_{10} = GB$ ,  $X_{11} = GA$ ,  
 $R_{iy} = X_{12}$ ,  $R_{ix} = X_{13}$  y  $R_{dy} = X_{14}$

$$-0.7071X_1 + X_{12} - 100 = 0 \quad (1)$$

$$-0.7071X_1 + X_{11} + X_{13} = 0 \quad (2)$$

$$0.7071X_1 - 0.7071X_2 + X_{10} - 200 = 0 \quad (3)$$

$$0.7071X_1 - 0.7071X_2 = 0 \quad (4)$$

$$0.7071X_2 + 0.7071X_3 - 0.87X_7 - 0.87X_9 - 300 = 0 \quad (5)$$

$$0.7071X_2 - 0.7071X_3 + 0.5X_7 - 0.5X_9 = 0 \quad (6)$$

$$-0.7071X_3 + 0.7071X_4 + X_6 - 200 = 0 \quad (7)$$

$$0.7071X_3 - 0.7071X_4 = 0 \quad (8)$$

$$-0.7071X_4 + X_{14} - 100 = 0 \quad (9)$$

$$0.7071X_4 - X_5 = 0 \quad (10)$$

$$-X_6 + 0.866X_7 = 0 \quad (11)$$

$$-0.5X_7 - X_8 = 0 \quad (12)$$

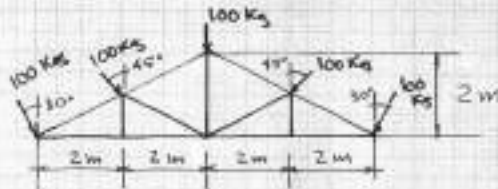
$$0.87X_9 - X_{10} = 0 \quad (13)$$

$$X_8 + 0.5X_9 - X_{11} = 0 \quad (14)$$

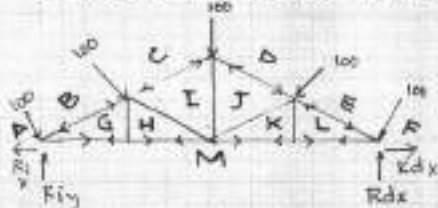
# EJEMPLO TRES

Mecánica Analítica I  
CAG

Resolver la siguiente ARMADURA por método Gráfico, Nodos y Secciones.



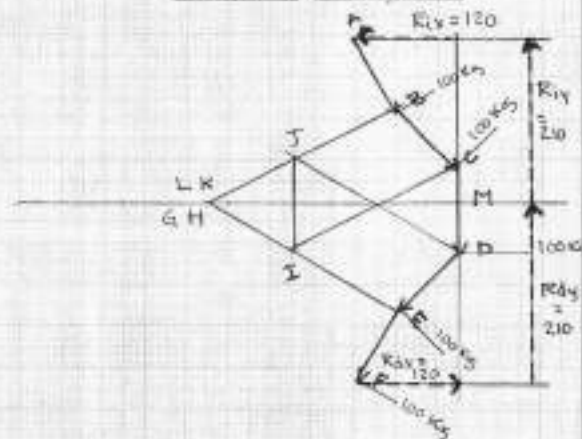
ESQUEMA PARA METODO GRAFICO



NOTA: con 2 letras vamos a vector o elemento. Una letra para colocarlo y la segunda para cola. Buscar colección o secuencia lógica.

Para Método Gráfico y los otros: Estructuras y Censos simétricas

DCL ESC 1/5000

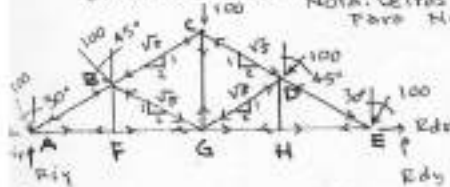


RESULTADOS  
que dependen de la ESCALA

Para Método de Nodos EJEMPLO TRES

(1 PCL x nodo)

NOTA: Letras mayúsculas para Nodos.



Para secciones, por simetría de estructura y censa, numéricamente

$$R_{ix} = R_{dx} = 100 \sin 30^\circ + 100 \sin 45^\circ = 120.71 \text{ Kg}$$

$$R_{iy} = R_{dy} = 100 \cos 30^\circ + 100 \cos 45^\circ + 100/2 = 207.31 \text{ Kg}$$

Se empieza por nodo con menor número de elementos

Nodo F

$$\sum F_y = 0 \quad T_{FB} = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad 312.12 = T_{FG}$$

Nodo B

$$\sum F_x = 0 \quad 100 \sin 45^\circ + 269.91 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = C_{BC} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + C_{BA} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$348.97 = C_{BC} + C_{BA} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad 100 \cos 45^\circ + C_{BC} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 269.91 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + C_{BA} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$111.80 = C_{BC} - C_{BA} \quad (2)$$

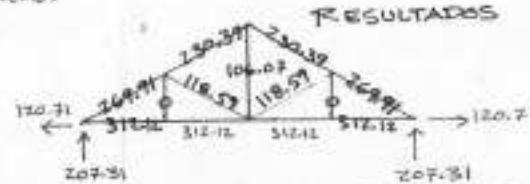
Resolviendo ecuaciones (1) y (2)

$$C_{BC} = 230.39$$

$$C_{BA} = 118.59$$

METODO GRAFICO I  
CAG

RESULTADOS



Nodo A

$$\sum F_y = 0 \quad 100 \cos 30^\circ + C_{AB} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 207.31$$

$$\therefore C_{AB} = 269.91$$

$$\sum F_x = 0 \quad 120.71 + 269.91 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = T_{AF}$$

$$T_{AF} = 312.12$$

Nodo C

Redundante  $\sum F_x = 0$

$$230.39 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 230.39 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sum F_y = 0 \quad 100 + T_{CG} = 2 \cdot 230.39 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore T_{CG} = 106.07$$

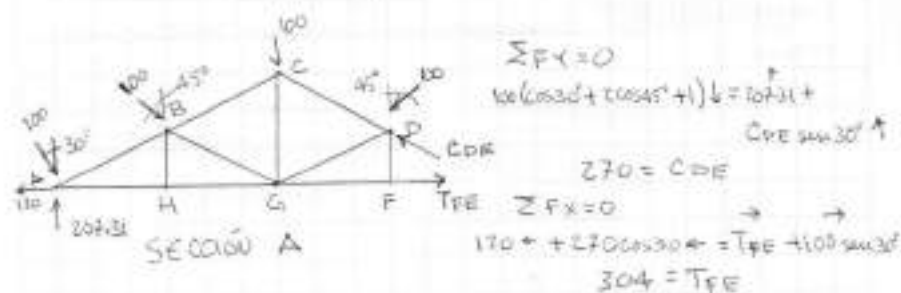
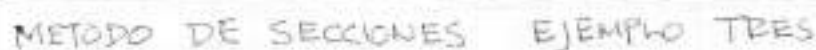
Nodo G

$$\sum F_x = 0 \quad 312.12 + 118.59 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 312.12 + 118.59 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Comprobando:

$$\sum F_y = 0 \quad 106.07 = 2 \cdot 118.59 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$106.07 = 106.07$$



Section B

Ver Simmetria del NODO A  
DCL per NODO E

### THEIR EXAMPLE

[illegible]

511

| multiple imputation |   |       |       |       |       |       |       |       |   |       |     |      |   |       |   |
|---------------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|-------|-----|------|---|-------|---|
| 1                   | 0 | 1.427 | 0.28  | 1.118 | 0.559 | 0.359 | 0.28  | 0     | 0 | 0.568 | 0   | 1.11 | 0 | 1.677 | 0 |
| 2                   | 0 | 0.509 | 0.26  | 1.118 | 0.559 | 0.518 | 0.38  | 0     | 0 | 0.559 | 0   | 1.12 | 0 | 0.509 | 0 |
| 3                   | 0 | 0.509 | 0.28  | 1.220 | 0.519 | 0.589 | 0.28  | 0     | 0 | 0.559 | 0   | 1.12 | 0 | 0.509 | 0 |
| 4                   | 0 | 0.009 | 0.28  | 1.118 | 0.568 | 1.677 | 0.28  | 0     | 0 | 1.677 | 0   | 1.12 | 0 | 0.009 | 0 |
| 5                   | 0 | 0.5   | -0.75 | 1     | 0.5   | 1.5   | -0.25 | 0     | 0 | 1.5   | 0   | 1    | 0 | 0.5   | 0 |
| 6                   | 0 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0 | 0     | 0   | 0    | 0 | 0     | 0 |
| 7                   | 0 | 0.5   | -0.75 | 1     | 0.5   | 1.5   | -0.25 | 0     | 0 | 1.5   | 0   | 1    | 0 | 0.5   | 0 |
| 8                   | 0 | 0     | 0     | 0     | 0     | 1.118 | 0.559 | 0     | 0 | 1.118 | 0   | 0    | 0 | 0     | 0 |
| 9                   | 0 | 0.5   | -0.25 | 0     | 0     | 0.5   | 0.25  | 0     | 0 | 0.5   | 0   | 1    | 0 | 0.5   | 0 |
| 10                  | 0 | 1.118 | -0.50 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0 | 0     | 0   | 0    | 0 | 1.118 | 0 |
| 11                  | 0 | 0     | 1.5   | -0.75 | 1     | 0.5   | 0.5   | -0.75 | 0 | 0     | 0.5 | 1    | 0 | 1.5   | 0 |
| 12                  | 0 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0 | 0     | 0   | 0    | 0 | 0     | 0 |
| 13                  | 0 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0 | 0     | 0   | 1    | 0 | 0     | 0 |
| 14                  | 0 | 0     | 1.5   | -0.75 | 1     | 0.5   | 0.5   | -0.75 | 0 | 0     | 0   | 1    | 0 | 1.5   | 0 |
| 15                  | 0 | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0 | 1     | 0   | 1    | 0 | 1     | 0 |
| 16                  | 0 | 0.5   | -0.75 | 0.5   | 0.25  | 0.15  | 0.25  | 0     | 0 | 0.25  | 0   | 0.5  | 0 | 0.75  | 0 |

|     | Index       | RM, T-Test, Univariate |
|-----|-------------|------------------------|
| Age | 66.40074003 | 3002 20.9317232        |
| Sex | 50          | 81 238.386613          |
| Sm  | 30.11661781 | 133 318.300031         |
| Sm2 | 30.31661101 | 162 368.511731         |
| Cy  | 480         | 89 181.421156          |
| Cy2 | 8           | 438 8                  |
| Cy3 | 76.71661781 | 710 181.421156         |
| Cy4 | 76.71661781 | 133 318.300031         |
| Sp  | 86.86074003 | -67 -20.066817         |
| Sp2 | 88          | 133 318.300031         |
| Ep  | 0           | 544 276.931734         |
| Ep2 | 0           | 808 0                  |
| Cy5 | 0           | 556 412.2736           |
| Sm3 | 0           | 1 808.68-11            |
| Sp3 | 0           | 303 31.2131            |

## PLANTEO DE SISTEMA DE ECUACIONES

SEA:  $AB = X_1$ ,  $BC = X_2$ ,  $CD = X_3$ ,  $DE = X_4$ ,  $EF = X_5$ ,  $FD = X_6$ ,  
 $FG = X_7$ ,  $GD = X_8$ ,  $GC = X_9$ ,  $GB = X_{10}$ ,  $GH = X_{11}$ ,  $HB = X_{12}$ ,  
 $HA = X_{13}$ ,  $Rix = X_{14}$ ,  $Riy = X_{15}$  y  $Rdy = X_{16}$

$$\begin{aligned} -0.447X_1 + X_{15} - 86.6 &= 0 \quad (1) \\ -0.894X_1 + X_{13} - X_{14} + 50 &= 0 \quad (2) \\ 0.447X_1 - 0.447X_2 + 0.447X_{10} + X_{12} - 70.71 &= 0 \quad (3) \\ 0.894X_1 - 0.894X_2 - 0.894X_{10} + 70.71 &= 0 \quad (4) \\ 0.447X_2 + 0.447X_3 - X_9 - 100 &= 0 \quad (5) \\ 0.894X_2 - 0.894X_3 &= 0 \quad (6) \\ -0.447X_3 + 0.447X_4 + X_6 + 0.447X_8 - 70.71 &= 0 \quad (7) \\ 0.894X_3 - 0.894X_4 + 0.894X_8 - 70.71 &= 0 \quad (8) \\ -0.45X_4 + X_{16} - 86.60 &= 0 \quad (9) \\ 0.894X_4 - X_5 - 50 &= 0 \quad (10) \\ -X_6 &= 0 \quad (11) \\ -X_7 + X_5 &= 0 \quad (12) \quad (\text{Alargos}) \\ -0.45X_8 + X_9 - 0.45X_{10} &= 0 \quad (13) \\ X_7 + 0.894X_8 + 0.894X_{10} - X_{11} &= 0 \quad (14) \\ -X_{12} &= 0 \quad (15) \\ X_{11} - X_{13} &= 0 \quad (16) \end{aligned}$$

## EJEMPLO TRES

### CENTROIDES E INERCIA

Ahora se hace una selección de problemas sobre secciones de elementos a tensión o compresión. Los dos puntos macro a tratar son los centroides y la inercia. Es de dejar claro que de parte de la integración de área, que es el fundamento de centroides e inercias. Pero también se toca la integración de línea, de volumen y de masa. La matemática es en general la misma.



| Forma                      |  | $\bar{x}$                        | $\bar{y}$            | Area                |
|----------------------------|--|----------------------------------|----------------------|---------------------|
| Área triangular            |  |                                  | $\frac{h}{3}$        | $\frac{bh}{2}$      |
| Un cuarto de área circular |  | $\frac{4r}{3\pi}$                | $\frac{4r}{3\pi}$    | $\frac{\pi r^2}{4}$ |
| Área semicircular          |  | 0                                | $\frac{4r}{3\pi}$    | $\frac{\pi r^2}{2}$ |
| Cuarto de área elíptica    |  | $\frac{4a}{3\pi}$                | $\frac{4b}{3\pi}$    | $\frac{\pi ab}{4}$  |
| Área semielíptica          |  | 0                                | $\frac{4b}{3\pi}$    | $\frac{\pi ab}{2}$  |
| Área semiparabólica        |  | $\frac{3a}{8}$                   | $\frac{3h}{5}$       | $\frac{3ah}{3}$     |
| Área parabólica            |  | 0                                | $\frac{3h}{5}$       | $\frac{4ah}{3}$     |
| Enjuta parabólica          |  | $\frac{3a}{4}$                   | $\frac{3h}{10}$      | $\frac{ah}{3}$      |
| Enjuta general             |  | $\frac{n+1}{n+2} a$              | $\frac{n+1}{4n+2} h$ | $\frac{ah}{n+1}$    |
| Sección circular           |  | $\frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$ | 0                    | $\alpha r^2$        |

Fig. 5.8A Centroides de áreas de formas comunes.



## Ejemplo 9-3

Determine la distancia  $\bar{y}$  que existe al centroide del área del triángulo mostrado en la figura 9-11.

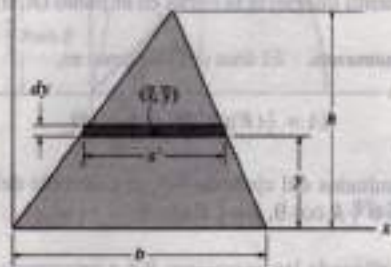


Fig. 9-11

## SOLUCION

**Elemento diferencial.** Considere un elemento rectangular que tiene un espesor  $dy$  y una longitud variable  $x'$ ; ver figura 9-11. Por triángulos semejantes,  $b/h = x'/(h - y)$  o  $x' = \frac{b}{h}(h - y)$ . El elemento intersecta los lados del triángulo a una altura  $y$  sobre el eje de las  $x$ .

**Área y brazo de momento.** El área del elemento es  $dA = x' dy = \frac{b}{h}(h - y) dy$ , y su centroide se ubica a una distancia  $\bar{y} = y$  del eje  $x$ .

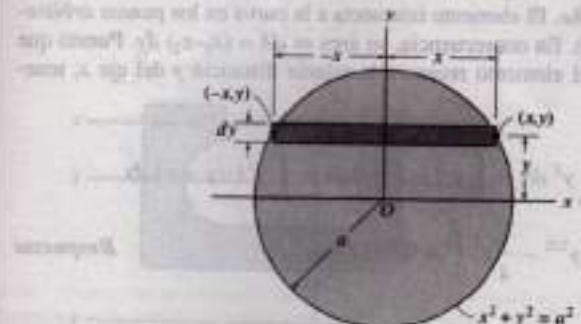
**Integraciones.** Aplicando la segunda de las ecuaciones 9-6, e integrando con respecto a  $y$ , obtenemos,

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{\int_A \bar{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^h y \frac{b}{h} (h - y) dy}{\int_0^h \frac{b}{h} (h - y) dy} = \frac{\frac{1}{2}bh^2}{\frac{1}{3}bh} \\ &= \frac{h}{3}\end{aligned}$$

Respuesta

**Ejemplo 10-3**

Determine el momento de inercia con respecto al eje  $x$  del área circular mostrada en la figura 10-7a.



(a)

**SOLUCION I (CASO 1)**

Utilizando el elemento diferencial que se muestra en la figura 10-7a, puesto que  $dA = 2x \, dy$ , tenemos,

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 \, dA = \int_A y^2 (2x) \, dy \\ &= \int_{-a}^a y^2 (2\sqrt{a^2 - y^2}) \, dy = \frac{\pi a^4}{4} \end{aligned}$$

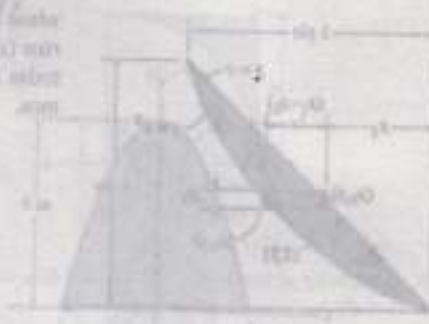
**Respuesta****SOLUCION II (CASO 2)**

Cuando se elige el elemento diferencial, como se muestra en la figura 10-7b, el centroide del elemento se localiza sobre el eje  $x$ , y por lo tanto, aplicando la ecuación 10-3, tomando en cuenta que  $d_y = 0$ , tenemos,

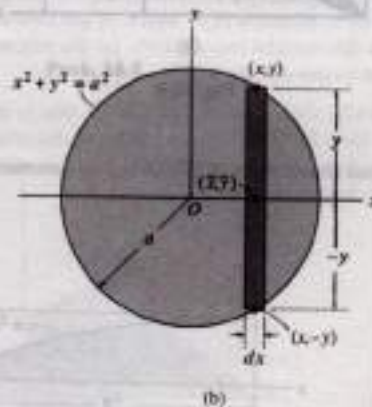
$$\begin{aligned} dI_x &= \frac{1}{12} dx (2y)^3 \\ &= \frac{2}{3} y^3 dx \end{aligned}$$

Integrando con respecto a  $x$ , obtenemos,

$$I_x = \int_{-a}^a \frac{2}{3} (a^2 - x^2)^{3/2} dx = \frac{\pi a^4}{4}$$

**Respuesta**

(b)

**Fig. 10-7**

## Ejemplo 10-1

Determine el momento de inercia del área rectangular mostrada en la figura 10-5 con respecto a (a) el eje centroidal  $x'$ , (b) el eje  $x_0$  que atraviesa la base del rectángulo, y (c) el polo, o eje  $z'$ , perpendicular al plano  $x'-y'$  que atraviesa el centroide  $C$ .

## SOLUCIÓN (CASO I)

**Parte (a).** Se escoge el elemento diferencial mostrado en la figura 10-5 para la integración. Debido a su ubicación y orientación, el elemento completo si se localiza a una distancia  $y'$  del eje  $x'$ . Aquí es necesario integrar desde  $y' = -h/2$  hasta  $y' = h/2$ . Puesto que  $dA = b \, dy'$ , entonces,

$$\begin{aligned} \bar{I}_{x'} &= \int_A y'^2 \, dA = \int_{-h/2}^{h/2} y'^2 (b \, dy') = b \int_{-h/2}^{h/2} y'^2 \, dy' \\ &= \frac{1}{12} bh^3 \end{aligned} \quad \text{Respuesta}$$

**Parte (b).** El momento de inercia con respecto al eje que atraviesa la base del rectángulo puede calcularse utilizando el resultado de la parte (a) y aplicando el teorema del eje paralelo; véase la ecuación 10-3.

$$\begin{aligned} I_{x_0} &= \bar{I}_{x'} + Ad^2 \\ &= \frac{1}{12} bh^3 + bh \left( \frac{h}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} bh^3 \end{aligned} \quad \text{Respuesta}$$

**Parte (c).** Para obtener el momento polar de inercia con respecto al punto  $C$ , primero debemos determinar  $\bar{I}_{y'}$ , que puede encontrarse intercambiando las dimensiones de  $b$  y  $h$  en el resultado de la parte (a), es decir,

$$\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12} hb^3$$

Utilizando la ecuación 10-2, el momento polar de inercia con respecto al  $C$  es, por lo tanto,

$$\bar{I}_C = \bar{I}_{x'} + \bar{I}_{y'} = \frac{1}{12} bh(h^2 + b^2) \quad \text{Respuesta}$$

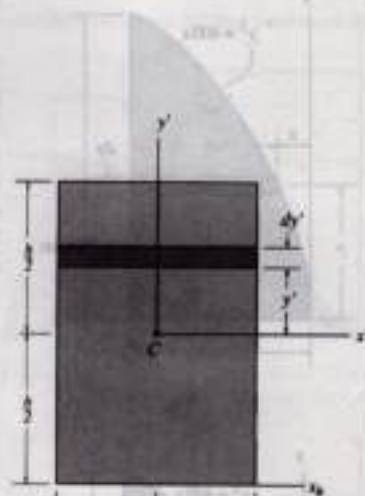


Fig. 10-5



Fig. 10-7

## Ejemplo 10-4

Determine el momento de inercia del área sombreada que se muestra en la figura 10-8a con respecto al eje  $x$ .

## SOLUCIÓN I (CASO 1)

Para integración se elige el elemento diferencial de área paralelo al eje  $x$ ; véase la figura 10-8a. El elemento intersecta a la curva en los puntos arbitrarios  $(x_2, y)$  y  $(x_1, y)$ . En consecuencia, su área es  $dA = (x_1 - x_2) dy$ . Puesto que todas las partes del elemento recaen a la misma distancia  $y$  del eje  $x$ , tenemos

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^1 y^2 (x_1 - x_2) dy = \int_0^1 y^2 (\sqrt{y} - y) dy$$

$$I_x = \frac{2}{7} y^{7/2} - \frac{1}{4} y^4 \bigg|_0^1 = 0.0357 \text{ pies}^4$$

**Respuesta**

## SOLUCIÓN II (CASO 2)

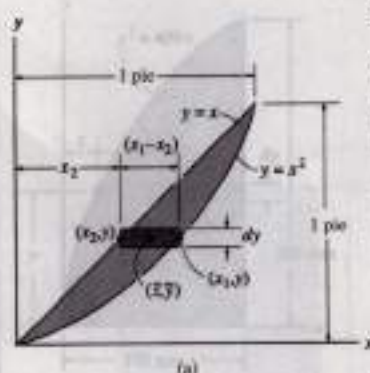
El elemento diferencial de área paralelo al eje  $y$  se muestra en la figura 10-8b. Este intersecta a las curvas en un punto arbitrario  $(x, y_2)$  y  $(x, y_1)$ . Puesto que no todas las partes recaen a la misma distancia del eje  $x$ , debemos primero utilizar el teorema del eje paralelo para determinar el momento de inercia del elemento con respecto al eje  $x$ , y después integrar el resultado para determinar  $I_x$ . Así,

$$dI_x = d\bar{I}_x + dA \bar{y}^2 = \frac{1}{12} dx (y_2 - y_1)^3 + (y_2 - y_1) dx \left( y_1 + \frac{y_2 - y_1}{2} \right)^2$$

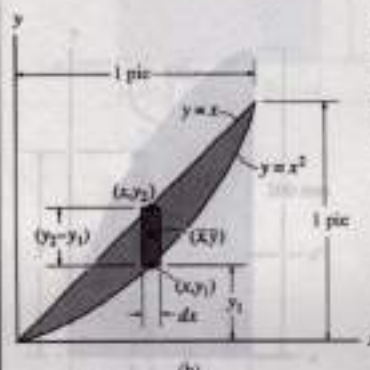
$$= \frac{1}{3} (y_2^3 - y_1^3) dx = \frac{1}{3} (x^3 - x^6) dx$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_0^1 (x^3 - x^6) dx = \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{21} x^7 \bigg|_0^1 = 0.0357 \text{ pies}^4 \quad \text{Respuesta}$$

Por comparación, observamos que la solución I requiere de mucho menos cálculos. Si se dificulta evaluar una integral utilizando un elemento particular, trate de resolver el problema, ahora con un elemento orientado en otra dirección.



(a)



(b)

Fig. 10-8



## Ejemplo 10-2

Determine el momento de inercia del área sombreada que se muestra en la figura 10-6a, con respecto al eje  $x$ .

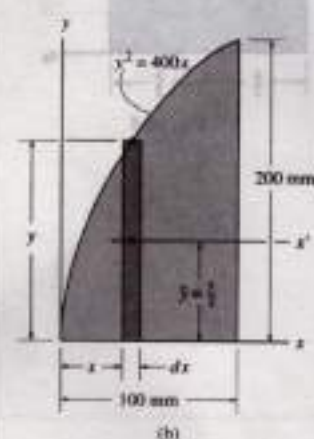
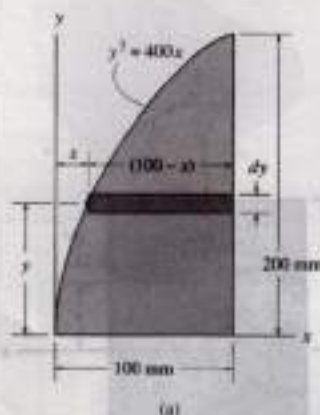


Fig. 10-6

## SOLUCIÓN I (CASO 1)

Un elemento diferencial de área *paralelo* al eje  $x$ , como se muestra en la figura 10-6a, es elegido para llevar a cabo una integración. Puesto que el elemento tiene un espesor  $dy$  e intersecta a la curva en el *punto arbitrario*  $(x, y)$ , el área es  $dA = (100 - x) dy$ . Además, todas las partes del elemento recaen a la misma distancia  $y$  del eje  $x$ . De aquí que, integrando con respecto a  $y$ , desde  $y = 0$  hasta  $y = 200$  mm, obtenemos,

$$\begin{aligned} I_x &= \int y^2 dA = \int y^2 (100 - x) dy \\ &= \int_0^{200} y^2 \left( 100 - \frac{y^2}{400} \right) dy = 100 \int_0^{200} y^2 dy - \frac{1}{400} \int_0^{200} y^4 dy \\ &= 107(10^6) \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Respuesta

## SOLUCIÓN II (CASO 2)

Un elemento diferencial *paralelo* al eje  $y$ , como se muestra en la figura 10-6b, se elige para la integración. Intersecta a la curva en el *punto arbitrario*  $(x, y)$ . En este caso, todas las partes del elemento *no* recaen a la misma distancia del eje  $x$ , y por lo tanto, debe utilizarse el teorema del eje paralelo para determinar el momento de inercia del elemento con respecto a este eje. Para un rectángulo que tiene una base  $b$  y una altura  $h$ , el momento de inercia con respecto a su eje centroidal ha sido determinado en la parte (a) del ejemplo 10-1, donde se observó que  $I_{\bar{x}} = \frac{1}{12} bh^3$ . Para el elemento diferencial mostrado en la figura 10-6b,  $b = dx$  y  $h = y$ , y así  $dI_{\bar{x}} = \frac{1}{12} dx y^3$ . Puesto que el centroide del elemento está en  $\bar{y} = y/2$  de distancia del eje  $x$ , el momento de inercia del elemento con respecto a este eje es,

$$dI_x = dI_{\bar{x}} + dA \bar{y}^2 = \frac{1}{12} dx y^3 + y dx \left( \frac{y}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} y^3 dx$$

[Este resultado puede también deducirse de la parte (b) del ejemplo 10-1.]

Integrando con respecto a  $x$ , desde  $x = 0$  hasta  $x = 100$  mm, obtenemos,

$$\begin{aligned} I_x &= \int dI_x = \int_0^{100} \frac{1}{3} y^3 dx = \int_0^{100} \frac{1}{3} (400x)^{3/2} dx \\ &= 107(10^6) \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Respuesta

**Ejemplo 9-6**

Localice el centroide  $\bar{x}$  del área sombreada por las dos curvas  $y = x$  y  $y = x^2$ ; ver figura 9-14.

**SOLUCION I**

**Elemento diferencial.** En la figura 9-14a se muestra un elemento diferencial de ancho  $dx$ . El elemento intersecta a las curvas en los puntos arbitrarios  $(x, y_1)$  y  $(x, y_2)$ , por lo que tiene una altura  $(y_2 - y_1)$ .

**Área y brazo de momento.** El área del elemento es  $dA = (y_2 - y_1) dx$  y su centroide se localiza en  $\bar{x} = x$ .

**Integraciones.** Aplicando la ecuación 9-6, tenemos

$$\bar{x} = \frac{\int_A \bar{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 x(y_2 - y_1) dx}{\int_0^1 (y_2 - y_1) dx} = \frac{\int_0^1 x(x - x^2) dx}{\int_0^1 (x - x^2) dx} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = 0.5 \text{ pies}$$

**Respuesta**

**SOLUCION II**

**Elemento diferencial.** En la figura 9-14b se muestra un elemento diferencial que tiene un espesor  $dy$ . El elemento intersecta las curvas en los puntos arbitrarios  $(x_2, y)$  y  $(x_1, y)$  por lo que tiene una longitud  $(x_1 - x_2)$ .

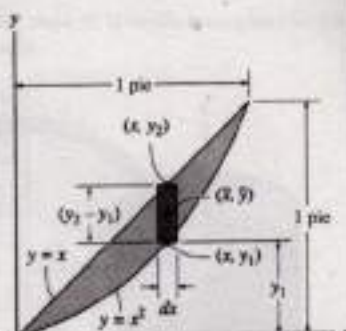
**Área y brazo de momento.** El área del elemento es  $dA = (x_1 - x_2) dy$ , y su centroide se localiza en

$$\bar{x} = x_2 + \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

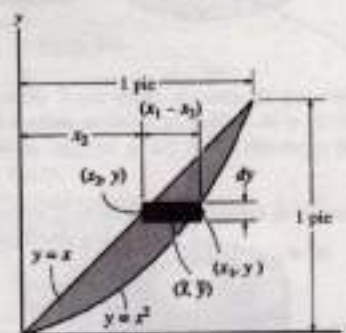
**Integraciones.** Aplicando la ecuación 9-6, tenemos

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int_A \bar{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 [(x_1 + x_2)/2](x_1 - x_2) dy}{\int_0^1 (x_1 - x_2) dy} = \frac{\int_0^1 [(\sqrt{y} + y)/2](\sqrt{y} - y) dy}{\int_0^1 (\sqrt{y} - y) dy} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 (y - y^2) dy}{\int_0^1 (\sqrt{y} - y) dy} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = 0.5 \text{ pies} \end{aligned}$$

**Respuesta**



(a)



(b)

Fig. 9-14



## Ejemplo 9-5

Ubique el centroide del área mostrada en la figura 9-13a.

## SOLUCION I

**Elemento diferencial.** Un elemento diferencial de ancho  $dx$  se muestra en la figura 9-13a. El elemento intersecta a la curva en un punto arbitrario  $(x, y)$ , y por lo tanto tiene una altura  $y$ .

**Área y brazos de momento.** El área del elemento es  $dA = y dx$  y su centroide se ubica en  $\bar{x} = x$ ,  $\bar{y} = y/2$ .

**Integraciones.** Aplicando las ecuaciones 9-6 e integrando con respecto a  $x$  obtenemos,

$$\bar{x} = \frac{\int_A \bar{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 xy dx}{\int_0^1 y dx} = \frac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{0.250}{0.333} = 0.75 \text{ m} \quad \text{Respuesta}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A \bar{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 (y/2)y dx}{\int_0^1 y dx} = \frac{\int_0^1 (x^2/2)x^2 dx}{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{0.100}{0.333} = 0.3 \text{ m} \quad \text{Respuesta}$$

## SOLUCION II

**Elemento diferencial.** El elemento diferencial o ancho  $dy$  se muestra en la figura 9-13b. El elemento intersecta la curva en un punto arbitrario  $(x, y)$ , por lo que tiene una longitud  $(1 - x)$ .

**Área y brazos de momento.** El área del elemento es  $dA = (1 - x) dy$ , y su centroide se localiza en,

$$\bar{x} = x + \left(\frac{1-x}{2}\right) = \frac{1+x}{2}, \quad \bar{y} = y$$

**Integraciones.** Aplicando las ecuaciones 9-6 e integrando con respecto a  $y$ , obtenemos,

$$\bar{x} = \frac{\int_A \bar{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 [(1+x)/2](1-x) dy}{\int_0^1 (1-x) dy} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 (1-y) dy}{\int_0^1 (1-\sqrt{y}) dy} = \frac{0.250}{0.333} = 0.75 \text{ m} \quad \text{Respuesta}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A \bar{y} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 y(1-x) dy}{\int_0^1 (1-x) dy} = \frac{\int_0^1 (y - y^3) dy}{\int_0^1 (1-\sqrt{y}) dy} = \frac{0.100}{0.333} = 0.3 \text{ m} \quad \text{Respuesta}$$

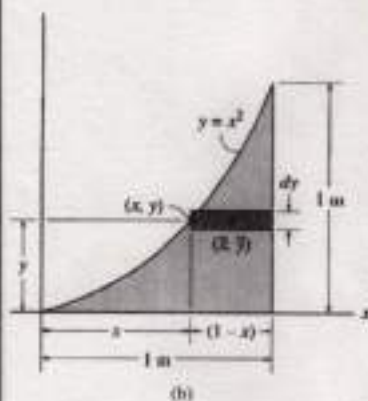
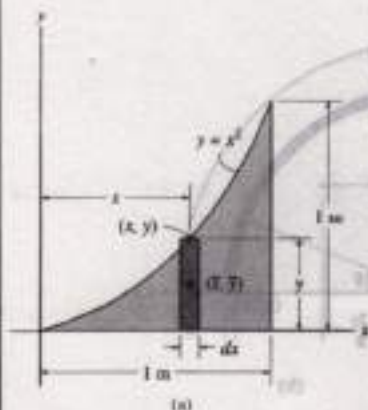
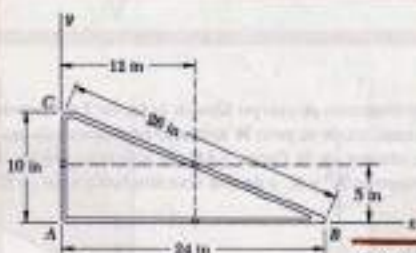


Fig. 9-13



### PROBLEMA RESUELTO 5.2

La figura mostrada se hizo con un alambre homogéneo delgado. Determínese su centro de gravedad.



**Solución.** Como la figura está formada por un alambre homogéneo, su centro de gravedad puede localizarse determinando el centroide de la línea correspondiente. Escogiendo los ejes coordenados que se muestran, con origen en A, determinamos las coordenadas del centroide de cada segmento de línea y calculamos sus primeros momentos con respecto a los ejes coordenados.

| Segmento | $L$ , in        | $\bar{x}$ , in | $\bar{y}$ , in | $\bar{x}L$ , in <sup>2</sup> | $\bar{y}L$ , in <sup>2</sup> |
|----------|-----------------|----------------|----------------|------------------------------|------------------------------|
| AB       | 24              | 12             | 0              | 288                          | 0                            |
| BC       | 26              | 12             | 5              | 312                          | 130                          |
| CA       | 10              | 0              | 5              | 0                            | 50                           |
|          | $\Sigma L = 60$ | ...            | ...            | $\Sigma \bar{x}L = 600$      | $\Sigma \bar{y}L = 180$      |

Sustituyendo los valores obtenidos de la tabla en las ecuaciones que definen el centroide de una línea compuesta, obtenemos

$$\begin{aligned}\bar{X}\Sigma L &= \Sigma \bar{x}L & \bar{X}(60 \text{ in.}) &= 600 \text{ in}^2 \\ \bar{Y}\Sigma L &= \Sigma \bar{y}L & \bar{Y}(60 \text{ in.}) &= 180 \text{ in}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{X} &= 10 \text{ in.} \quad \blacktriangleleft \\ \bar{Y} &= 3 \text{ in.} \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

## Ejemplo 9-1

Ubique el centroide de la varilla doblada en forma de un arco parabólico, mostrada en la figura 9-9.

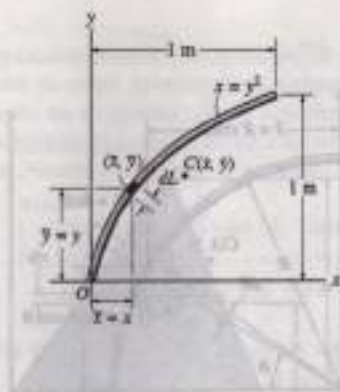


Fig. 9-9

## SOLUCION

**Elementos diferenciales.** El elemento diferencial se muestra en la figura 9-9. Está ubicado sobre la curva en el punto arbitrario  $(x, y)$ .

**Longitud y brazos de momento.** La longitud diferencial del elemento  $dL$  puede expresarse en términos de las diferenciales  $dx$  y  $dy$  utilizando el teorema de Pitágoras.

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy$$

Puesto que  $x = y^2$ , entonces  $dx/dy = 2y$ . Por lo tanto, expresando  $dL$  en términos de  $y$  y  $dy$ , tenemos,

$$dL = \sqrt{(2y)^2 + 1} dy$$

El centroide está ubicado en  $\bar{x} = x$ ,  $\bar{y} = y$ .

**Integraciones.** Al aplicar las ecuaciones 9-7 e integrar con respecto a  $y$  utilizando las fórmulas del apéndice A, tenemos,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int_0^1 \bar{x} dL}{\int_0^1 dL} = \frac{\int_0^1 x \sqrt{4y^2 + 1} dy}{\int_0^1 \sqrt{4y^2 + 1} dy} = \frac{\int_0^1 y^2 \sqrt{4y^2 + 1} dy}{\int_0^1 \sqrt{4y^2 + 1} dy} \\ &= \frac{0.746}{1.479} = 0.504 \text{ m} \end{aligned} \quad \text{Respuesta}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^1 \bar{y} dL}{\int_0^1 dL} = \frac{\int_0^1 y \sqrt{4y^2 + 1} dy}{\int_0^1 \sqrt{4y^2 + 1} dy} = \frac{0.848}{1.479} = 0.573 \text{ m} \quad \text{Respuesta}$$

## Ejemplo 9-2

Localice el centroide del segmento de alambre circular mostrado en la figura 9-10.

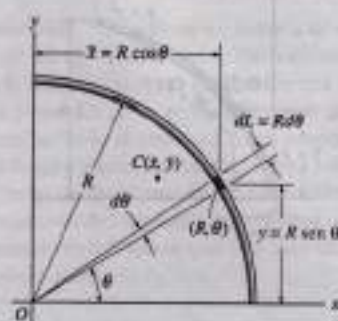


Fig. 9-10

## SOLUCION

Se utilizará coordenadas polares para resolver este problema puesto que el arco es circular.

**Elemento diferencial.** Se selecciona un arco circular diferencial como se muestra en la figura. Este elemento intersecta la curva en  $(R, \theta)$ .

**Longitud y brazo de momento.** La longitud diferencial del elemento es  $dL = R d\theta$ , y su centroide se localiza en  $\bar{x} = R \cos \theta$  y  $\bar{y} = R \sin \theta$ .

**Integraciones.** Aplicando las ecuaciones 9-7 e integrando con respecto a  $\theta$  tenemos,

$$\bar{x} = \frac{\int \bar{x} dL}{\int dL} = \frac{\int_0^{\pi/2} (R \cos \theta) R d\theta}{\int_0^{\pi/2} R d\theta} = \frac{R^2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta}{R \int_0^{\pi/2} d\theta} = \frac{2R}{\pi} \quad \text{Respuesta}$$

$$\bar{y} = \frac{\int \bar{y} dL}{\int dL} = \frac{\int_0^{\pi/2} (R \sin \theta) R d\theta}{\int_0^{\pi/2} R d\theta} = \frac{R^2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta}{R \int_0^{\pi/2} d\theta} = \frac{2R}{\pi} \quad \text{Respuesta}$$



**Ejemplo 9-9**

Ubique el centroide del alambre mostrado en la figura 9-17a.

**SOLUCIÓN**

**Partes compuestas.** El alambre está dividido en tres segmentos como se muestra en la figura 9-17b.

**Partes compuestas.** El cuerpo puede considerarse como el siguiente:

**Brazos de momento.** La ubicación del centroide de cada segmento se determina e indica en la figura. En particular, el centroide del segmento (1) se determina ya sea por integración o utilizando la tabla localizada en el interior de la cubierta posterior de este libro.

**Sumas.** Los cálculos se tabulan como sigue:

| Segmento     | $L$ (mm)          | $\bar{x}$ (mm) | $\bar{y}$ (mm) | $\bar{z}$ (mm) | $\bar{x}L$ (mm <sup>2</sup> ) | $\bar{y}L$ (mm <sup>2</sup> ) | $\bar{z}L$ (mm <sup>2</sup> ) |
|--------------|-------------------|----------------|----------------|----------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1            | $\pi(60) = 188.5$ | 60             | -38.2          | 0              | 11 310                        | -7200                         | 0                             |
| 2            | 40                | 0              | 20             | 0              | 0                             | 800                           | 0                             |
| 3            | 20                | 0              | 40             | -10            | 0                             | 800                           | -200                          |
| <b>Sumas</b> |                   |                |                |                | $\Sigma \bar{x}L = 11 310$    | $\Sigma \bar{y}L = -5600$     | $\Sigma \bar{z}L = -200$      |

Para que  $W = 1$  mm, la suma de las coordenadas  $\bar{x}, \bar{y}$  y  $\bar{z}$  es igual a  $\Sigma \bar{x}L = 11 310$ ,  $\Sigma \bar{y}L = -5600$  y  $\Sigma \bar{z}L = -200$ .

Esta puede utilizarse para los cálculos. También,  $1 \text{ Mg/m} = 10^{-3} \text{ kg/mm}$ .

**Así,**

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \bar{x}L}{\Sigma L} = \frac{11 310}{248.5} = 45.5 \text{ mm} \quad \text{Respuesta}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y}L}{\Sigma L} = \frac{-5600}{248.5} = -22.5 \text{ mm} \quad \text{Respuesta}$$

$$\bar{z} = \frac{\Sigma \bar{z}L}{\Sigma L} = \frac{-200}{248.5} = -0.805 \text{ mm} \quad \text{Respuesta}$$

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

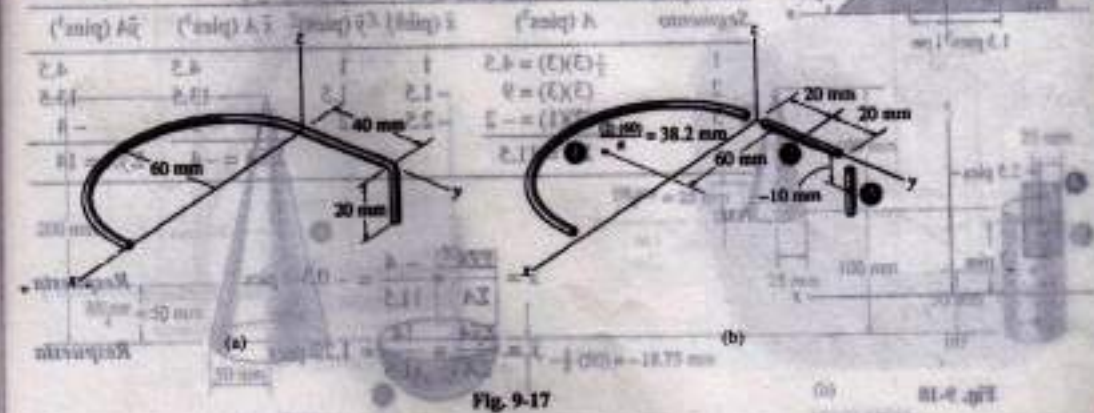
La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.

La ubicación del centroide del alambre está indicada en la figura 9-17c.


**Fig. 9-17**





### PROBLEMA RESUELTO 5.9

Una viga sostiene una carga distribuida como se advierte en la figura. Determinense a) la carga concentrada equivalente, b) las reacciones en los apoyos.



a. **Carga concentrada equivalente.** La magnitud de la resultante de la carga es igual al área bajo la curva de carga y la línea de acción de la resultante pasa a través del centroide de la misma área. Dividimos el área bajo la curva de carga en dos triángulos y construimos la tabla siguiente. Para simplificar los cálculos y la tabulación, las cargas dadas por unidad de longitud se han convertido en kN/m.

| Componente   | $A_i$ , kN | $x_i$ , m | $x_i A_i$ , kN·m      |
|--------------|------------|-----------|-----------------------|
| Triángulo I  | 4.5        | 2         | 9                     |
| Triángulo II | 13.5       | 4         | 54                    |
| $\Sigma A$   | 18.0       | ...       | $\Sigma x_i A_i = 63$ |



$$\text{Entonces, } \bar{x} \Sigma A = \Sigma x_i A_i: \quad \bar{x}(18 \text{ kN}) = 63 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \bar{x} = 3.5 \text{ m}$$

La carga concentrada equivalente es

$$W = 18 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

y su línea de acción se localiza a la distancia

$$\bar{x} = 3.5 \text{ m hacia la derecha de A} \quad \blacktriangleleft$$

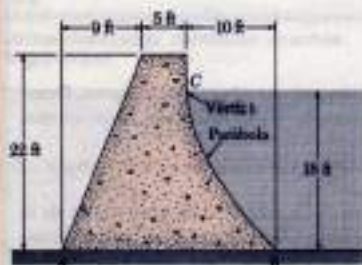


b. **Reacciones.** La reacción en A es vertical y se denota por A; la reacción en B se representa por sus componentes  $B_x$  y  $B_y$ . La carga original puede considerarse como la suma de dos cargas triangulares como las mostradas. La resultante de cada carga triangular es igual al área del triángulo y actúa en su centroide. Escribimos las ecuaciones de equilibrio siguientes para el cuerpo libre mostrado.

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0: & B_x &= 0 \quad \blacktriangleleft \\ +\uparrow \Sigma M_A &= 0: & -(4.5 \text{ kN})(2 \text{ m}) - (13.5 \text{ kN})(4 \text{ m}) + B_y(6 \text{ m}) &= 0 \\ & & B_y &= 10.5 \text{ kN} \uparrow \quad \blacktriangleleft \\ +\circlearrowleft \Sigma M_B &= 0: & +(4.5 \text{ kN})(4 \text{ m}) + (13.5 \text{ kN})(2 \text{ m}) - A(6 \text{ m}) &= 0 \\ & & A &= 7.5 \text{ kN} \uparrow \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

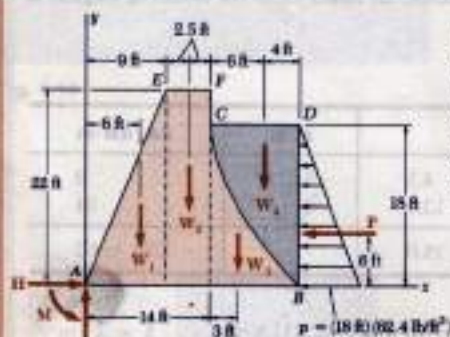
**Solución opcional.** La carga distribuida puede sustituirse por su resultante, que se encontró en la parte a. Las reacciones se pueden determinar escribiendo las ecuaciones de equilibrio  $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma M_A = 0$ , y  $\Sigma M_B = 0$ . Y obtenemos nuevamente

$$B_x = 0 \quad B_y = 10.5 \text{ kN} \uparrow \quad A = 7.5 \text{ kN} \uparrow \quad \blacktriangleleft$$



### PROBLEMA RESUELTO 5.10

La sección transversal de una presa de concreto es como se muestra en la figura. Considérese una sección de la presa de 1 ft de ancho y determinense a) la resultante de las fuerzas de reacción ejercidas por el suelo sobre la base de la presa  $AB$ , b) la resultante de las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre la cara  $BC$  de la presa. El peso específico del concreto =  $150 \text{ lb/ft}^3$  y del agua =  $62.4 \text{ lb/ft}^3$ .



a. **Reacción del suelo.** Escogemos como cuerpo libre una sección  $AEFCD$  de la presa y el agua de 1 ft de ancho como se indica en la figura. Las fuerzas de reacción ejercidas por el suelo sobre la base  $AB$  se representa por un sistema fuerza par equivalente en  $A$ . Las otras fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son el peso de la presa, representado por los pesos de sus componentes  $W_1$ ,  $W_2$  y  $W_3$ , el peso del agua  $W_4$  y la resultante  $P$  de las fuerzas de presión ejercidas sobre la sección  $BD$  por el agua a la derecha de la sección  $BD$ . Tenemos

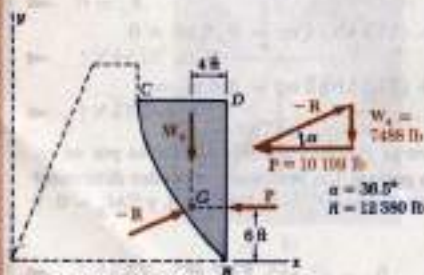
$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2}(9 \text{ ft})(22 \text{ ft})(1 \text{ ft})(150 \text{ lb/ft}^3) = 14\,850 \text{ lb} \\ W_2 &= (5 \text{ ft})(22 \text{ ft})(1 \text{ ft})(150 \text{ lb/ft}^3) = 16\,500 \text{ lb} \\ W_3 &= \frac{1}{2}(10 \text{ ft})(18 \text{ ft})(1 \text{ ft})(150 \text{ lb/ft}^3) = 9000 \text{ lb} \\ W_4 &= \frac{1}{2}(10 \text{ ft})(18 \text{ ft})(1 \text{ ft})(62.4 \text{ lb/ft}^3) = 7488 \text{ lb} \\ P &= \frac{1}{2}(18 \text{ ft})(1 \text{ ft})(18 \text{ ft})(62.4 \text{ lb/ft}^3) = 10\,109 \text{ lb} \end{aligned}$$

**Ecuaciones de equilibrio**

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x &= 0: & H - 10\,109 \text{ lb} &= 0 & H &= 10\,110 \text{ lb} \rightarrow \\ + \uparrow \Sigma F_y &= 0: & V - 14\,850 \text{ lb} - 16\,500 \text{ lb} - 9000 \text{ lb} - 7488 \text{ lb} &= 0 & V &= 47\,840 \text{ lb} \uparrow \\ + \uparrow \Sigma M_A &= 0: & -(14\,850 \text{ lb})(6 \text{ ft}) - (16\,500 \text{ lb})(11.5 \text{ ft}) & & & \\ & & - (9000 \text{ lb})(17 \text{ ft}) - (7488 \text{ lb})(20 \text{ ft}) + (10\,109 \text{ lb})(6 \text{ ft}) + M &= 0 & M &= 520\,960 \text{ lb} \cdot \text{ft} \end{aligned}$$

Podemos sustituir el sistema fuerza par obtenido, por una sola fuerza actuando a una distancia  $d$  a la derecha de  $A$ , donde

$$d = \frac{520\,960 \text{ lb} \cdot \text{ft}}{47\,840 \text{ lb}} = 10.89 \text{ ft}$$



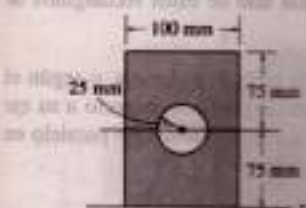
b. **Resultante  $R$  de las fuerzas del agua.** La sección parabólica del agua  $BCD$  se escoge como el cuerpo libre. Las fuerzas que intervienen son la resultante  $-R$  de las que la presa ejerce sobre el agua, el peso  $W_4$  y la fuerza  $P$ . Como estas fuerzas deben ser concurrentes,  $-R$  pasa a través del punto de intersección  $G$  de  $W_4$  y  $P$ . Se traza un triángulo de fuerzas para determinar la magnitud y dirección de  $-R$ . La resultante  $R$  de las fuerzas ejercidas por el agua sobre la cara  $BC$  es igual y opuesta.

$$R = 12\,580 \text{ lb } 27.36.5^\circ \rightarrow$$



# Ejemplo 10-5

Calcule el momento de inercia del área compuesta que se muestra en la figura 10-9a con respecto al eje  $x$ .



(a)



(b)

Fig. 10-9

## SOLUCION

**Partes componentes.** El área compuesta se obtiene restando el círculo del rectángulo como se muestra en la figura 10-9b. El centroide de cada área se localiza en la figura.

**Teorema del eje paralelo.** Los momentos de inercia con respecto al eje  $x$  se determinan por el teorema del eje paralelo y los datos se encuentran en la tabla del interior de la cubierta posterior del libro.

### Círculo

$$\begin{aligned}
 I_x &= \bar{I}_x + Ad_x^2 \\
 &= \frac{1}{4} \pi (25)^4 + \pi (25)^2 (75)^2 = 11.4(10^6) \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

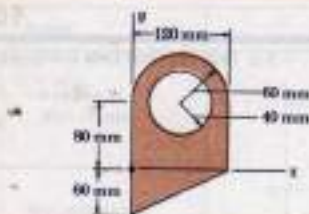
### Rectángulo

$$\begin{aligned}
 I_x &= \bar{I}_x + Ad_x^2 \\
 &= \frac{1}{12} (100)(150)^3 + (100)(150)(75)^2 = 112.5(10^6) \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

**Suma.** El momento de inercia del área compuesta es por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 I_x &= -11.4(10^6) + 112.5(10^6) \\
 &= 101(10^6) \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

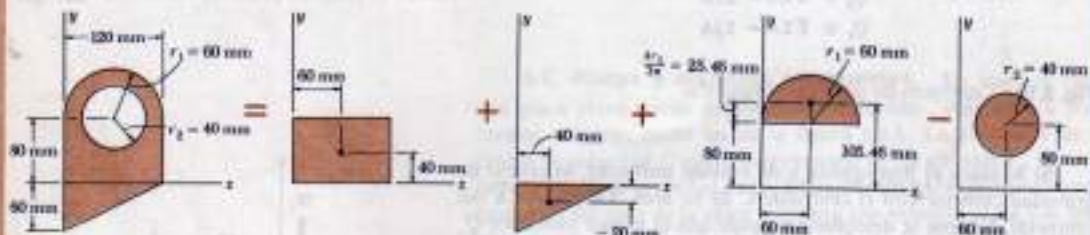
**Respuesta**



### PROBLEMA RESUELTO 5.1

Para el área plana mostrada, determinense a) los primeros momentos con respecto a los ejes  $x$  y  $y$ , b) la localización del centroide.

**Solución.** El área se obtiene sumando un rectángulo, un triángulo y un semicírculo y restando un círculo. Usando los ejes coordenados que se indican, se determinan el área y las coordenadas del centroide de cada una de las áreas componentes y se anotan en la tabla que viene a continuación. El área del círculo se indica como negativa ya que debe restarse a las otras. Observamos que las coordenadas  $\bar{y}$  del centroide del triángulo es negativa para los ejes mostrados. Los primeros momentos de las áreas componentes con respecto a los ejes coordenados se calculan y se introducen en la tabla.



| Componente  | $A, \text{mm}^2$                           | $x, \text{mm}$ | $y, \text{mm}$ | $x\bar{A}, \text{mm}^3$                | $y\bar{A}, \text{mm}^3$                |
|-------------|--------------------------------------------|----------------|----------------|----------------------------------------|----------------------------------------|
| Rectángulo  | $(120)(80) = 9.6 \times 10^3$              | 60             | 40             | $+576 \times 10^3$                     | $+384 \times 10^3$                     |
| Triángulo   | $\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$   | 40             | -20            | $+144 \times 10^3$                     | $-72 \times 10^3$                      |
| Semicírculo | $\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$ | 60             | 105.46         | $+339.3 \times 10^3$                   | $+596.4 \times 10^3$                   |
| Círculo     | $-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$          | 60             | 80             | $-301.6 \times 10^3$                   | $-402.2 \times 10^3$                   |
|             | $\Sigma A = 13.828 \times 10^3$            |                |                | $\Sigma x\bar{A} = +757.7 \times 10^3$ | $\Sigma y\bar{A} = +506.2 \times 10^3$ |

a. **Primeros momentos del área.** Usando las ecuaciones (5.8), escribimos

$$Q_y = \Sigma y\bar{A} = 506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$Q_y = 506 \times 10^3 \text{ mm}^3 \quad \blacktriangleleft$$

$$Q_x = \Sigma x\bar{A} = 757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$Q_x = 758 \times 10^3 \text{ mm}^3 \quad \blacktriangleleft$$

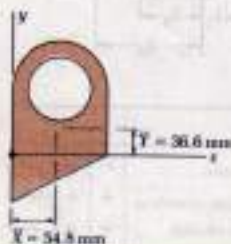
b. **Localización del centroide.** Sustituyendo los valores obtenidos de la tabla en las ecuaciones que definen el centroide de un área compuesta, obtenemos

$$\bar{x} \Sigma A = \Sigma x\bar{A}: \quad \bar{x}(13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\bar{x} = 54.8 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

$$\bar{y} \Sigma A = \Sigma y\bar{A}: \quad \bar{y}(13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\bar{y} = 36.6 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$



# Centro de gravedad y momento de inercia de masa de sólidos homogéneos



Esfera  
 $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{83}{320} m r^2$



Hemisferio  
 $I_{xx} = I_{yy} = 0.254 m r^2$   $I_{zz} = \frac{83}{320} m r^2$



Disco circular delgado  
 $I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} m r^2$   $I_{zz} = \frac{1}{2} m r^2$   $I_{zz'} = \frac{3}{4} m r^2$



Anillo delgado  
 $I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} m r^2$   $I_{zz} = 0$



Cilindro  
 $I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12} m (3r^2 + h^2)$   $I_{zz} = m r^2$



Cono  
 $I_{xx} = I_{yy} = \frac{3}{80} m (r^2 + h^2)$   $I_{zz} = \frac{3}{80} m r^2$



Placa delgada  
 $I_{xx} = \frac{1}{12} m b^2$   $I_{yy} = \frac{1}{12} m a^2$   $I_{zz} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$



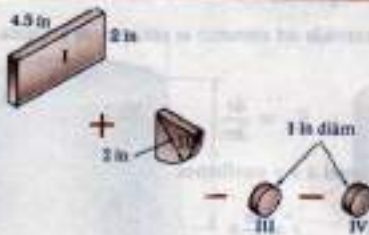
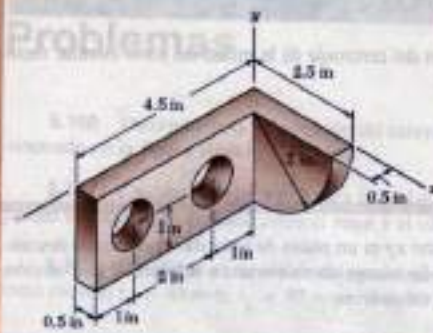
Varilla delgada  
 $I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12} m a^2$   $I_{zz'} = I_{yy'} = \frac{1}{3} m a^2$   $I_{zz} = 0$



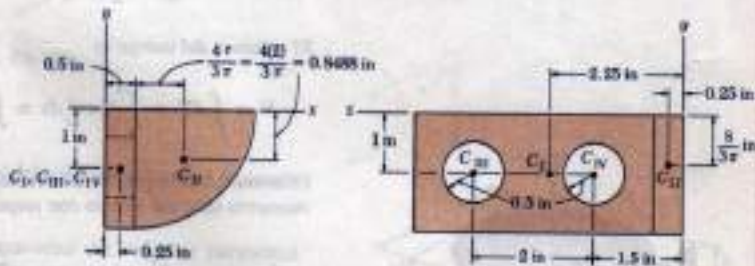
# Problemas

## PROBLEMA RESUELTO 5.12

Localícese el centro de gravedad del elemento de acero de una máquina. Ambos agujeros son de 1 in de diámetro como se muestra.



**Solución.** El elemento de máquina consiste de un paralelepípedo rectangular (I), un cuarto de cilindro (II), menos dos cilindros de 1 in de diámetro (III y IV). Se calculan el volumen y las coordenadas del centroide de cada componente y se ponen en la tabla siguiente. Con los datos acumulados en la tabla podemos determinar el volumen total y los momentos del volumen con respecto a cada uno de los planos coordenados.



|     | $V, \text{ in}^3$                    | $x, \text{ in}$ | $y, \text{ in}$ | $z, \text{ in}$ | $xV, \text{ in}^4$  | $yV, \text{ in}^4$   | $zV, \text{ in}^4$  |
|-----|--------------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|---------------------|----------------------|---------------------|
| I   | $(4.5)(2)(0.5) = 4.5$                | 0.25            | -1              | 2.25            | 1.125               | -4.5                 | 10.125              |
| II  | $\frac{1}{4}\pi(0.5)^2(0.5) = 1.571$ | 1.3488          | -0.8488         | 0.25            | 2.119               | -1.333               | 0.393               |
| III | $-\pi(0.5)^2(0.5) = -0.3927$         | 0.25            | -1              | 3.5             | -0.098              | 0.393                | -1.374              |
| IV  | $-\pi(0.5)^2(0.5) = -0.3927$         | 0.25            | -1              | 1.5             | -0.098              | 0.393                | -0.589              |
|     | $\Sigma V = 5.286$                   |                 |                 |                 | $\Sigma xV = 3.048$ | $\Sigma yV = -5.047$ | $\Sigma zV = 8.555$ |

Entonces,

$$\begin{aligned}\bar{X} \Sigma V &= \Sigma xV: & \bar{X}(5.286 \text{ in}^3) &= 3.048 \text{ in}^4 \\ \bar{Y} \Sigma V &= \Sigma yV: & \bar{Y}(5.286 \text{ in}^3) &= -5.047 \text{ in}^4 \\ \bar{Z} \Sigma V &= \Sigma zV: & \bar{Z}(5.286 \text{ in}^3) &= 8.555 \text{ in}^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{X} &= 0.577 \text{ in} \quad \blacktriangleleft \\ \bar{Y} &= -0.955 \text{ in} \quad \blacktriangleleft \\ \bar{Z} &= 1.618 \text{ in} \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

## Ejemplo 9-11

Ubique el centro de masa del cuerpo compuesto mostrado en la figura 9-19a. La parte inferior cónica tiene una densidad de  $\rho_c = 8 \text{ Mg/m}^3$ , y el hemisferio tiene una densidad de  $\rho_h = 4 \text{ Mg/m}^3$ .

## SOLUCION

**Partes compuestas.** El cuerpo puede considerarse como si estuviera compuesto por cuatro segmentos, como se muestra en la figura 9-19b. Para los cálculos, ③ y ④ se deben considerar como volúmenes "negativos" con la finalidad de que los cuatro segmentos, al sumarse, nos den la forma del cuerpo en su totalidad, como se muestra en la figura 9-19a.

**Brazo de momento.** Utilizando la tabla ya mencionada, los cálculos para el centroide  $\bar{z}$  de cada parte se muestra en la figura.

**Sumas.** Debido a la simetría, observe que,

$$\bar{x} = \bar{y} = 0$$

## Respuesta

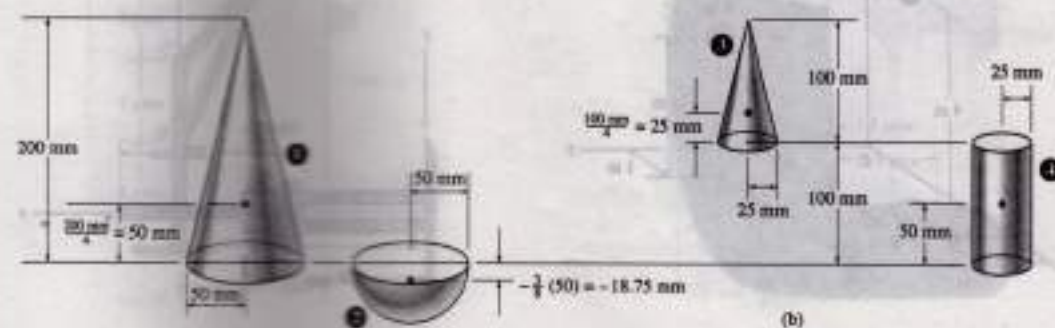
Puesto que  $W = mg$  y  $g$  es constante, la tercera de las ecuaciones 9-8 se convierte en  $\bar{z} = \Sigma \bar{z}m / \Sigma m$ . La masa de cada parte se puede calcular de  $m = \rho V$  y ésta puede utilizarse para los cálculos. También,  $1 \text{ Mg/m}^3 = 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$ , para que,

| Segmento           | $m \text{ (kg)}$                                  | $\bar{z} \text{ (mm)}$ | $\bar{z}m \text{ (kg} \cdot \text{mm)}$ |
|--------------------|---------------------------------------------------|------------------------|-----------------------------------------|
| 1                  | $8(10^{-6})(\frac{1}{3})\pi(50)^2(200) = 4.189$   | 50                     | 209.440                                 |
| 2                  | $4(10^{-6})(\frac{1}{2})\pi(50)^3 = 1.047$        | -18.75                 | -19.635                                 |
| 3                  | $-8(10^{-6})(\frac{1}{3})\pi(25)^2(100) = -0.524$ | $100 + 25 = 125$       | -65.450                                 |
| 4                  | $-8(10^{-6})\pi(25)^2(100) = -1.571$              | 50                     | -78.540                                 |
| $\Sigma m = 3.141$ |                                                   |                        | $\Sigma \bar{z}m = 45.815$              |

Así,

$$\bar{z} = \frac{\Sigma \bar{z}m}{\Sigma m} = \frac{45.815}{3.141} = 14.6 \text{ mm}$$

## Respuesta



## Ejemplo 9-7

Localice el centroide  $\bar{y}$  del paraboloide de revolución, generado al girar el área sombreada mostrada en la figura 9-15a con respecto al eje  $y$ .

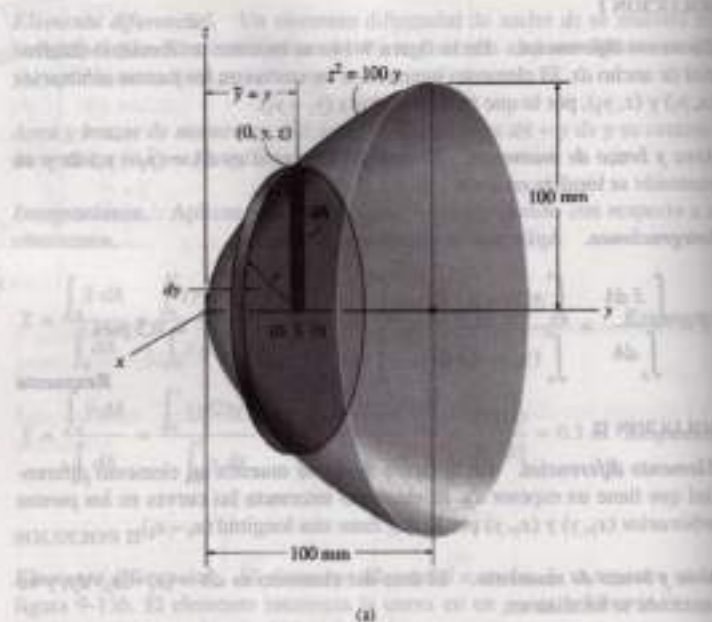


Fig. 9-15

## SOLUCIÓN 1

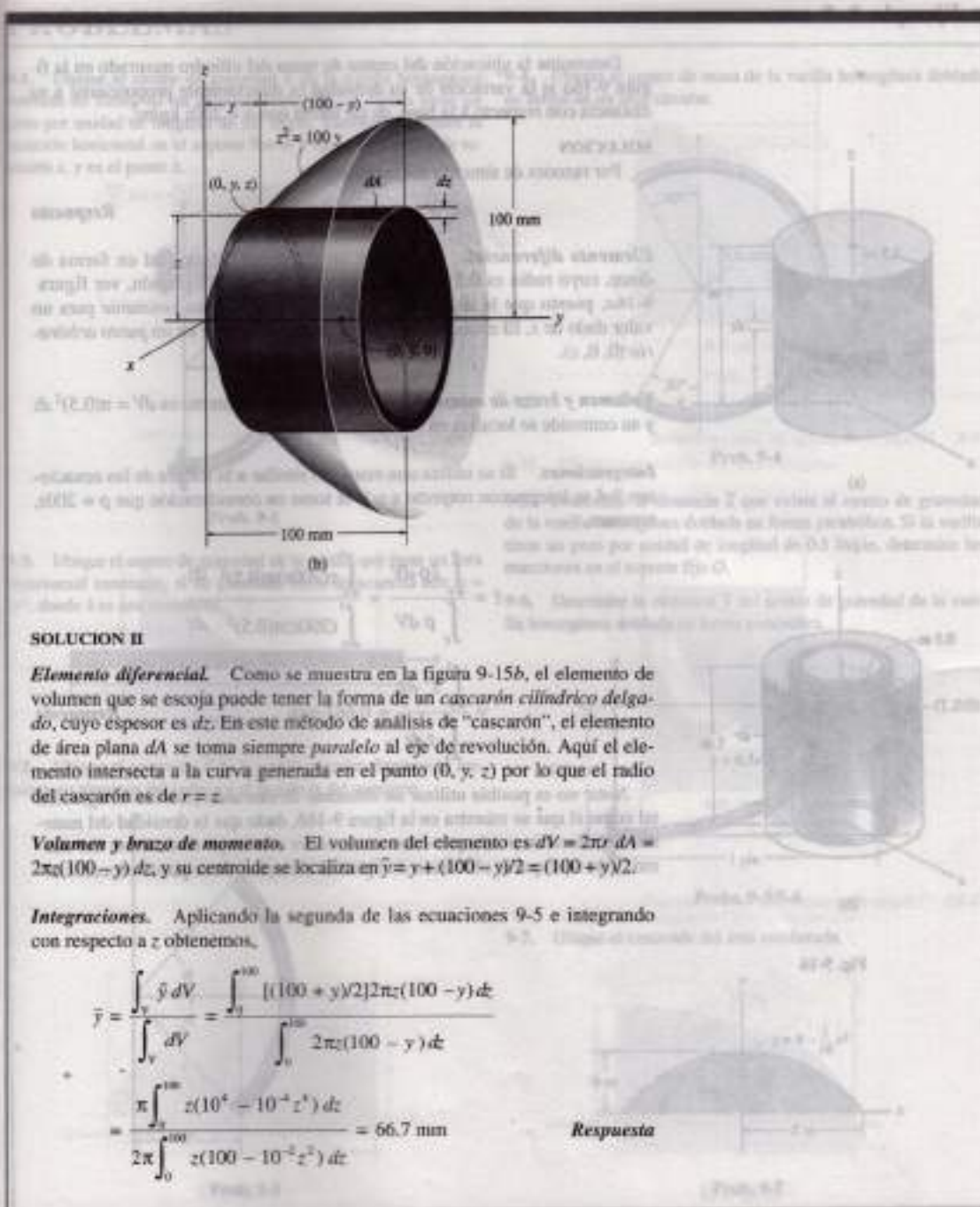
**Elemento diferencial.** Se selecciona un elemento con forma de un disco delgado; figura 9-15a, y un espesor  $dy$ . En este método de análisis de “disco”, el elemento planar de área  $dA$  se toma siempre perpendicular al eje de revolución. Aquí el elemento intersecta a la curva generada en un punto arbitrario  $(0, y, z)$  por lo que su radio es  $r = z$ .

**Volumen y brazo de momento.** El volumen del elemento es  $dV = (\pi z^2) dy$  y su centroide se localiza en  $\bar{y} = y$ .

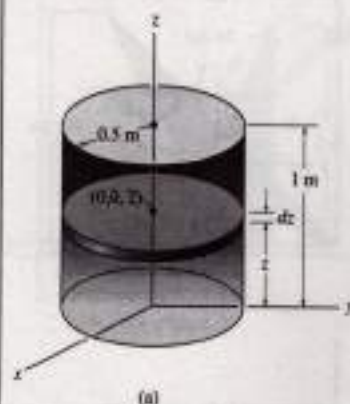
**Integraciones.** Aplicando la segunda de las ecuaciones 9-5 e integrando con respecto a  $y$  obtenemos,

$$\bar{y} = \frac{\int_V \bar{y} dV}{\int_V dV} = \frac{\int_0^{100} y(\pi z^2) dy}{\int_0^{100} (\pi z^2) dy} = \frac{100\pi \int_0^{100} y^2 dy}{100\pi \int_0^{100} y dy} = 66.7 \text{ mm} \quad \text{Respuesta}$$

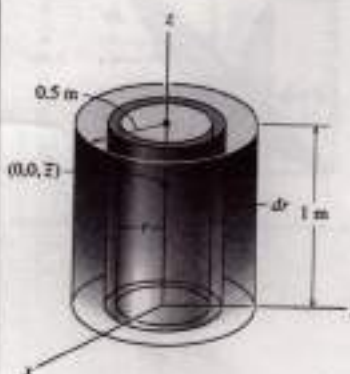




## Ejemplo 9-8



(a)



(b)

Fig. 9-16

Determine la ubicación del centro de masa del cilindro mostrado en la figura 9-16a si la variación de su densidad es directamente proporcional a su distancia con respecto a la base, de tal forma que  $\rho = 200z$  kg/m<sup>3</sup>.

## SOLUCION

Por razones de simetría del material,

$$\bar{x} = \bar{y} = 0$$

**Respuesta**

**Elemento diferencial.** Se escoge un elemento diferencial en forma de disco, cuyo radio es 0.5 m y su espesor  $dz$ , para la integración, ver figura 9-16a, puesto que la densidad del elemento completo es constante para un valor dado de  $z$ . El elemento se ubica a lo largo del eje  $z$  en un punto arbitrario  $(0, 0, z)$ .

**Volumen y brazo de momento.** El volumen del elemento es  $dV = \pi(0.5)^2 dz$  y su centroide se localiza en  $\bar{z} = z$ .

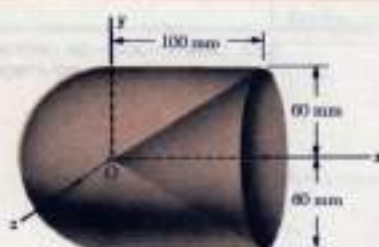
**Integraciones.** Si se utiliza una ecuación similar a la tercera de las ecuaciones 9-4 se integra con respecto a  $z$ , y se toma en consideración que  $\rho = 200z$ , tenemos,

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{\int_V \bar{z} \rho dV}{\int_V \rho dV} = \frac{\int_0^1 z(200z)\pi(0.5)^2 dz}{\int_0^1 (200z)\pi(0.5)^2 dz} \\ &= \frac{\int_0^1 z^2 dz}{\int_0^1 z dz} = 0.667 \text{ pies}\end{aligned}$$

**Respuesta**

**Nota:** no es posible utilizar un elemento de cascarón para una integración tal como el que se muestra en la figura 9-16b, dado que la densidad del material del cascarón puede presentar variaciones a lo largo de la altura del mismo; y de aquí que la ubicación de  $\bar{z}$  para el elemento no se puede especificar.

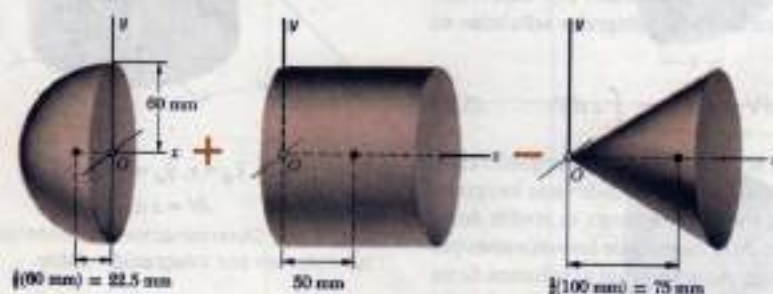




### PROBLEMA RESUELTO 5.11

Determinese el centro de gravedad del cuerpo de revolución homogéneo mostrado en la figura.

**Solución.** Por simetría, el centro de gravedad se encuentra en el eje  $x$ . El cuerpo se compone de una semiesfera y un cilindro, menos un cono, en la forma indicada. El volumen y la abscisa del centroide de cada una de estas componentes se obtienen de la figura 5.21 y se introducen en la tabla que se presenta a continuación. A partir de ésta se obtiene el volumen total del cuerpo y el primer momento con respecto al plano  $yz$ .



| Componente | Volumen, $\text{mm}^3$                                  | $\bar{x}$ , mm | $\bar{x}V$ , $\text{mm}^4$             |
|------------|---------------------------------------------------------|----------------|----------------------------------------|
| Semiesfera | $\frac{1}{2} \frac{4\pi}{3} (60)^3 = 0.452 \times 10^6$ | -22.5          | $-10.17 \times 10^6$                   |
| Cilindro   | $\pi (60)^2 (100) = 1.131 \times 10^6$                  | +50            | $+56.55 \times 10^6$                   |
| Cono       | $-\frac{\pi}{3} (60)^2 (100) = -0.377 \times 10^6$      | +75            | $-28.28 \times 10^6$                   |
|            | $\Sigma V = 1.206 \times 10^6$                          | ...            | $\Sigma \bar{x}V = +18.10 \times 10^6$ |

Así que,

$$\bar{X} \Sigma V = \Sigma \bar{x}V; \quad \bar{X}(1.206 \times 10^6 \text{ mm}^3) = 18.10 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\bar{X} = 15 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

# Ejemplo 10-6

Determine los momentos de inercia del área transversal de la viga, mostrada en la figura 10-10a, con respecto a los ejes centroidales  $x$  y  $y$ .

## SOLUCION

**Partes compuestas.** La sección transversal puede considerarse como las tres áreas rectangulares compuestas  $A$ ,  $B$  y  $D$  que se muestran en la figura 10-10b. Para los cálculos, el centroide de cada uno de estos rectángulos se ubica en la figura.

**Teorema del eje paralelo.** De acuerdo con la tabla mencionada, o según el ejemplo 10-1, el momento de inercia de un rectángulo con respecto a su eje centroidal es  $\bar{I} = \frac{1}{12}bh^3$ . De aquí que, utilizando el teorema del eje paralelo en los rectángulos  $A$  y  $D$ , los cálculos sean los siguientes:

**Rectángulo A**

$$I_x = \bar{I}_x + Ad_x^2 = \frac{1}{12} (100)(300)^3 + (100)(300)(200)^2 \\ = 1.425(10^9) \text{ mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_y + Ad_y^2 = \frac{1}{12} (300)(100)^3 + (100)(300)(250)^2 \\ = 1.90(10^9) \text{ mm}^4$$

**Rectángulo B**

$$I_x = \frac{1}{12} (600)(100)^3 = 0.05(10^9) \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} (100)(600)^3 = 1.80(10^9) \text{ mm}^4$$

**Rectángulo D**

$$I_x = \bar{I}_x + Ad_x^2 = \frac{1}{12} (100)(300)^3 + (100)(300)(200)^2 \\ = 1.425(10^9) \text{ mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_y + Ad_y^2 = \frac{1}{12} (300)(100)^3 + (100)(300)(250)^2 \\ = 1.90(10^9) \text{ mm}^4$$

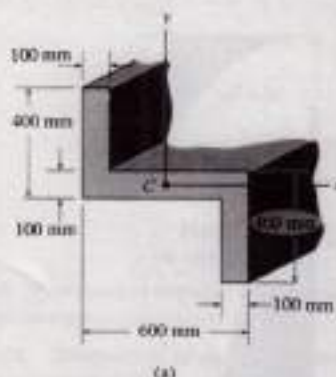
**Suma.** Entonces, los momentos de inercia de la sección transversal total son,

$$I_x = 1.425(10^9) + 0.05(10^9) + 1.425(10^9) \\ = 2.90(10^9) \text{ mm}^4$$

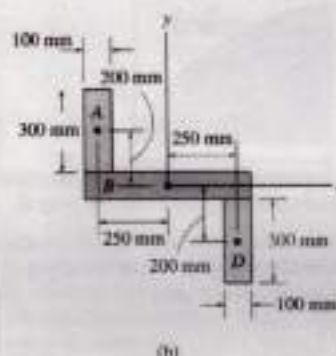
**Respuesta**

$$I_y = 1.90(10^9) + 1.80(10^9) + 1.90(10^9) \\ = 5.60(10^9) \text{ mm}^4$$

**Respuesta**



(a)



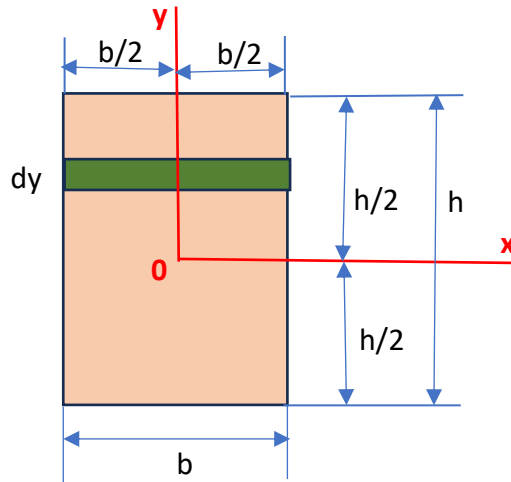
(b)

Fig. 10-10

## CENTROIDES

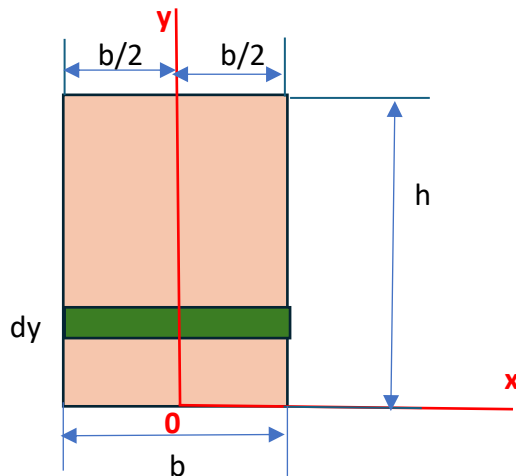
### EJEMPLO 1

Calcular el centroide en Y, del rectángulo que se muestra a continuación:



$$\begin{aligned}\bar{I}_x &= \int_A y^2 dA, \quad dA = b dy = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{by^3}{3} \bigg|_{-h/2}^{h/2} \\ &= \frac{b}{3} \left( \frac{h}{2} \right)^3 - \frac{b}{3} \left( -\frac{h}{2} \right)^3 = \frac{bh^3}{24} + \frac{bh^3}{24} = \frac{2bh^3}{24} = \frac{bh^3}{12}\end{aligned}$$

Ahora respecto a la base:



$$\begin{aligned}\bar{I}_x &= \int_A y^2 dA, \quad dA = b dy = \int_0^h y^2 b dy = b \int_0^h y^2 dy = \frac{by^3}{3} \bigg|_0^h = \frac{bh^3}{3}\end{aligned}$$

Pero:  $\frac{bh^3}{3} = \frac{4bh^3}{4 \times 3} = \frac{4bh^3}{12} = \frac{bh^3}{12} + \frac{3bh^3}{12} = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12} +$

$bh \times \frac{h^2}{2} = \text{inercia centroide} + \text{area} \times (\text{distancia ejes})^2$

Entonces ¿qué reza o dice el teorema de ejes paralelos? Este teorema indica que la **inercia respecto a un eje cualquiera, que no sea el eje centroidal es: la suma de la inercia centroidal mas el producto entre el área de la sección en análisis por la distancia entre eje centroide y el eje en cuestión al cuadrado**, o sea que:

$$I_y = \bar{I}_y + \text{area} \times \text{centroide}$$

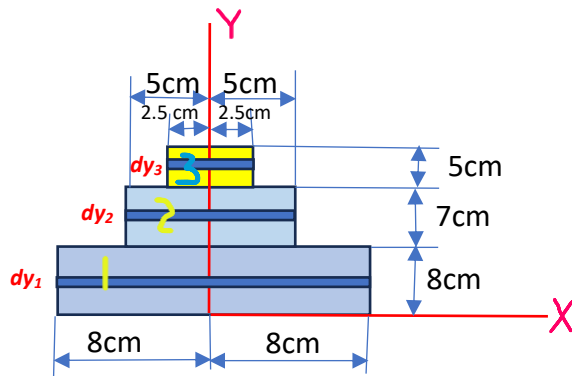
Para el problema anterior aplicando este teorema se tiene:

$$I_y = \bar{I}_y + \text{area} \times \text{centroide} = \frac{bh^3}{12} + bh \times \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{12} + bh \times \frac{h^2}{4} = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4}$$

$$= \frac{bh^3}{12} + \frac{3bh^3}{12} = \frac{4bh^3}{12} = \frac{bh^3}{3} \text{ lo que se quiere demostrar}$$

## EJEMPLO 2

Calcular el centroide en Y, del sistema que se muestra a continuación:



Calcular el centroide Y del sistema.

Se calculará de dos maneras, por integración y por sumatoria de figuras geométricas conocidas

Por la primera alternativa, integrando  $\bar{Y} = \frac{\int_A Y da}{\int_A dA} = \frac{\int_{A1} Y da1 + \int_{A2} Y da2 + \int_{A3} Y da3}{\int_{A1} dA1 + \int_{A2} dA2 + \int_{A3} dA3} =$

$$\frac{\int_0^8 16y dy + \int_8^{15} 10y dy + \int_{15}^{20} 5y dy}{\int_0^8 16 dy + \int_8^{15} 10 dy + \int_{15}^{20} 5 dy}, dA1 = 16dy, dA2 = 10dy, dA3 = 5dy$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{16}{2}y^2 \Big|_0^8 + \frac{10}{2}y^2 \Big|_8^{15} + \frac{5}{2}y^2 \Big|_{15}^{20}}{16y \Big|_0^8 + 10y \Big|_8^{15} + 5y \Big|_{15}^{20}} = \frac{8 \times 64 + (5 \times 15^2 - 5 \times 8^2) + 2.5(20^2 - 15^2)}{16 \times 8 + 10(15 - 8) + 5(20 - 15)}$$

$$\bar{y} = \frac{512 + 805 + 437.5}{128 + 70 + 25} = 7.87 \text{ cm}$$

Por la Segunda manera, por sumatoria de figuras conocidas  $= \bar{y} = \frac{\sum yA}{\sum A} = 1754.5/223 = 7.87 \text{ cm}$ , que es el mismo resultado, en la primera manera de calcular es analítico, en la segunda se aproxima (suma de Reinmann)

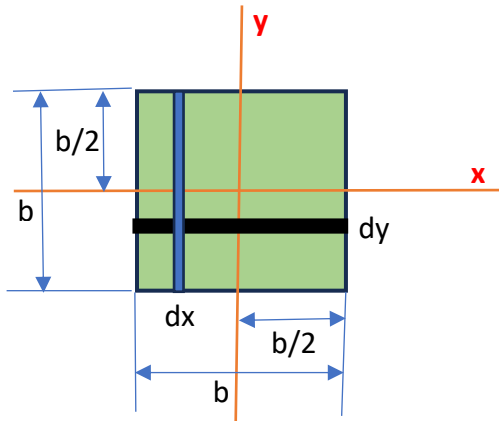
| Elemento<br>Figura | Y cm         | Área cm <sup>2</sup> | YÁrea cm <sup>3</sup> |
|--------------------|--------------|----------------------|-----------------------|
| 1                  | 8/2 = 4      | 8x16 = 128           | 4x128 = 512           |
| 3                  | 8+7/2 = 11.5 | 7x10 = 70            | 11.5x70 = 805         |



|   |                  |                            |                                   |
|---|------------------|----------------------------|-----------------------------------|
| 4 | $8+7+5/2 = 17.5$ | $5 \times 5 = \mathbf{25}$ | $17.5 \times 25 = \mathbf{437.5}$ |
|   |                  | Suma = 223                 | Suma = 1754.5                     |

## INERCIA POLAR

EJEMPLO 1. Con inercia polar, donde  $J_o = I_x + I_y = I'_x + I'_y$ . Lo que es importante en la inercia polar  $J_o$  es su valor constante en sumatoria de ejes ortogonales o ángulo recto



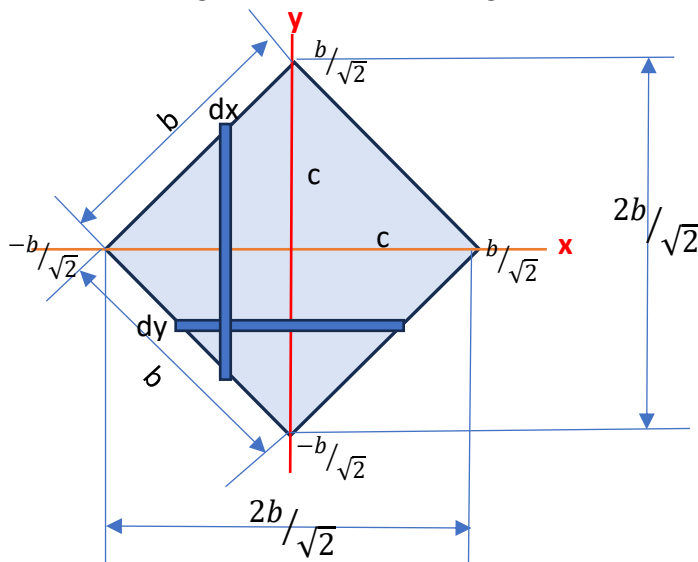
$$I_{\bar{y}} = \int_A y^2 dA, dA = b dy, I_{\bar{x}} = \int_A x^2 dA, dA = b dx$$

$$I_{\bar{y}} = \int_{-b/2}^{b/2} b y^2 dy = \frac{b y^3}{3} \Big|_{-b/2}^{b/2} = \frac{b}{3} \left( \frac{b}{2} \right)^3 - \frac{b}{3} \left( \frac{-b}{2} \right)^3 = \frac{b^4}{24} + \frac{b^4}{24} = \frac{b^4}{12}$$

$$I_{\bar{x}} = \int_{-b/2}^{b/2} b x^2 dy = \frac{b x^3}{3} \Big|_{-b/2}^{b/2} = \frac{b}{3} \left( \frac{b}{2} \right)^3 - \frac{b}{3} \left( \frac{-b}{2} \right)^3 = \frac{b^4}{24} + \frac{b^4}{24} = \frac{b^4}{12}$$

$$J_o = I_{\bar{y}} + I_{\bar{x}} = \frac{b^4}{12} + \frac{b^4}{12} = \frac{b^4}{6}$$

Ahora la misma figura con rotación de 45 grados



$$c^2 + c^2 = b^2 \therefore 2c^2 = b^2 \wedge c = \sqrt{b^2/2} = b/\sqrt{2}$$

$$\text{En cuadrante positivo} \begin{cases} y = 2b/\sqrt{2} - 2x \\ x = 2b/\sqrt{2} - 2y \end{cases}, \text{ en cuadrante negativo} \begin{cases} y = 2b/\sqrt{2} + 2x \\ x = 2b/\sqrt{2} + 2y \end{cases}$$

$$I_{\bar{y}} = \int_A y^2 dA = \int_A y^2 x dy = \int_{-b/\sqrt{2}}^0 y^2 \left( 2b/\sqrt{2} + 2y \right) dy + \int_0^{b/\sqrt{2}} y^2 \left( 2b/\sqrt{2} - 2y \right) dy$$

$$I_{\bar{y}} = \int_{-b/\sqrt{2}}^0 \left( 2by^2/\sqrt{2} + 2y^3 \right) dy + \int_0^{b/\sqrt{2}} \left( 2by^2/\sqrt{2} - 2y^3 \right) dy$$

$$= \frac{2by^3}{3\sqrt{2}} + \frac{2y^4}{4} \left\{ -b/\sqrt{2} + \frac{2by^3}{3\sqrt{2}} - \frac{2y^4}{4} \right\} \left\{ \frac{b}{\sqrt{2}} \right. \\ \left. 0 \right.$$

$$I_{\bar{y}} = 0 - \left( \frac{2b}{3\sqrt{2}} \left( \frac{-b}{\sqrt{2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left( \frac{-b}{\sqrt{2}} \right)^4 \right) + \frac{2b}{3\sqrt{2}} \left( \frac{b}{\sqrt{2}} \right)^3 - \frac{1}{2} \left( \frac{b}{\sqrt{2}} \right)^4 - 0$$

$$I_{\bar{y}} = \frac{2b^4}{3 \times 4} - \frac{b^4}{8} + \frac{2b^4}{3 \times 4} - \frac{b^4}{8} = \frac{b^4}{6} - \frac{b^4}{8} + \frac{b^4}{6} - \frac{b^4}{8} = \frac{2b^4}{6} - \frac{2b^4}{8} = \frac{b^4}{3} - \frac{b^4}{4} = \frac{4b^4 - 3b^4}{12} = \frac{b^4}{12}$$

$$I_{\bar{x}} = \int_A x^2 dA = \int_A x^2 y dx = \int_{-b/\sqrt{2}}^0 x^2 \left( 2b/\sqrt{2} + 2x \right) dx + \int_0^{b/\sqrt{2}} x^2 \left( 2b/\sqrt{2} - 2x \right) dx$$

$$I_{\bar{x}} = \int_{-b/\sqrt{2}}^0 \left( 2bx^2/\sqrt{2} + 2x^3 \right) dx + \int_0^{b/\sqrt{2}} \left( 2bx^2/\sqrt{2} - 2x^3 \right) dx$$

$$= \frac{2bx^3}{3\sqrt{2}} + \frac{2x^4}{4} \left\{ -b/\sqrt{2} + \frac{2bx^3}{3\sqrt{2}} - \frac{2x^4}{4} \right\} \left\{ \frac{b}{\sqrt{2}} \right. \\ \left. 0 \right.$$

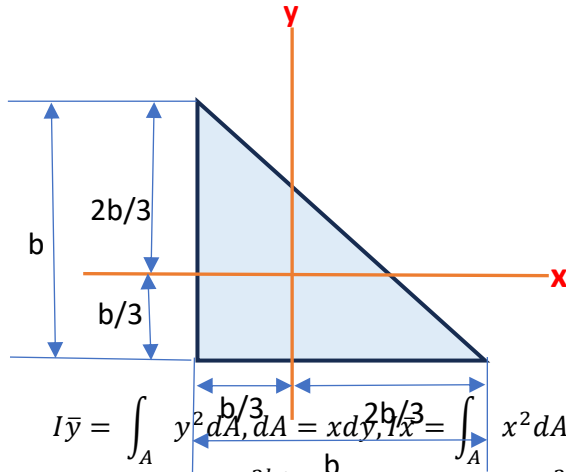
$$I_{\bar{x}} = 0 - \left( \frac{2b}{3\sqrt{2}} \left( \frac{-b}{\sqrt{2}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left( \frac{-b}{\sqrt{2}} \right)^4 \right) + \frac{2b}{3\sqrt{2}} \left( \frac{b}{\sqrt{2}} \right)^3 - \frac{1}{2} \left( \frac{b}{\sqrt{2}} \right)^4 - 0$$

$$I_{\bar{x}} = \frac{2b^4}{3 \times 4} - \frac{b^4}{8} + \frac{2b^4}{3 \times 4} - \frac{b^4}{8} = \frac{b^4}{6} - \frac{b^4}{8} + \frac{b^4}{6} - \frac{b^4}{8} = \frac{2b^4}{6} - \frac{2b^4}{8} = \frac{b^4}{3} - \frac{b^4}{4} = \frac{4b^4 - 3b^4}{12} = \frac{b^4}{12}$$

$$J_o = I_{\bar{y}} + I_{\bar{x}} = \frac{b^4}{12} + \frac{b^4}{12} = \frac{b^4}{6}$$

$$\text{En ámbos casos } J_o = I_x + I_y = I'_x + I'_y = \frac{b^4}{6}$$

EJEMPLO 2. Con inercia polar, donde  $J_o = I_x + I_y = I'_x + I'_y$ . Lo que es importante en la inercia polar  $J_o$  es su valor constante en sumatoria de ejes ortogonales o ángulo recto



$$I_{\bar{y}} = \int_A y^2 dA, dA = x dy, I_{\bar{x}} = \int_A x^2 dA, dA = y dx, x = \frac{2b}{3} - y, y = \frac{3b}{3} - x$$

$$I_{\bar{y}} = \int_A xy^2 dy = \int_{-b/3}^{2b/3} y^2 \left( \frac{2b}{3} - y \right) dy = \int_{-b/3}^{2b/3} \left( \frac{2by^2}{3} - y^3 \right) dy = \frac{2by^3}{9} - \frac{y^4}{4} \Big|_{-b/3}^{2b/3}$$

$$I_{\bar{y}} = \frac{2b}{9} \left( \frac{2b}{3} \right)^3 - \frac{1}{4} \left( \frac{2b}{3} \right)^4 - \left( \frac{2b}{9} \left( \frac{-b}{3} \right)^3 - \frac{1}{4} \left( \frac{-b}{3} \right)^4 \right)$$

$$I_{\bar{y}} = \frac{2b}{9} \times \frac{8b^3}{27} - \frac{1}{4} \times \frac{16b^4}{81} + \frac{2b}{9} \times \frac{b^3}{27} + \frac{1}{4} \times \frac{b^4}{81} = \frac{16b^4}{243} - \frac{4b^4}{81} + \frac{2b^4}{243} + \frac{b^4}{324}$$

$$I_{\bar{y}} = \frac{18b^4}{243} + \frac{-16b^4 + b^4}{324} = \frac{18b^4}{243} - \frac{15b^4}{324} = \frac{2b^4}{27} - \frac{5b^4}{108} = \frac{8b^4 - 5b^4}{108} = \frac{3b^4}{108} = \frac{b^4}{36}$$

$$I_{\bar{x}} = \int_A yx^2 dx = \int_{-b/3}^{2b/3} x^2 \left( \frac{2b}{3} - x \right) dx = \int_{-b/3}^{2b/3} \left( \frac{2bx^2}{3} - x^3 \right) dx = \frac{2bx^3}{9} - \frac{x^4}{4} \Big|_{-b/3}^{2b/3}$$

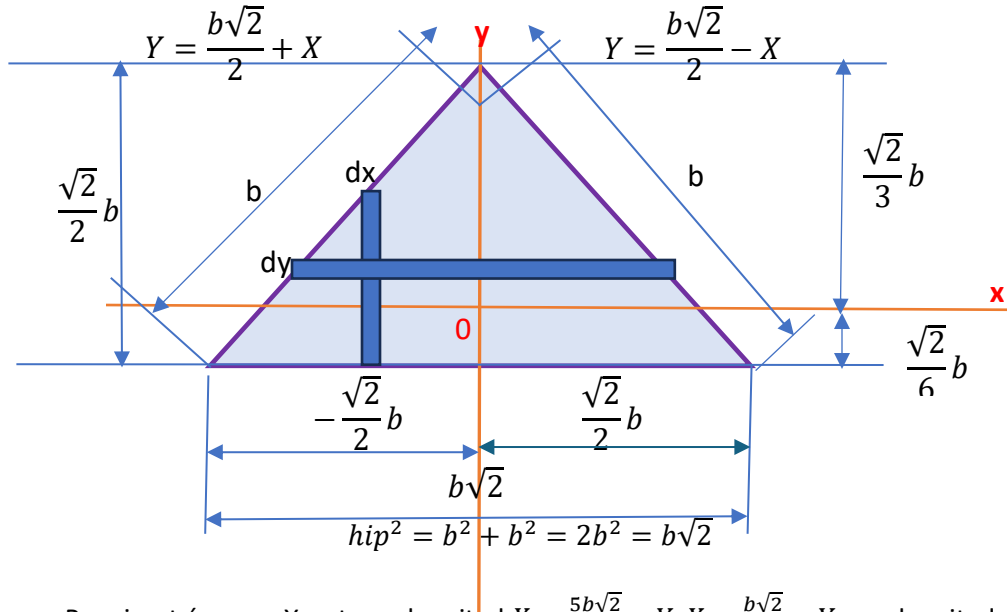
$$I_{\bar{x}} = \frac{2b}{9} \left( \frac{2b}{3} \right)^3 - \frac{1}{4} \left( \frac{2b}{3} \right)^4 - \left( \frac{2b}{9} \left( \frac{-b}{3} \right)^3 - \frac{1}{4} \left( \frac{-b}{3} \right)^4 \right)$$

$$I_{\bar{x}} = \frac{2b}{9} \times \frac{8b^3}{27} - \frac{1}{4} \times \frac{16b^4}{81} + \frac{2b}{9} \times \frac{b^3}{27} + \frac{1}{4} \times \frac{b^4}{81} = \frac{16b^4}{243} - \frac{4b^4}{81} + \frac{2b^4}{243} + \frac{b^4}{324}$$

$$I_{\bar{x}} = \frac{18b^4}{243} + \frac{-16b^4 + b^4}{324} = \frac{18b^4}{243} - \frac{15b^4}{324} = \frac{2b^4}{27} - \frac{5b^4}{108} = \frac{8b^4 - 5b^4}{108} = \frac{3b^4}{108} = \frac{b^4}{36}$$

$$J_o = I_{\bar{y}} + I_{\bar{x}} = \frac{b^4}{36} + \frac{b^4}{36} = \frac{b^4}{18}$$

A continuación, se rota el triángulo isósceles, 45 grados, así:



Por simetría, para X se toma la mitad  $X = \frac{5b\sqrt{2}}{6} - Y$ ,  $X = \frac{b\sqrt{2}}{3} - Y$ , por la mitad

$$I_{\bar{y}} = \int_A y^2 dA = \int_A y^2 x dy = \int_{-\frac{b\sqrt{2}}{3}}^{\frac{b\sqrt{2}}{3}} 2y^2 \left( \frac{b\sqrt{2}}{3} - y \right) dy = 2 \int_{-\frac{b\sqrt{2}}{3}}^{\frac{b\sqrt{2}}{3}} \left( \frac{\sqrt{2}by^2}{3} - y^3 \right) dy$$

$$I_{\bar{y}} = 2 \left( \frac{\sqrt{2}by^3}{9} - \frac{y^4}{4} \right) \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}b/3 \\ -\sqrt{2}b/6 \end{array} \right.$$

$$= 2 \left( \left( \frac{\sqrt{2}b}{9} \left( \frac{\sqrt{2}b}{3} \right)^3 - \frac{1}{4} \left( \frac{\sqrt{2}b}{3} \right)^4 \right) - \left( \frac{\sqrt{2}b}{9} \left( -\frac{\sqrt{2}b}{6} \right)^3 - \frac{1}{4} \left( -\frac{\sqrt{2}b}{6} \right)^4 \right) \right)$$

$$I_{\bar{y}} = 2 \left( \frac{4b^4}{243} - \frac{b^4}{81} + \frac{4b^4}{1944} + \frac{b^4}{1296} \right) = 2 \left( \frac{4b^4}{243} - \frac{3b^4}{243} + \frac{b^4}{486} + \frac{b^4}{1296} \right)$$

$$I_{\bar{y}} = 2 \left( \frac{2b^4}{486} + \frac{b^4}{486} + \frac{b^4}{1296} \right) = 2 \left( \frac{3b^4}{486} + \frac{b^4}{1296} \right) = 2 \left( \frac{b^4}{162} + \frac{b^4}{1296} \right) = 2 \left( \frac{8b^4}{1296} + \frac{b^4}{1296} \right)$$

$$I_{\bar{y}} = 2 \left( \frac{9b^4}{1296} \right) = \frac{2b^4}{144} = \frac{b^4}{72}$$

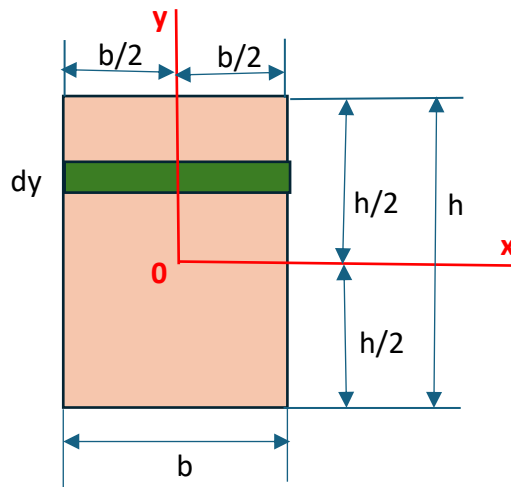
$$I_{\bar{x}} = \int_A x^2 dA = \int_A x^2 y dx = \int_{-\frac{b\sqrt{2}}{2}}^0 x^2 \left( \frac{b\sqrt{2}}{2} + x \right) dx + \int_0^{\frac{b\sqrt{2}}{2}} x^2 \left( \frac{\sqrt{2}b}{2} - x \right) dx$$



$$\begin{aligned}
\bar{I}_x &= \int_{-\frac{b\sqrt{2}}{2}}^0 \left( \frac{b\sqrt{2}x^2}{2} + x^3 \right) dx + \int_0^{\frac{b\sqrt{2}}{2}} \left( \frac{\sqrt{2}bx^2}{2} - x^3 \right) dx = \frac{\sqrt{2}bx^3}{6} + \frac{x^4}{4} \left\{ -\frac{0}{\sqrt{2}b/2} + \frac{\sqrt{2}bx^3}{6} \right. \\
&\quad \left. - \frac{x^4}{4} \right\} \frac{\sqrt{2}b/2}{0} \\
&= 0 - \left( \frac{\sqrt{2}b}{6} \left( \frac{-\sqrt{2}b}{2} \right)^3 + \frac{1}{4} \left( \frac{-\sqrt{2}b}{2} \right)^4 \right) + \frac{\sqrt{2}b}{6} \left( \frac{\sqrt{2}b}{2} \right)^3 - \frac{1}{4} \left( \frac{\sqrt{2}b}{2} \right)^4 - 0 \\
&= 0 + \frac{4b^4}{48} - \frac{b^4}{16} + \frac{4b^4}{48} - \frac{b^4}{16} - 0 = \frac{b^4}{12} - \frac{b^4}{16} + \frac{b^4}{12} - \frac{b^4}{16} = \frac{b^4}{6} - \frac{b^4}{8} \\
I\bar{x} &= \frac{8b^4 - 6b^4}{48} = \frac{2b^4}{48} = \frac{b^4}{24} \\
J_o &= I\bar{y} + I\bar{x} = \frac{b^4}{72} + \frac{b^4}{24} = \frac{3b^4 + b^4}{24} = \frac{4b^4}{24} = \frac{b^4}{6}
\end{aligned}$$

**La inercia polar  $J_o$  es una constante, rotando el triángulo.**

EJEMPLO 3. Con inercia polar, donde  $\mathbf{J_o} = \mathbf{I_x + I_y} = \mathbf{I'x + I'y}$ . Lo que es importante en la inercia polar  $J_o$  es su valor constante en sumatoria de ejes ortogonales o ángulo recto



$$\begin{aligned}
I\bar{y} &= \int_A y^2 dA, dA = bdy, I\bar{x} = \int_A x^2 dA, dA = hdx \\
I\bar{y} &= \int_{-h/2}^{h/2} by^2 dy = \frac{by^3}{3} \left\{ \frac{h/2}{-h/2} = \frac{b}{3} \left( \frac{h}{2} \right)^3 - \frac{b}{3} \left( \frac{-h}{2} \right)^3 \right\} = \frac{bh^3}{24} + \frac{bh^3}{24} = \frac{bh^3}{12} \\
I\bar{x} &= \int_{-b/2}^{b/2} hx^2 dy = \frac{hx^3}{3} \left\{ \frac{b/2}{-b/2} = \frac{h}{3} \left( \frac{b}{2} \right)^3 - \frac{h}{3} \left( \frac{-b}{2} \right)^3 \right\} = \frac{hb^3}{24} + \frac{hb^3}{24} = \frac{hb^3}{12} \\
J_o &= I\bar{y} + I\bar{x} = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12} = \frac{bh}{12} (b^2 + h^2)
\end{aligned}$$

## VECTORES EN 3D

Al final se regresa al planeamiento clásico de Mecánica Analítica, ahora del plano se analiza al volúmen. Se hace una revisión de los productos vectoriales como herramienta para la Meánica Analítica.

### Capítulo 2

#### Productos escalar y vectorial

**PRODUCTO ESCALAR O INTERNO.** Dados dos vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , su producto escalar o interno,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ , se define como el producto de sus módulos por el coseno del ángulo  $\theta$  que forman. Por lo tanto,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Obsérvese que  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  es un escalar, un número, y no un vector.

Las propiedades del producto escalar son:

1.  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

Propiedad conmutativa

2.  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$

Propiedad distributiva del producto escalar respecto de la suma.

3.  $m(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})m$ , siendo  $m$  un escalar

4.  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$

5. Dados  $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$  y  $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ , se verifica,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = B^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$$

6. Si  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$  y ninguno de los vectores es nulo, ambos son perpendiculares.

**PRODUCTO VECTORIAL O EXTERNO.** Dados los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , su producto vectorial o externo es otro vector  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ . El módulo de  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  es el producto de módulos por el seno del ángulo  $\theta$  que forman. La dirección de  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$  es la perpendicular al plano que forman  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , y su sentido es tal que  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , y  $\mathbf{C}$  forman un triedro a derechas. Por lo tanto,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin \theta \mathbf{u}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

siendo  $\mathbf{u}$  un vector unitario que indica la dirección y sentido del producto  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ . Si  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ , o bien si  $\mathbf{A}$  tiene la misma dirección que  $\mathbf{B}$ ,  $\sin \theta = 0$ , con lo que  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ .

Las propiedades del producto vectorial son:

1.  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$

(No goza de la propiedad conmutativa.)

2.  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$

Propiedad distributiva del producto vectorial respecto de la suma

3.  $m(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})m$ , siendo  $m$  un escalar.

4.  $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$

5. Dados  $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$  y  $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ , se verifica,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

6. El módulo de  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  representa el área del paralelogramo de lado  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ .
7. Si  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ , y ninguno de los vectores es nulo, ambos tienen la misma dirección.

**PRODUCTOS TRIPLES.** Por medio de productos escalares y vectoriales de tres vectores,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$ , se pueden formar productos de la forma  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  y  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ . Se verifican las propiedades siguientes:

1.  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} \neq \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$
2.  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) =$  volumen de un paralelepípedo de aristas  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  con signo positivo o negativo según que  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  formen un triedro a derechas o a izquierdas. Si  $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$  y  $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$ ,

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

3.  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$  (El producto vectorial no goza de la propiedad asociativa.)
4.  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$   
 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}$

El producto  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  se llama *triple producto escalar* y se representa por  $[\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}]$ . El producto  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  recibe el nombre de *triple producto vectorial*.

En el producto  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  se pueden omitir los paréntesis y escribir  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$  (Problema 41). Sin embargo, esto no se puede hacer en el producto  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  (véanse los Problemas 29 y 47).

**SISTEMAS DE VECTORES RECÍPROCOS.** Dos sistemas de vectores  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  y  $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$  se llaman *recíprocos*, si

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}' = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}' = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}' = 1$$

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{b} = 0$$

La condición necesaria y suficiente para que los sistemas de vectores  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  y  $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ , sean recíprocos es que

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}$$

siendo  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} \neq 0$ , (problemas 53 y 54)

$= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$   
ya que  $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$  y todos los demás productos escalares son nulos.

7. Siendo  $A = A_1i + A_2j + A_3k$ , demostrar que  $A = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$ .

$$A \cdot A = (A)(A) \cos 0^\circ = A^2. \text{ Luego, } A = \sqrt{A \cdot A}.$$

$$\begin{aligned} \text{También, } A \cdot A &= (A_1i + A_2j + A_3k) \cdot (A_1i + A_2j + A_3k) \\ &= (A_1)(A_1) + (A_2)(A_2) + (A_3)(A_3) = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \end{aligned}$$

del problema 6, tomando  $B = A$ .

Por lo tanto,  $A = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$  es el módulo de  $A$ . Algunas veces  $A \cdot A$  se representa por  $A^2$ .

8. Hallar el ángulo formado por los vectores  $A = 2i + 2j - k$  y  $B = 6i - 3j + 2k$ .

$$A \cdot B = AB \cos \theta, \quad A = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = 3, \quad B = \sqrt{(6)^2 + (-3)^2 + (2)^2} = 7$$

$$A \cdot B = (2)(6) + (2)(-3) + (-1)(2) = 12 - 6 - 2 = 4$$

$$\text{Por lo tanto, } \cos \theta = \frac{A \cdot B}{AB} = \frac{4}{(3)(7)} = \frac{4}{21} = 0.1905, \text{ de donde } \theta = 79^\circ, \text{ aproximadamente.}$$

9. Si  $A \cdot B = 0$  y  $A$  y  $B$  son distintos de cero, demostrar que  $A$  es perpendicular a  $B$ .

$$\text{Si } A \cdot B = AB \cos \theta = 0, \text{ entonces } \cos \theta = 0, \text{ o sea, } \theta = 90^\circ. \text{ Recíprocamente, si } \theta = 90^\circ, A \cdot B = 0.$$

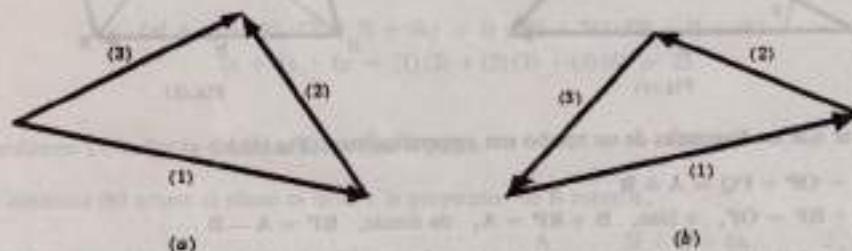
10. Hallar el valor de  $a$  de forma que  $A = 2i + aj + k$  y  $B = 4i - 2j - 2k$  sean perpendiculares.

Del problema 9,  $A$  y  $B$  son perpendiculares si  $A \cdot B = 0$ .

$$\text{Por lo tanto, } A \cdot B = (2)(4) + (a)(-2) + (1)(-2) = 8 - 2a - 2 = 0, \text{ de donde, } a = 3.$$

11. Demostrar que los vectores  $A = 3i - 2j + k$ ,  $B = i - 3j + 5k$ ,  $C = 2i + j - 4k$  forman un triángulo rectángulo.

Demostremos, en primer lugar, que los vectores forman triángulo.



De las figuras se deduce que ello ocurre si

- (a) uno de los vectores, por ejemplo (3), es la resultante de los otros dos (1) y (2).  
(b) La resultante de los vectores (1) + (2) + (3) es el vector nulo. Como indican las figuras, puede ocurrir que dos vectores tengan el extremo común, o bien, que ninguno de los extremos coincidan. En nuestro caso es trivial que  $A = B + C$  y, por lo tanto, los vectores forman triángulo.

Como  $A \cdot B = (3)(1) + (-2)(-3) + (1)(5) = 14$ ,  $A \cdot C = (3)(2) + (-2)(1) + (1)(-4) = 0$ , y  $B \cdot C = (1)(2) + (-3)(1) + (5)(-4) = -21$ , se deduce que  $A$  y  $C$  son perpendiculares y que el triángulo es rectángulo.



## Problemas resueltos

### PRODUCTO ESCALAR

1. Demostrar que  $A \cdot B = B \cdot A$ .

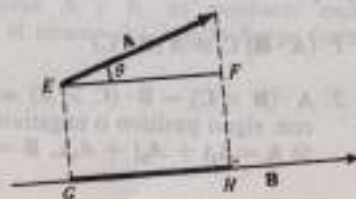
$$A \cdot B = AB \cos \theta = BA \cos \theta = B \cdot A$$

Por consiguiente, el producto escalar goza de la propiedad conmutativa.

2. Demostrar que  $A \cdot b$  es igual a la proyección de  $A$  sobre  $B$ , siendo  $b$  el vector unitario en la dirección y sentido de  $B$ .

Como indica la figura, los planos perpendiculares a  $B$  trazados por el origen y el extremo de  $A$  cortan a aquél en los puntos  $G$  y  $H$ , respectivamente, por lo tanto,

$$\text{Proyección de } A \text{ sobre } B = \overline{GH} = \overline{EF} = A \cos \theta = A \cdot b$$



3. Demostrar que  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ .

Sea  $a$  el vector unitario en la dirección y sentido de  $A$ , entonces,

Proyección de  $(B + C)$  sobre  $A$  = proyección de  $B$  sobre  $A$   
+ proyección de  $C$  sobre  $A$

$$(B + C) \cdot a = B \cdot a + C \cdot a$$

Multiplicando por  $A$ ,

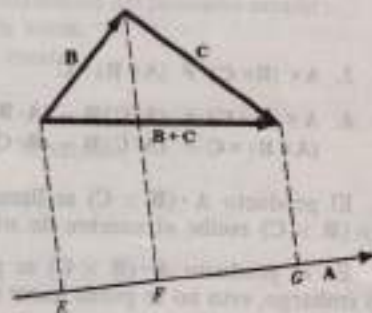
$$(B + C) \cdot Aa = B \cdot Aa + C \cdot Aa$$

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$$

Teniendo en cuenta la propiedad conmutativa del producto escalar,

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

luego el producto escalar goza de la propiedad distributiva respecto de la suma.



4. Demostrar que  $(A + B) \cdot (C + D) = A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D$ .

Del problema 3,  $(A + B) \cdot (C + D) = A \cdot (C + D) + B \cdot (C + D) = A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D$ .  
Luego el producto escalar goza de las propiedades del álgebra ordinaria.

5. Hallar los productos escalares siguientes:

$$(a) i \cdot i = |i| |i| \cos 0^\circ = (1)(1)(1) = 1$$

$$(b) i \cdot k = |i| |k| \cos 90^\circ = (1)(1)(0) = 0$$

$$(c) k \cdot j = |k| |j| \cos 90^\circ = (1)(1)(0) = 0$$

$$(d) j \cdot (2i - 3j + k) = 2j \cdot i - 3j \cdot j + j \cdot k = 0 - 3 + 0 = -3$$

$$(e) (2i - j) \cdot (3i + k) = 2i \cdot (3i + k) - j \cdot (3i + k) = 6i \cdot i + 2i \cdot k - 3j \cdot i - j \cdot k = 6 + 0 - 0 - 0 = 6$$

6. Si  $A = A_1 i + A_2 j + A_3 k$  y  $B = B_1 i + B_2 j + B_3 k$ , demostrar que  $A \cdot B = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$ .

$$A \cdot B = (A_1 i + A_2 j + A_3 k) \cdot (B_1 i + B_2 j + B_3 k)$$

$$= A_1 i \cdot (B_1 i + B_2 j + B_3 k) + A_2 j \cdot (B_1 i + B_2 j + B_3 k) + A_3 k \cdot (B_1 i + B_2 j + B_3 k)$$

$$= A_1 B_1 i \cdot i + A_1 B_2 i \cdot j + A_1 B_3 i \cdot k + A_2 B_1 j \cdot i + A_2 B_2 j \cdot j + A_2 B_3 j \cdot k + A_3 B_1 k \cdot i + A_3 B_2 k \cdot j + A_3 B_3 k \cdot k$$



12. Hallar los ángulos que forma el vector  $A = 3i - 6j + 2k$  con los ejes coordenados.

Sean  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $\gamma$  los ángulos que forman  $A$  con los semiejes positivos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente.

$$A \cdot i = (A)(i) \cos \alpha = \sqrt{(3)^2 + (-6)^2 + (2)^2} \cos \alpha = 7 \cos \alpha$$

$$A \cdot i = (3i - 6j + 2k) \cdot i = 3i \cdot i - 6j \cdot i + 2k \cdot i = 3$$

Por lo tanto,  $\cos \alpha = 3/7 = 0.4286$ , de donde  $\alpha = 64.6^\circ$ , aproximadamente.

Análogamente,  $\cos \beta = -6/7$ ,  $\beta = 149^\circ$ , de donde,  $\cos \gamma = 2/7$ ,  $\gamma = 73.4^\circ$ .

Los cosenos de  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $\gamma$  se llaman *cosenos directores* de  $A$  (problema 27, Capítulo 1).

13. Hallar la proyección del vector  $A = i - 2j + k$  según la dirección de  $B = 4i - 4j + 7k$ .

$$\text{El vector unitario en la dirección y sentido de } B \text{ es } b = \frac{B}{|B|} = \frac{4i - 4j + 7k}{\sqrt{(4)^2 + (-4)^2 + (7)^2}} = \frac{4}{9}i - \frac{4}{9}j + \frac{7}{9}k.$$

$$\begin{aligned} \text{Proyección de } A \text{ sobre el vector } B &= A \cdot b = (i - 2j + k) \cdot \left( \frac{4}{9}i - \frac{4}{9}j + \frac{7}{9}k \right) \\ &= (1) \left( \frac{4}{9} \right) + (-2) \left( -\frac{4}{9} \right) + (1) \left( \frac{7}{9} \right) = \frac{19}{9} = 2.11 \end{aligned}$$

14. Demostrar el teorema del coseno de un triángulo cualquier.

En la Fig. (a) inferior,  $B + C = A$ , o bien,  $C = A - B$ .

Luego

$$C \cdot C = (A - B) \cdot (A - B) = A \cdot A + B \cdot B - 2A \cdot B$$

o sea

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta.$$

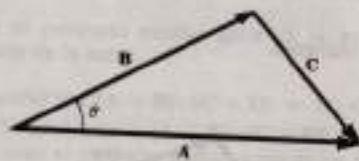


Fig. (a)

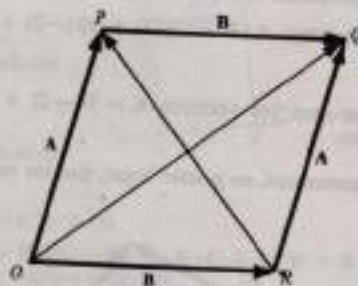


Fig. (b)

15. Demostrar que las diagonales de un rombo son perpendiculares. (Fig. (b).)

$$OQ = OP + PQ = A + B$$

$$OR + RP = OP, \text{ o bien, } B + RP = A, \text{ de donde, } RP = A - B$$

$$\text{Luego } OQ \cdot RP = (A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2 = 0, \text{ ya que } A = B.$$

Por consiguiente,  $OQ$  es perpendicular a  $RP$ .

16. Hallar el vector unitario perpendicular al plano formado por  $A = 2i - 6j - 3k$  y  $B = 4i + 3j - k$ .

Sea  $C = c_1i + c_2j + c_3k$  un vector perpendicular al plano formado por  $A$  y  $B$ . El vector  $C$  es perpendicular a  $A$  y a  $B$ . Luego,

$$C \cdot A = 2c_1 - 6c_2 - 3c_3 = 0, \text{ o sea, (1) } 2c_1 - 6c_2 = 3c_3$$

$$C \cdot B = 4c_1 + 3c_2 - c_3 = 0, \text{ o sea, (2) } 4c_1 + 3c_2 = c_3$$

Resolviendo el sistema formado por (1) y (2):  $c_1 = \frac{1}{2}c_0$ ,  $c_2 = -\frac{1}{3}c_0$ ,  $C = c_0(\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \mathbf{k})$ .

Luego el vector unitario en la dirección y sentido de  $C$  es

$$\frac{C}{C} = \frac{c_0(\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \mathbf{k})}{\sqrt{c_0^2[(\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{3})^2 + (1)^2]}} = \pm(\frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}).$$

17. Hallar el trabajo realizado por la fuerza  $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$  al desplazar un sólido puntual a lo largo del vector  $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ . (Fig. (a).)

Trabajo realizado = (módulo de la fuerza en la dirección y sentido del movimiento) (desplazamiento)

$$= (F \cos \theta)(r) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$$

$$= (2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) = 6 - 2 + 5 = 9.$$

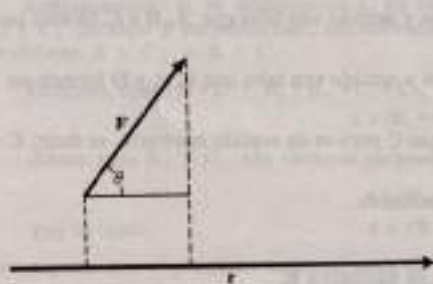


Fig. (a)

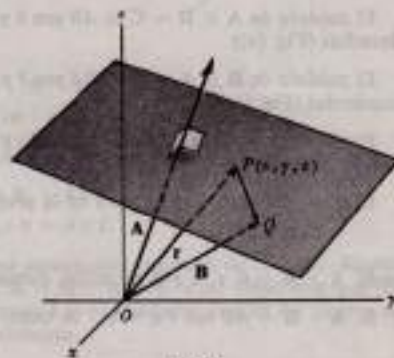


Fig. (b)

18. Hallar la ecuación del plano perpendicular al vector  $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$  y que pasa por el extremo del vector  $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ . (Fig. (b).)

Sea  $\mathbf{r}$  el vector de posición del punto  $P$ , y  $Q$  el extremo de  $\mathbf{B}$ .

Como  $\mathbf{PQ} = \mathbf{B} - \mathbf{r}$  es perpendicular a  $\mathbf{A}$ ,  $(\mathbf{B} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{A} = 0$ , o sea,  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  es la ecuación vectorial del plano buscado. En coordenadas rectangulares,

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = (\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

o bien,

$$2x + 3y + 6z = (1)(2) + (5)(3) + (3)(6) = 35$$

19. En el problema 18, hallar la distancia del origen al plano.

La distancia del origen al plano es igual a la proyección de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{A}$ .

El vector unitario en la dirección y sentido de  $\mathbf{A}$  es  $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (6)^2}} = \frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$ .

Luego, proyección de  $\mathbf{B}$  sobre  $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot (2/7\mathbf{i} + 3/7\mathbf{j} + 6/7\mathbf{k}) = 1(2/7) + 5(3/7) + 3(6/7) = 5$ .

20. Siendo  $\mathbf{A}$  un vector cualquiera, demostrar que  $\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$ .

Como  $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = A_1\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + A_2\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + A_3\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = A_1$

Análogamente,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = A_2$  y  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = A_3$ .

Luego,  $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$ .

## PRODUCTO VECTORIAL

21. Demostrar que  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ .

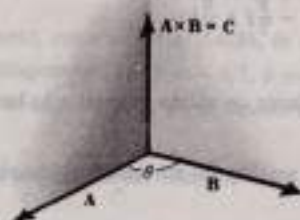


Fig. (a)



Fig. (b)

El módulo de  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$  es  $AB \sin \theta$  y su dirección y sentido son tales que  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  forman un triedro a derechas (Fig. (a)).

El módulo de  $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = \mathbf{D}$  es  $BA \sin \theta$  y su dirección y sentido son tales que  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{D}$  forman un triedro a izquierdas (Fig. (b)).

Por lo tanto  $\mathbf{D}$  tiene el mismo módulo y dirección que  $\mathbf{C}$  pero es de sentido contrario, es decir,  $\mathbf{C} = -\mathbf{D}$ , o sea,  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ .

El producto vectorial no goza de la propiedad conmutativa.

22. Siendo  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  no nulos, demostrar que  $\mathbf{A}$  es paralelo a  $\mathbf{B}$ .

Si  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin \theta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ , se tiene,  $\sin \theta = 0$  y  $\theta = 0^\circ$  ó  $180^\circ$ .

23. Demostrar que  $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 + |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2$ .

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 + |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|^2 = |AB \sin \theta \mathbf{u}|^2 + |AB \cos \theta|^2 = A^2 B^2 \sin^2 \theta + A^2 B^2 \cos^2 \theta = A^2 B^2 = |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2.$$

24. Hallar los productos vectoriales siguientes:

(a)  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$

(f)  $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$

(b)  $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$

(g)  $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{j}$

(c)  $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$

(h)  $(2\mathbf{j}) \times (3\mathbf{k}) = 6\mathbf{j} \times \mathbf{k} = 6\mathbf{i}$

(d)  $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{i}$

(i)  $(3\mathbf{i}) \times (-2\mathbf{k}) = -6\mathbf{i} \times \mathbf{k} = 6\mathbf{j}$

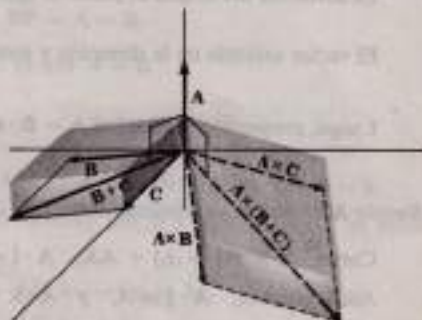
(e)  $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$

(j)  $2\mathbf{j} \times \mathbf{i} = 3\mathbf{k} = -2\mathbf{k} - 5\mathbf{k} = -5\mathbf{k}$

25. Demostrar que  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$  en el caso en que  $\mathbf{A}$  es perpendicular a  $\mathbf{B}$  y también cuando lo sea a  $\mathbf{C}$ .

Como  $\mathbf{A}$  es perpendicular a  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  es un vector perpendicular al plano formado por  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  y cuyo módulo es  $AB \sin 90^\circ = AB$ , o sea, el módulo de  $AB$ . Esto equivale a multiplicar el vector  $\mathbf{B}$  por  $\mathbf{A}$  y girar el vector resultante un ángulo de  $90^\circ$  hasta la posición que se indica en la figura.

Análogamente,  $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$  es el vector que se obtiene multiplicando  $\mathbf{C}$  por  $\mathbf{A}$  y girar el vector resultante un ángulo de  $90^\circ$  hasta la posición indicada en la figura.





De la misma forma,  $A \times (B + C)$  es el vector que se obtiene al multiplicar  $B + C$  por  $A$  y girar el vector resultante un ángulo de  $90^\circ$  hasta la posición indicada en la figura.

Como  $A \times (B + C)$  es la diagonal del paralelogramo cuyos lados son  $A \times B$  y  $A \times C$ , se deduce,  $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ .

26. Demostrar que  $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$  en el caso general en que  $A$ ,  $B$  y  $C$  no sean coplanarios ni paralelos.

Descomponiendo  $B$  en sus componentes, perpendicular a  $A$ ,  $B_\perp$ , y paralelo a  $A$ ,  $B_\parallel$ , se tiene,  $B = B_\perp + B_\parallel$ .

Llamando  $\theta$  al ángulo formado por  $A$  y  $B$ ,  $B_\perp = B \sin \theta$ . Por lo tanto, el módulo de  $A \times B_\perp$  es  $AB \sin \theta$ , es decir, igual que el de  $A \times B$ . La dirección y sentido de  $A \times B_\perp$  son también las mismas que las de  $A \times B$ . Por consiguiente,  $A \times B_\perp = A \times B$ .

Análogamente, si se descompone  $C$  en los vectores  $C_\parallel$  y  $C_\perp$ , paralelo y perpendicular, respectivamente, a  $A$ , se obtiene,  $A \times C_\perp = A \times C$ .

También, como  $B + C = B_\perp + B_\parallel + C_\perp + C_\parallel = (B_\perp + C_\perp) + (B_\parallel + C_\parallel)$  se deduce,

$$A \times (B_\perp + C_\perp) = A \times (B + C).$$

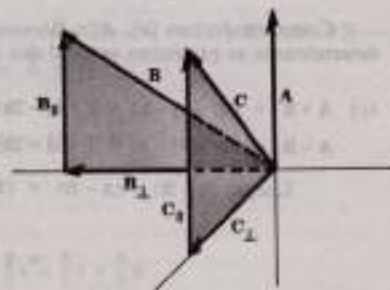
Ahora bien  $B_\perp$  y  $C_\perp$  son vectores perpendiculares a  $A$  y, según el problema 25,

$$A \times (B_\perp + C_\perp) = A \times B_\perp + A \times C_\perp$$

Por lo tanto,

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

que expresa que el producto vectorial goza de la propiedad distributiva respecto de la suma. Multiplicando por  $-1$ , y teniendo en cuenta el problema 21,  $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$ . Obsérvese que en el producto vectorial hay que tener en cuenta el orden de los factores. Las propiedades usuales del álgebra se pueden aplicar únicamente si se toman los vectores en el orden establecido.



27. Siendo  $A = A_1i + A_2j + A_3k$  y  $B = B_1i + B_2j + B_3k$ , demostrar que  $A \times B =$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} A \times B &= (A_1i + A_2j + A_3k) \times (B_1i + B_2j + B_3k) \\ &= A_1i \times (B_1i + B_2j + B_3k) + A_2j \times (B_1i + B_2j + B_3k) + A_3k \times (B_1i + B_2j + B_3k) \\ &= A_1B_2i \times j + A_1B_3i \times k + A_2B_1j \times i + A_2B_3j \times k + A_3B_1k \times i + A_3B_2k \times j + A_3B_3k \times k \\ &= (A_2B_3 - A_3B_2)i + (A_3B_1 - A_1B_3)j + (A_1B_2 - A_2B_1)k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

28. Dados  $A = 2i - 3j - k$  y  $B = i + 4j - 2k$ , hallar (a)  $A \times B$ , (b)  $B \times A$ , (c)  $(A + B) \times (A - B)$ .

$$\begin{aligned} \text{(a) } A \times B &= (2i - 3j - k) \times (i + 4j - 2k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= i \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10i + 3j + 11k \end{aligned}$$

Otro método.

$$\begin{aligned} (2i - 3j - k) \times (i + 4j - 2k) &= 2i \times (i + 4j - 2k) - 3j \times (i + 4j - 2k) - k \times (i + 4j - 2k) \\ &= 2i \times i + 8i \times j - 4i \times k - 3j \times i - 12j \times j + 6j \times k - k \times i - 4k \times j + 2k \times k \\ &= 0 + 8k + 4j + 3k - 0 = 6i - j + 4i + 0 = 10i + 3j + 11k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \mathbf{B} \times \mathbf{A} &= (1+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -10\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 11\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Comparando con (a),  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ . Obsérvese que esto equivale al teorema siguiente: Si en un determinante se permutan entre sí dos líneas (filas o columnas), el determinante cambia de signo.

$$(c) \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = (2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k}) + (1+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k}) - (1+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}) = \mathbf{i} - 7\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B}) &= (3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -20\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 22\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Otro método.

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\mathbf{A} - \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{A} - \mathbf{B})$$

$$= \mathbf{A} \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{A} - \mathbf{B} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} - \mathbf{A} \times \mathbf{B} - \mathbf{A} \times \mathbf{B} - \mathbf{0} = -2\mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$= -2(10\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 11\mathbf{k}) = -20\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 22\mathbf{k}, \text{ aplicando (a).}$$

29. Si  $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ , y  $\mathbf{C} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ , hallar (a)  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ , (b)  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ .

$$(a) \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

$$\text{Luego } (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (-\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 24\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$$

$$(b) \quad \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k} = -5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$$

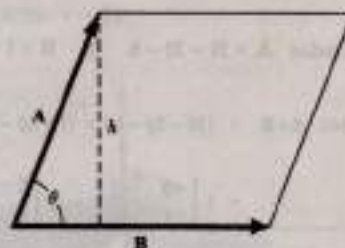
$$\text{Luego } \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \times (-5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 15\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 15\mathbf{k}.$$

Así pues,  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \neq \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ , demuestra la necesidad de utilizar paréntesis en  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C}$  para evitar ambigüedades.

30. Demostrar que el área de un paralelogramo de lados  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  es  $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ .

$$\begin{aligned} \text{Área del paralelogramo} &= h |\mathbf{B}| \\ &= |\mathbf{A}| \sin \theta |\mathbf{B}| \\ &= |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|. \end{aligned}$$

Obsérvese que el área del triángulo que tiene por lados  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  es igual a  $\frac{1}{2} |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ .



31. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos  $P(1, 3, 2)$ ,  $Q(2, -1, 1)$ ,  $R(1, 2, 3)$ .

$$\mathbf{PQ} = (2-1)\mathbf{i} + (-1-3)\mathbf{j} + (1-2)\mathbf{k} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\mathbf{PR} = (-1-1)\mathbf{i} + (2-3)\mathbf{j} + (3-2)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$



Del problema 30,

$$\begin{aligned}\text{área del triángulo} &= \frac{1}{2} |\mathbf{PQ} \times \mathbf{PR}| = \frac{1}{2} |(1-4\mathbf{j}-\mathbf{k}) \times (-2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})| \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |-5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 9\mathbf{k}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-5)^2 + (1)^2 + (-9)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{107}.\end{aligned}$$

32. Determinar el vector unitario perpendicular al plano formado por  $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$  y  $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ .

$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  es un vector perpendicular al plano formado por  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ .

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 30\mathbf{k}$$

El vector unitario en la dirección y sentido de  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  es

$$\frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|} = \frac{15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 30\mathbf{k}}{\sqrt{(15)^2 + (-10)^2 + (30)^2}} = \frac{3}{7}\mathbf{i} - \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}.$$

El vector unitario de la misma dirección y sentido contrario es  $(-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k})/7$ .

Comparar con el resultado del problema 16.

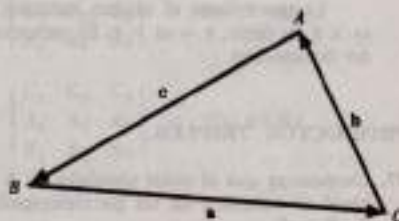
33. Deducir el teorema de los senos en triángulo plano.

Sean  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  los lados del triángulo  $ABC$  que se representa en la figura; en estas condiciones  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ . Multiplicando por  $\mathbf{a} \times$ ,  $\mathbf{b} \times$ , y  $\mathbf{c} \times$ , sucesivamente, se obtiene

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$$

es decir,  $ab \sin C = bc \sin A = ca \sin B$

$$\text{o bien, } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$



34. Considerando un tetraedro de caras  $F_1, F_2, F_3, F_4$ , y sean  $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4$  los vectores cuyos módulos son, respectivamente, las áreas de  $F_1, F_2, F_3, F_4$ , cuyas direcciones son perpendiculares a dichas caras y de sentido hacia el exterior del tetraedro. Demostrar que  $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4 = \mathbf{0}$ .

Según el problema 30, el área de un triángulo de lados  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{S}$  es  $\frac{1}{2} |\mathbf{R} \times \mathbf{S}|$ .

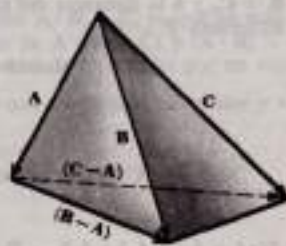
Los vectores asociados con cada una de las caras del tetraedro son

$$\mathbf{V}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{A} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{V}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{C}, \quad \mathbf{V}_3 = \frac{1}{2} \mathbf{C} \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{V}_4 = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{A}) \times (\mathbf{B} - \mathbf{A})$$

$$\begin{aligned}\text{Luego } \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4 &= \frac{1}{2} [\mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{C} \times \mathbf{A} + (\mathbf{C} - \mathbf{A}) \times (\mathbf{B} - \mathbf{A})] \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{C} \times \mathbf{A} + \mathbf{C} \times \mathbf{B} - \mathbf{C} \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{A}] = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Este resultado se puede generalizar a un poliedro cerrado y, en el caso límite, a una superficie cerrada cualquiera.

Algunas veces, como hemos visto en este caso, resulta conveniente asignar dirección y sentido a un área, es decir, considerar con carácter vectorial a una superficie. Se puede hablar, en estas condiciones del vector *área* o *vector superficie*.



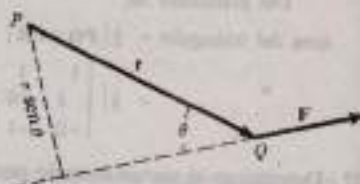
35. Hallar el momento de una fuerza  $\mathbf{F}$  respecto de un punto  $P$ .

El módulo del momento  $\mathbf{M}$  de una fuerza  $\mathbf{F}$  respecto de un punto  $P$  es igual al módulo de la fuerza  $\mathbf{F}$ ,

multiplicando por la distancia del punto  $P$  a la directriz de  $F$ . Por lo tanto, llamando  $r$  al vector que une  $P$  con el origen  $Q$  de  $F$ , resulta,

$$M = F(r \sin \theta) = rF \sin \theta = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}|$$

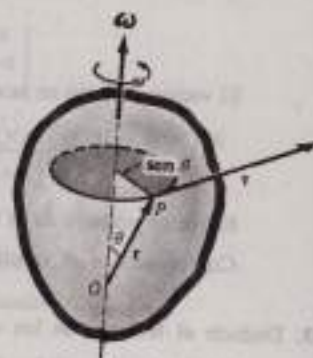
El sentido de  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  corresponde al avance de un sacacorchos en  $P$  con el sentido de rotación tal que lleve a coincidir el primer vector con el segundo por el menor de los ángulos que forman (regla del triedro a derechas que hemos visto anteriormente). El momento de un vector se representa, entonces, por  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ .



36. Un sólido rígido gira alrededor de un eje que pasa por  $O$  con una velocidad angular  $\omega$ . Demostrar que la velocidad lineal  $\mathbf{v}$  de un punto  $P$  del sólido cuyo vector de posición es  $\mathbf{r}$  viene dada por  $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ , siendo  $\omega$  un vector de módulo  $\omega$  y cuya dirección y sentido son las del avance de un sacacorchos que gira en el sentido del movimiento.

Como el punto  $P$  describe una circunferencia de radio  $r \sin \theta$ , el módulo de la velocidad lineal  $\mathbf{v}$  es  $\omega(r \sin \theta) = |\omega \times \mathbf{r}|$ . Por consiguiente,  $\mathbf{v}$  es perpendicular a  $\omega$  y a  $\mathbf{r}$  de forma que  $\mathbf{r}$ ,  $\omega$  y  $\mathbf{v}$  formen un triedro a derechas.

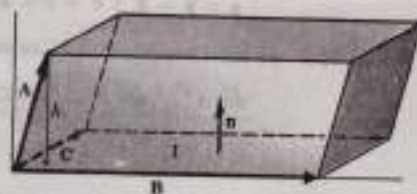
Luego  $\mathbf{v}$  tiene el mismo módulo, dirección y sentido que  $\omega \times \mathbf{r}$ , es decir,  $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ . El vector  $\omega$  se llama *velocidad angular instantánea*.



### PRODUCTOS TRIPLES.

37. Demostrar que el valor absoluto de  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  es igual al volumen de un paralelepípedo de aristas  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$ .

Sea  $\mathbf{n}$  el vector unitario perpendicular al paralelogramo  $I$  con la misma dirección y sentido que  $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ , y  $h$  la distancia del extremo de  $\mathbf{A}$  al paralelogramo  $I$ .



$$\begin{aligned} \text{Volumen del paralelepípedo} &= (\text{altura } h) (\text{área del paralelogramo } I) \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) (|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|) \\ &= \mathbf{A} \cdot (|\mathbf{B} \times \mathbf{C}| \mathbf{n}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \end{aligned}$$

Si  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  no forman un triedro a derechas,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} < 0$  y el volumen  $= |\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})|$ .

38. Si  $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$  demostrar que

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \cdot [(B_2C_3 - B_3C_2)\mathbf{i} + (B_3C_1 - B_1C_3)\mathbf{j} + (B_1C_2 - B_2C_1)\mathbf{k}]$$

$$= A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + A_2(B_3C_1 - B_1C_3) + A_3(B_1C_2 - B_2C_1) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

39. Hallar  $(2i - 3j) \cdot [(i + j - k) \times (3i - k)]$ .

Del problema 38, se obtiene  $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4$ .

Otra método. Haciendo operaciones,

$$\begin{aligned} (2i - 3j) \cdot [i \times (3i - k) + j \times (3i - k) - k \times (3i - k)] \\ &= (2i - 3j) \cdot [3i \times i - i \times k + 3j \times i - j \times k - 3k \times i + k \times k] \\ &= (2i - 3j) \cdot (0 + j - 3k - i - 3j + 0) \\ &= (2i - 3j) \cdot (-i - 2j - 3k) = (2)(-1) + (-3)(-2) + (0)(-3) = 4. \end{aligned}$$

40. Demostrar que  $A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B)$ .

Del problema 38,  $A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$

Teniendo en cuenta que en un determinante si se permutan entre sí dos líneas (filas o columnas) su valor cambia de signo,

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = B \cdot (C \times A)$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = C \cdot (A \times B)$$

41. Demostrar que  $A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C$ .

Del problema 40,  $A \cdot (B \times C) = C \cdot (A \times B) = (A \times B) \cdot C$

En el producto  $A \cdot (B \times C)$  se puede suprimir el paréntesis y escribir  $A \cdot B \times C$ , ya que en este caso no existe ambigüedad; en efecto, las únicas interpretaciones posibles son de  $A \cdot (B \times C)$  y  $(A \cdot B) \times C$ , pero esta última carece de sentido ya que no está definido el producto vectorial de un escalar por un vector.

La igualdad  $A \cdot (B \times C) = A \times B \cdot C$  se puede expresar diciendo que los productos escalar y vectorial, en estas condiciones, son permutables.

42. Demostrar que  $A \cdot (A \times C) = 0$ .

Del problema 41,  $A \cdot (A \times C) = (A \times A) \cdot C = 0$ .

43. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que los vectores  $A$ ,  $B$  y  $C$  sean coplanarios es que  $A \cdot B \times C = 0$ .

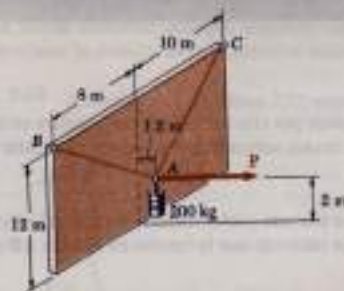
Obsérvese que  $A \cdot B \times C$  no puede significar otra cosa que  $A \cdot (B \times C)$ .

Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son coplanarios, el volumen del paralelepípedo formado por ellos es igual a cero. Luego, según el problema 37,  $A \cdot B \times C = 0$ .

Recíprocamente, si  $A \cdot B \times C = 0$ , el volumen del paralelepípedo formado por los vectores  $A$ ,  $B$  y  $C$  es cero, y, por lo tanto, los vectores son coplanarios.

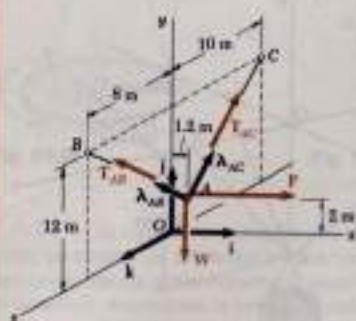
44. Sean  $r_1 = x_1i + y_1j + z_1k$ ,  $r_2 = x_2i + y_2j + z_2k$  y  $r_3 = x_3i + y_3j + z_3k$  los vectores de posición de los





### PROBLEMA RESUELTO 2.9

Un cilindro de 200 kg se sostiene por medio de dos cables  $AB$  y  $AC$ , que se amarran en la parte más alta de una pared vertical. Una fuerza horizontal  $P$  perpendicular a la pared lo sostiene en la posición mostrada. Determinense la magnitud de  $P$  y la tensión en cada cable.



**Solución.** Se escoge al punto  $A$  como cuerpo libre; este punto está sujeto a cuatro fuerzas, tres de las cuales son de magnitud desconocida.

Introduciendo los vectores unitarios  $i$ ,  $j$  y  $k$ , descomponemos cada fuerza en sus componentes rectangulares.

$$P = Pi$$

$$W = -mgj = -(200 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)j = -(1962 \text{ N})j$$

En el caso de  $T_{AB}$  y  $T_{AC}$ , es necesario determinar primero las componentes y las magnitudes de los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{AC}$ . Representando con  $\lambda_{AB}$  el vector unitario a lo largo de  $AB$ , escribimos:

$$\vec{AB} = -(1.2 \text{ m})i + (10 \text{ m})j + (8 \text{ m})k \quad AB = 12.86 \text{ m}$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\vec{AB}}{AB} = -0.0933i + 0.778j + 0.622k$$

$$T_{AB} = T_{AB}\lambda_{AB} = -0.0933T_{AB}i + 0.778T_{AB}j + 0.622T_{AB}k \quad (2)$$

Representando con  $\lambda_{AC}$  el vector unitario a lo largo de  $AC$ , escribimos en forma semejante

$$\vec{AC} = -(1.2 \text{ m})i + (10 \text{ m})j - (8 \text{ m})k \quad AC = 14.19 \text{ m}$$

$$\lambda_{AC} = \frac{\vec{AC}}{AC} = -0.0846i + 0.705j - 0.705k$$

$$T_{AC} = T_{AC}\lambda_{AC} = -0.0846T_{AC}i + 0.705T_{AC}j - 0.705T_{AC}k \quad (3)$$

**La condición de equilibrio.** Puesto que  $A$  está en equilibrio, debemos tener

$$\Sigma \mathbf{F} = 0: \quad T_{AB} + T_{AC} + P + W = 0$$

o sustituyendo de (1), (2) y (3) para las fuerzas y factorizando  $i$ ,  $j$  y  $k$ ,

$$(-0.0933T_{AB} - 0.0846T_{AC} + P)i + (0.778T_{AB} + 0.705T_{AC} - 1962 \text{ N})j + (0.622T_{AB} - 0.705T_{AC})k = 0$$

Haciendo los coeficientes de  $i$ ,  $j$  y  $k$  iguales a cero, escribimos las tres ecuaciones escalares que expresan que la suma de las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  de las fuerzas son, respectivamente, iguales a cero.

$$(\Sigma F_x = 0): \quad -0.0933T_{AB} - 0.0846T_{AC} + P = 0$$

$$(\Sigma F_y = 0): \quad +0.778T_{AB} + 0.705T_{AC} - 1962 \text{ N} = 0$$

$$(\Sigma F_z = 0): \quad +0.622T_{AB} - 0.705T_{AC} = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones, obtenemos

$$P = 235 \text{ N} \quad T_{AB} = 1401 \text{ N} \quad T_{AC} = 1236 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$





### PROBLEMA RESUELTO 3.1

En el extremo de una palanca que se fija a una barra en  $O$  se aplica una fuerza vertical de 100 lb. Determinense a) el momento de la fuerza de 100 lb con respecto a  $O$ ; b) la magnitud de la fuerza horizontal aplicada en  $A$  que produce el mismo momento con respecto a  $O$ ; c) la fuerza mínima que aplicada en  $A$  produce el mismo momento alrededor de  $O$ ; d) a qué distancia de la barra debe aplicarse una fuerza vertical de 240 lb para producir el mismo momento con respecto a  $O$ ; e) si alguna de las fuerzas encontradas en las partes b, c y d es equivalente a la fuerza original.



a. El momento con respecto a  $O$ . La distancia perpendicular desde  $O$  hasta la línea de acción de la fuerza de 100 lb es

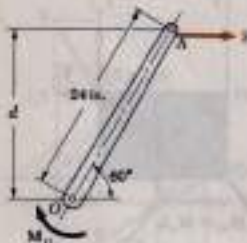
$$d = (24 \text{ in}) \cos 60^\circ = 12 \text{ in}$$

La magnitud del momento con respecto a  $O$  de la fuerza de 100 lb es

$$M_O = Fd = (100 \text{ lb})(12 \text{ in}) = 1200 \text{ lb}\cdot\text{in}$$

Como la fuerza tiende a hacer girar la palanca en el sentido de las manecillas del reloj con respecto a  $O$ , representaremos el momento por un vector  $M_O$  perpendicular al plano de la figura y que apunte hacia el papel. Expresamos este hecho escribiendo

$$M_O = 1200 \text{ lb}\cdot\text{in} \quad \swarrow$$



b. La fuerza horizontal. En este caso, tenemos

$$d = (24 \text{ in}) \sin 60^\circ = 20.8 \text{ in}$$

Puesto que el momento con respecto a  $O$  debe ser 1200 lb·in, escribimos

$$\begin{aligned} M_O &= Fd \\ 1200 \text{ lb}\cdot\text{in} &= F(20.8 \text{ in}) \\ F &= 57.7 \text{ lb} \end{aligned}$$

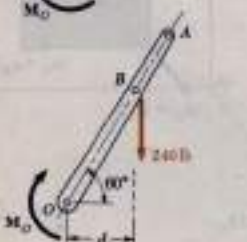
$$F = 57.7 \text{ lb} \quad \rightarrow$$



c. La fuerza mínima. Puesto que  $M_O = Fd$ , el valor mínimo de  $F$  se tiene cuando  $d$  es máxima. Escogiendo la fuerza perpendicular a  $OA$  encontramos  $d = 24 \text{ in}$ ; de modo que

$$\begin{aligned} M_O &= Fd \\ 1200 \text{ lb}\cdot\text{in} &= F(24 \text{ in}) \\ F &= 50 \text{ lb} \end{aligned}$$

$$F = 50 \text{ lb} \quad \swarrow 30^\circ$$



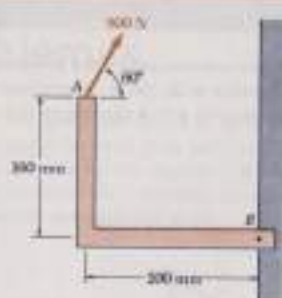
d. La fuerza vertical de 240 lb. En este caso  $M_O = Fd$  conduce a

$$1200 \text{ lb}\cdot\text{in} = (240 \text{ lb})d \quad d = 5 \text{ in}$$

pero  $OB \cos 60^\circ = d$

$$OB = 10 \text{ in} \quad \swarrow$$

e. Ninguna de las fuerzas consideradas en las partes b, c y d es equivalente a la fuerza original de 100 lb. Aunque tienen el mismo momento con respecto a  $O$ , sus componentes  $x$  y  $y$  son diferentes. En otras palabras, aunque cada una de las fuerzas tiende a hacer girar la barra del mismo modo, cada una hace que la palanca tire de la barra en forma diferente.



### PROBLEMA RESUELTO 3.2

Una fuerza de 800 N actúa sobre un soporte como se indica en la figura. Determinese el momento de la fuerza con respecto a B.

**Solución.** El momento  $M_B$  de la fuerza  $F$  con respecto a B se obtiene formando el producto vectorial

$$M_B = r_{A/B} \times F$$

donde  $r_{A/B}$  es el vector trazado de B a A. Descomponiendo  $r_{A/B}$  y  $F$  en sus componentes rectangulares, tenemos

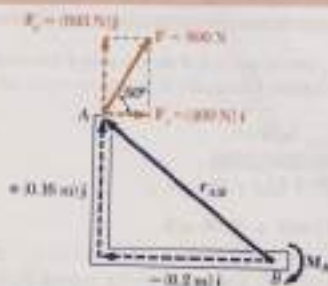
$$\begin{aligned} r_{A/B} &= -(0.2 \text{ m})\mathbf{i} + (0.16 \text{ m})\mathbf{j} \\ F &= (800 \text{ N}) \cos 60^\circ \mathbf{i} + (800 \text{ N}) \sin 60^\circ \mathbf{j} \\ &= (400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j} \end{aligned}$$

Recordando las relaciones (3.7) para el producto vectorial de los vectores unitarios (sección 3.5), obtenemos

$$\begin{aligned} M_B &= r_{A/B} \times F = [-(0.2 \text{ m})\mathbf{i} + (0.16 \text{ m})\mathbf{j}] \times [(400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j}] \\ &= -(138.6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} - (64.0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \\ &= -(202.6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$M_B = 203 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \swarrow$$

El momento  $M_B$  es un vector perpendicular al plano de la figura y que entra al papel.



### PROBLEMA RESUELTO 3.3

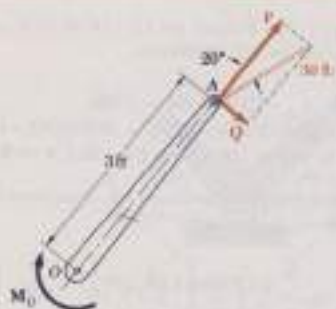
Una fuerza de 30 lb actúa sobre el extremo de una palanca de 3 ft como la indicada. Determinese su momento con respecto a O.

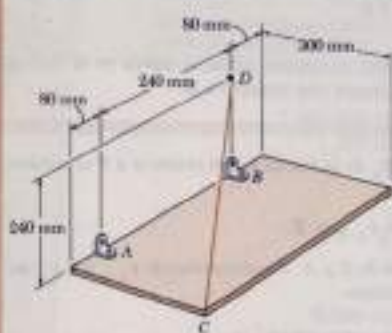
**Indicación.** La fuerza se reemplaza por dos componentes, una componente  $P$  en la dirección de  $OA$  y una componente  $Q$  perpendicular a  $OA$ . Como  $O$  está en la línea de acción de  $P$ , el momento de  $P$  con respecto a  $O$  es cero y el momento de la fuerza de 30 lb se reduce al momento de  $Q$ , que está dirigido en el sentido de las manecillas del reloj, por lo que se representa con un escalar negativo.

$$\begin{aligned} Q &= (30 \text{ lb}) \sin 20^\circ = 10.26 \text{ lb} \\ M_O &= -Q(3 \text{ ft}) = -(10.26 \text{ lb})(3 \text{ ft}) = -30.8 \text{ lb} \cdot \text{ft} \end{aligned}$$

Ya que el valor obtenido para el escalar  $M_O$  es negativo, el momento  $M_O$  se dirige hacia el papel. Escribimos

$$M_O = 30.8 \text{ lb} \cdot \text{ft} \quad \swarrow$$





### PROBLEMA RESUELTO 3.4

Una placa rectangular está sostenida por soportes en  $A$  y  $B$  y por un alambre  $CD$ . Sabiendo que la tensión en el alambre es de 200 N, determínese el momento con respecto a  $A$  de la fuerza ejercida por el alambre en el punto  $C$ .

**Solución.** El momento  $M_A$  con respecto a  $A$  de la fuerza  $F$  ejercida por el alambre sobre el punto  $C$  se obtiene formando el producto vectorial

$$M_A = r_{C/A} \times F \quad (1)$$

donde  $r_{C/A}$  es el vector que va de  $A$  a  $C$ .

$$r_{C/A} = \vec{AC} = (0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.08 \text{ m})\mathbf{k} \quad (2)$$

y donde  $F$  es la fuerza de 200 N dirigida a lo largo de  $CD$ . Introduciendo el vector unitario  $\lambda = \vec{CD}/CD$ , escribimos

$$F = F\lambda = (200 \text{ N}) \frac{\vec{CD}}{CD} \quad (3)$$

Descomponiendo al vector  $\vec{CD}$  en sus componentes rectangulares tenemos

$$\vec{CD} = -(0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.24 \text{ m})\mathbf{j} - (0.32 \text{ m})\mathbf{k} \quad CD = 0.50 \text{ m}$$

Sustituyendo en (3) obtenemos

$$\begin{aligned} F &= \frac{200 \text{ N}}{0.50 \text{ m}} [-(0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.24 \text{ m})\mathbf{j} - (0.32 \text{ m})\mathbf{k}] \\ &= -(120 \text{ N})\mathbf{i} + (96 \text{ N})\mathbf{j} - (128 \text{ N})\mathbf{k} \end{aligned} \quad (4)$$

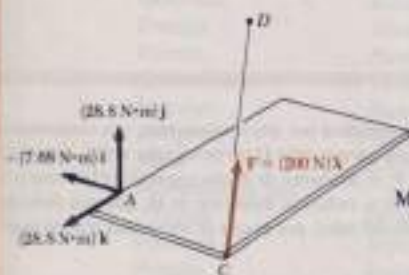
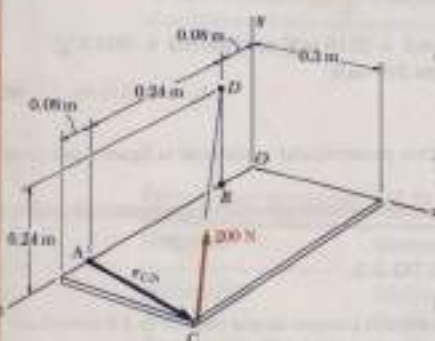
Usando las expresiones para  $r_{C/A}$  y  $F$  dadas por (2) y (4) en (1) y recordando las relaciones (3.7) de la sección 3.5, obtenemos

$$\begin{aligned} M_A &= r_{C/A} \times F = (0.3\mathbf{i} + 0.08\mathbf{k}) \times (-120\mathbf{i} + 96\mathbf{j} - 128\mathbf{k}) \\ &= (0.3)(96)\mathbf{k} + (0.3)(-128)(-\mathbf{j}) + (0.08)(-120)\mathbf{j} + (0.08)(96)(-\mathbf{i}) \\ M_A &= -(7.68 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \end{aligned}$$

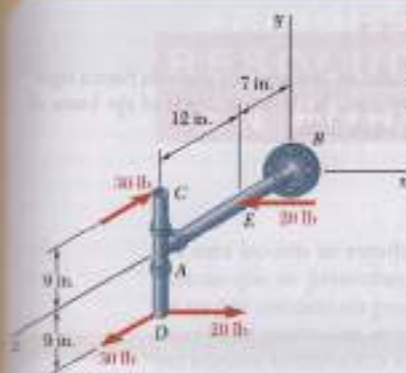
**Solución opcional.** Como se indicó en la sección 3.8, el momento  $M_A$  puede expresarse en la forma de un determinante:

$$M_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

$$M_A = -(7.68 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$$







### PROBLEMA RESUELTO 3.6

Determine las componentes del par simple que es equivalente a los dos pares mostrados.



### SOLUCIÓN

Los cálculos se simplificarán si se fijan en A dos fuerzas de 20 lb iguales y opuestas. Esto permitirá reemplazar al par original de las fuerzas de 20 lb por dos nuevos pares originados por fuerzas de 20 lb, uno de los cuales se encuentra en el plano  $xz$ ; el otro se encuentra en un plano paralelo al plano  $xy$ . Los tres pares mostrados en el croquis adjunto pueden ser representados por tres vectores de par  $M_x$ ,  $M_y$  y  $M_z$  dirigidos a lo largo de los ejes coordenados. Los momentos correspondientes son

$$M_z = -(30 \text{ lb})(18 \text{ in.}) = -540 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

$$M_y = +(20 \text{ lb})(12 \text{ in.}) = +240 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

$$M_x = +(20 \text{ lb})(9 \text{ in.}) = +180 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

Estos tres momentos representan las componentes del par simple  $\mathbf{M}$ , equivalente a los pares dados. Así, se escribe

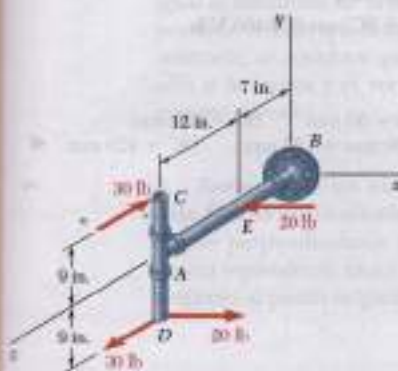
$$\mathbf{M} = -(540 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{i} + (240 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{j} + (180 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

**Solución alternativa.** Las componentes del par equivalente simple  $\mathbf{M}$  también pueden ser determinadas calculando la suma de los momentos de las cuatro fuerzas dadas con respecto a un punto arbitrario. Si se elige al punto D, se escribe

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_D = (18 \text{ in.})\mathbf{j} \times (-30 \text{ lb})\mathbf{k} + [(9 \text{ in.})\mathbf{j} - (12 \text{ in.})\mathbf{k}] \times (-20 \text{ lb})\mathbf{i}$$

y después de calcular los diversos productos cruz se tiene

$$\mathbf{M} = -(540 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{i} + (240 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{j} + (180 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$



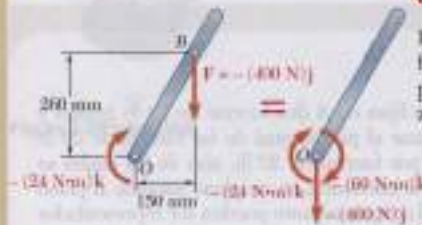




### PROBLEMA RESUELTO 3.7

Reemplace el par y la fuerza mostrados en la figura por una sola fuerza equivalente aplicada a la palanca. Determine la distancia desde el eje hasta el punto de aplicación de esta fuerza equivalente.

### SOLUCIÓN



Primero se reemplazan la fuerza y el par dados por un sistema equivalente fuerza-par en O. La fuerza  $\mathbf{F} = -(400 \text{ N})\mathbf{j}$  se mueve a O y al mismo tiempo se agrega un momento  $\mathbf{M}_O$  igual al momento con respecto a O, de la fuerza en su posición original.

$$\mathbf{M}_O = \overline{OB} \times \mathbf{F} = [(0.150 \text{ m})\mathbf{i} + (0.260 \text{ m})\mathbf{j}] \times (-400 \text{ N})\mathbf{j} \\ = -(60 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$$

Este par se suma al par formado por las dos fuerzas de 200 N, cuyo momento es igual a  $-(24 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$  y se obtiene un par cuyo momento es igual a  $-(84 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ . Este último par puede ser eliminado aplicando la fuerza  $\mathbf{F}$  en un punto C seleccionado de manera que

$$-(84 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} = \overline{OC} \times \mathbf{F} \\ = [(OC) \cos 60^\circ \mathbf{i} + (OC) \sin 60^\circ \mathbf{j}] \times (-400 \text{ N})\mathbf{j} \\ = -(OC) \cos 60^\circ (400 \text{ N})\mathbf{k}$$

Entonces, se concluye

$$(OC) \cos 60^\circ = 0.210 \text{ m} = 210 \text{ mm} \quad OC = 420 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$



**Solución alternativa.** Como el efecto de un par no depende de su ubicación, el par cuyo momento es igual a  $-(24 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$  puede trasladarse a B; por tanto, se obtiene un sistema fuerza-par en B. Ahora el par puede ser eliminado aplicando la fuerza  $\mathbf{F}$  en un punto C elegido de manera que

$$-(24 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} = \overline{BC} \times \mathbf{F} \\ = -(BC) \cos 60^\circ (400 \text{ N})\mathbf{k}$$

Así, se concluye que

$$(BC) \cos 60^\circ = 0.060 \text{ m} = 60 \text{ mm} \quad BC = 120 \text{ mm} \\ OC = OB + BC = 300 \text{ mm} + 120 \text{ mm} \quad OC = 420 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

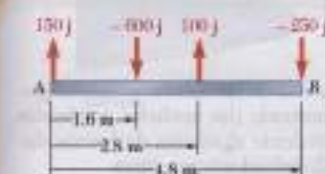




### PROBLEMA RESUELTO 3.8

Una viga de 4.80 m de longitud está sujeta a las fuerzas mostradas en la figura. Redúzcase el sistema de fuerzas dado a: a) un sistema equivalente fuerza-par en A, b) un sistema equivalente fuerza-par en B y c) una sola fuerza o resultante.

Note: Como las reacciones en los apoyos no están incluidas en el sistema de fuerzas dado, el sistema no mantendrá la viga en equilibrio.



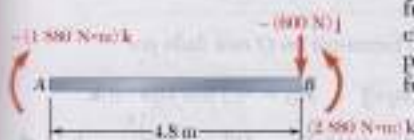
### SOLUCIÓN

a) **Sistema fuerza-par en A.** El sistema fuerza-par en A equivalente al sistema de fuerzas dado consta de una fuerza  $\mathbf{R}$  y de un par  $\mathbf{M}_A^R$  definidos como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \Sigma \mathbf{F} \\ &= (150 \text{ N})\mathbf{j} - (600 \text{ N})\mathbf{j} + (100 \text{ N})\mathbf{j} - (250 \text{ N})\mathbf{j} = -(600 \text{ N})\mathbf{j} \\ \mathbf{M}_A^R &= \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \\ &= (1.6\mathbf{i}) \times (-600\mathbf{j}) + (2.8\mathbf{i}) \times (100\mathbf{j}) + (4.8\mathbf{i}) \times (-250\mathbf{j}) \\ &= -(1890 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

Por tanto, el sistema equivalente fuerza-par en A está dado por

$$\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow \quad \mathbf{M}_A^R = 1890 \text{ N} \cdot \text{m} \curvearrowleft$$



b) **Sistema fuerza-par en B.** Se pretende encontrar un sistema fuerza-par en B equivalente al sistema fuerza-par en A determinado en el inciso a). La fuerza  $\mathbf{R}$  permanece inalterada, pero se debe determinar un nuevo par  $\mathbf{M}_B^R$  cuyo momento sea igual al momento con respecto a B del sistema fuerza-par encontrado en el inciso a). Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_B^R &= \mathbf{M}_A^R + \overrightarrow{BA} \times \mathbf{R} \\ &= -(1890 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} + (-4.8 \text{ m})\mathbf{i} \times (-600 \text{ N})\mathbf{j} \\ &= -(1890 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} + (2880 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} = +(1000 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

De esta forma, el sistema fuerza-par en B está dado por

$$\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow \quad \mathbf{M}_B^R = 1000 \text{ N} \cdot \text{m} \curvearrowright$$



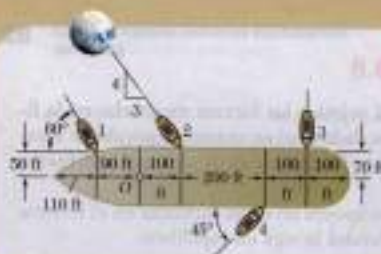
c) **Fuerza única o resultante.** La resultante del sistema de fuerzas dado es igual a  $\mathbf{R}$  y su punto de aplicación debe ser tal que el momento de  $\mathbf{R}$  con respecto a A sea igual a  $\mathbf{M}_A^R$ . El cual se escribe

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_A^R \\ x\mathbf{i} \times (-600 \text{ N})\mathbf{j} &= -(1890 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \\ -x(600 \text{ N})\mathbf{k} &= -(1890 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

y se concluye que  $x = 3.13 \text{ m}$ . Por tanto, la fuerza única equivalente al sistema dado está definida como

$$\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow \quad x = 3.13 \text{ m} \curvearrowleft$$





### PROBLEMA RESUELTO 3.9

Se usan cuatro remolcadores para llevar a un trasatlántico a su muelle. Cada remolcador ejerce una fuerza de 5 000 lb en la dirección mostrada en la figura. Determine: a) el sistema equivalente fuerza-par en el mástil mayor  $O$  y b) el punto sobre el casco donde un solo remolcador más potente debería empujar al barco para producir el mismo efecto que los cuatro remolcadores originales.

### SOLUCIÓN

a) **Sistema fuerza-par en  $O$ .** Cada una de las fuerzas se descompone en sus componentes en el diagrama mostrado (las unidades empleadas son kips). El sistema fuerza-par en  $O$  equivalente al sistema de fuerzas dado consta de una fuerza  $\mathbf{R}$  y de un par  $\mathbf{M}_O^R$  definidos como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \Sigma \mathbf{F} \\ &= (2.50\mathbf{i} - 4.33\mathbf{j}) + (3.00\mathbf{i} - 4.00\mathbf{j}) + (-5.00\mathbf{j}) + (3.54\mathbf{i} + 3.54\mathbf{j}) \\ &= 9.04\mathbf{i} - 9.79\mathbf{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O^R &= \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \\ &= (-90\mathbf{i} + 50\mathbf{j}) \times (2.50\mathbf{i} - 4.33\mathbf{j}) \\ &\quad + (100\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (3.00\mathbf{i} - 4.00\mathbf{j}) \\ &\quad + (400\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (-5.00\mathbf{j}) \\ &\quad + (300\mathbf{i} - 70\mathbf{j}) \times (3.54\mathbf{i} + 3.54\mathbf{j}) \\ &= (390 - 125 - 400 - 210 - 2\,000 + 1\,062 + 248)\mathbf{k} \\ &= -1\,035\mathbf{k}\end{aligned}$$

Por tanto, el sistema equivalente fuerza-par en  $O$  está dado por

$$\mathbf{R} = (9.04 \text{ kips})\mathbf{i} - (9.79 \text{ kips})\mathbf{j} \quad \mathbf{M}_O^R = -1\,035 \text{ kips} \cdot \text{ft} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{R} = 13.33 \text{ kips} \angle 47.3^\circ \quad \mathbf{M}_O^R = 1\,035 \text{ kips} \cdot \text{ft} \mathbf{j} \quad \blacktriangleleft$$

**Comentario.** Como todas las fuerzas están contenidas en el plano de la figura, podría haberse anticipado que la suma de sus momentos iba a ser perpendicular a dicho plano. Obsérvese que el momento de la componente de cada fuerza pudo obtenerse directamente a partir del diagrama mostrado que forma, primero, el producto de la magnitud de dicha componente con una distancia perpendicular hasta  $O$  y luego le asigna a este producto un signo positivo o negativo según el sentido del momento.

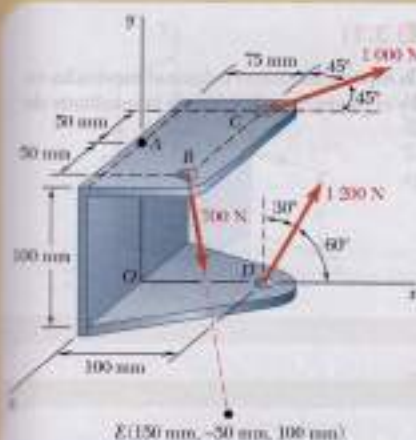
b) **Remolcador único.** La fuerza ejercida por un solo remolcador debe ser igual a  $\mathbf{R}$  y su punto de aplicación  $A$  debe ser tal que el momento de  $\mathbf{R}$  con respecto a  $O$  sea igual a  $\mathbf{M}_O^R$ . Si se observa que el vector de posición de  $A$  es

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + 70\mathbf{j}$$

se escribe

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_O^R \\ (x\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (9.04\mathbf{i} - 9.79\mathbf{j}) &= -1\,035\mathbf{k} \\ -x(9.79)\mathbf{k} - 633\mathbf{k} &= -1\,035\mathbf{k} \quad x = 41.1 \text{ ft} \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$





### PROBLEMA RESUELTO 3.10

Tres cables están unidos a una ménsula, como se muestra en la figura. Reemplace las fuerzas que ejercen los cables por un sistema equivalente fuerza-par en A.

### SOLUCIÓN

Primero se determinan los vectores de posición relativa trazados desde el punto A hasta los puntos de aplicación de cada una de las fuerzas y se descomponen las fuerzas en sus componentes rectangulares. Observe que  $\mathbf{F}_B = (700 \text{ N})\lambda_{BE}$ , donde

$$\lambda_{BE} = \frac{\overrightarrow{BE}}{BE} = \frac{75\mathbf{i} - 150\mathbf{j} + 50\mathbf{k}}{175}$$

Con el uso de metros y newtons se tiene

$$\mathbf{r}_{B/A} = \overrightarrow{AB} = 0.075\mathbf{i} + 0.050\mathbf{k} \quad \mathbf{F}_B = 300\mathbf{i} - 600\mathbf{j} + 200\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_{C/A} = \overrightarrow{AC} = 0.075\mathbf{i} - 0.050\mathbf{k} \quad \mathbf{F}_C = 707\mathbf{i} - 707\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_{D/A} = \overrightarrow{AD} = 0.100\mathbf{i} - 0.100\mathbf{j} \quad \mathbf{F}_D = 600\mathbf{i} + 1039\mathbf{j}$$

El sistema fuerza-par en A, equivalente al sistema de fuerzas dado, consta de una fuerza  $\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}$  y de un par  $\mathbf{M}_A^R = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ . La fuerza  $\mathbf{R}$  se obtiene fácil al sumar, respectivamente, las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  de las fuerzas:

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} = (1607 \text{ N})\mathbf{i} + (439 \text{ N})\mathbf{j} - (507 \text{ N})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

El cálculo de  $\mathbf{M}_A^R$  se simplifica si los momentos de las fuerzas se expresan en forma de determinantes (sección 3.8):

$$\mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{F}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & 0.050 \\ 300 & -600 & 200 \end{vmatrix} = 30\mathbf{i} - 45\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F}_C = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & -0.050 \\ 707 & 0 & -707 \end{vmatrix} = 17.68\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_{D/A} \times \mathbf{F}_D = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.100 & -0.100 & 0 \\ 600 & 1039 & 0 \end{vmatrix} = 103.9\mathbf{k}$$

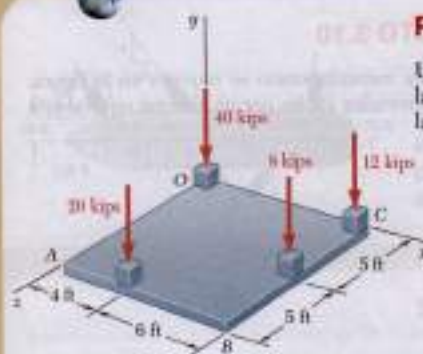
Con la suma de las expresiones obtenidas, se tiene

$$\mathbf{M}_A^R = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = (30 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (17.68 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (103.9 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

Las componentes rectangulares de la fuerza  $\mathbf{R}$  y del par  $\mathbf{M}_A^R$  se muestran en el croquis adjunto.







### PROBLEMA RESUELTO 3.11

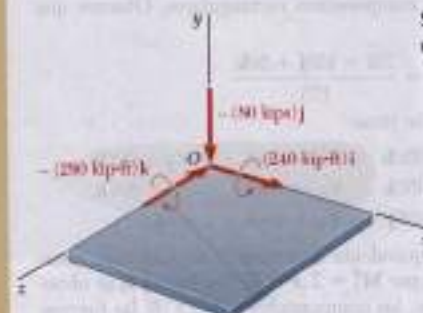
Una losa de cimentación cuadrada soporta las cuatro columnas mostradas en la figura. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las cuatro cargas.

### SOLUCIÓN

Primero, el sistema de fuerzas se reduce a un sistema fuerza-par en el origen del sistema de coordenadas  $O$ . Este sistema fuerza-par consta de una fuerza  $\mathbf{R}$  y un vector de par  $\mathbf{M}_O^R$  que se definen de la siguiente forma:

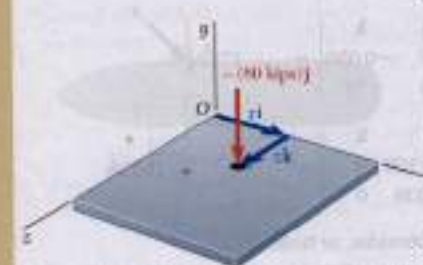
$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} \quad \mathbf{M}_O^R = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

Se determinan los vectores de posición de los puntos de aplicación de cada una de las fuerzas y los cálculos se arreglan en forma tabular.



| $\mathbf{r}$ , ft            | $\mathbf{F}$ , kips          | $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , kip · ft        |
|------------------------------|------------------------------|--------------------------------------------------|
| $\mathbf{0}$                 | $-40\mathbf{j}$              | $\mathbf{0}$                                     |
| $10\mathbf{i}$               | $-12\mathbf{j}$              | $-120\mathbf{k}$                                 |
| $10\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$ | $-8\mathbf{j}$               | $40\mathbf{i} - 80\mathbf{k}$                    |
| $4\mathbf{i} + 10\mathbf{k}$ | $-20\mathbf{j}$              | $200\mathbf{i} - 80\mathbf{k}$                   |
|                              | $\mathbf{R} = -80\mathbf{j}$ | $\mathbf{M}_O^R = 240\mathbf{i} - 290\mathbf{k}$ |

Como la fuerza  $\mathbf{R}$  y el vector de par  $\mathbf{M}_O^R$  son mutuamente perpendiculares, el sistema fuerza-par obtenido puede reducirse aún más a una sola fuerza  $\mathbf{R}$ . El nuevo punto de aplicación de  $\mathbf{R}$  será seleccionado en el plano de la losa de manera que el momento de  $\mathbf{R}$  con respecto a  $O$  sea igual a  $\mathbf{M}_O^R$ . Si se representa con  $\mathbf{r}$  al vector de posición del punto de aplicación deseado y con  $x$  y  $z$  a sus coordenadas, se escribe



$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_O^R \\ (x\mathbf{i} + z\mathbf{k}) \times (-80\mathbf{j}) &= 240\mathbf{i} - 290\mathbf{k} \\ -80x\mathbf{k} + 80z\mathbf{i} &= 240\mathbf{i} - 290\mathbf{k} \end{aligned}$$

a partir de lo escrito, se encuentra que

$$\begin{aligned} -80x &= -290 & 80z &= 240 \\ x &= 3.50 \text{ ft} & z &= 3.00 \text{ ft} \end{aligned}$$

Se concluye que la resultante del sistema de fuerzas dado es igual a

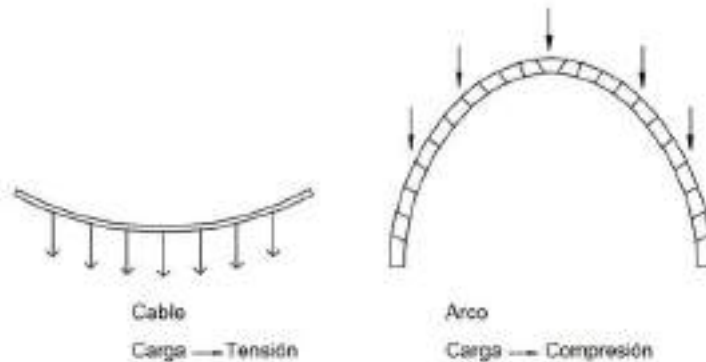
$$\mathbf{R} = 80 \text{ kips} \downarrow \quad \text{en } x = 3.50 \text{ ft}, z = 3.00 \text{ ft} \quad \blacktriangleleft$$

# Cables y Arcos

## 2. CABLES Y ARCOS

Los cables son utilizados para salvar grandes distancias. Los cables suelen ser flexibles y soportan sus cargas a **TENSIÓN**; como están así no resultan inestables ni se desploman repentinamente como puede suceder con vigas y armadura. A diferencia de los tirantes, la carga extrema no se aplica a lo largo del eje del cable y, a consecuencia, el cable adopta la forma de la carga aplicada. Las limitantes en los cables son: El peso, El método de Anclaje.

Los Arcos logran su resistencia en **COMPRESIÓN** ya que tienen curvatura inversa al Cable y al diagrama de Momento. El Momento es originado por la rigidez que necesita el Arco para mantener su forma. El Arco es una figura muy utilizada en la Mampostería Clásica.



## CABLES

A derivarse las reacciones necesarias entre la fuerza en el cable y su pendiente, se plantea la hipótesis: el cable es perfectamente flexible e inextensible. Debido a la flexibilidad el cable no ofrece resistencia al Esfuerzo cortante y al momento flexionante y por ello, la fuerza que actúa en el cable es siempre tangente a este en los puntos a lo largo de su longitud.

### CABLES SOMETIDOS A CARGAS CONCENTRADAS:

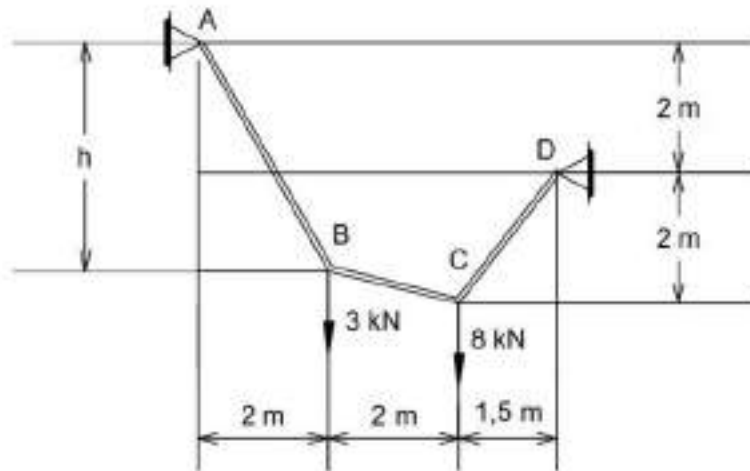
Cuando un cable de peso **DESPRECIABLE** soporta varias cargas concentradas, el cable adopta la forma de varios segmentos de línea recta, donde cada uno de los cuáles esta sometida a una fuerza constante de tensión.

### EJEMPLO:

Determina la tensión en cada segmento del cable mostrado en la figura ¿qué valor tiene "h"?

**EJEMPLO:**

Determina la tensión en cada segmento del cable mostrado en la figura ¿qué valor tiene "h"?

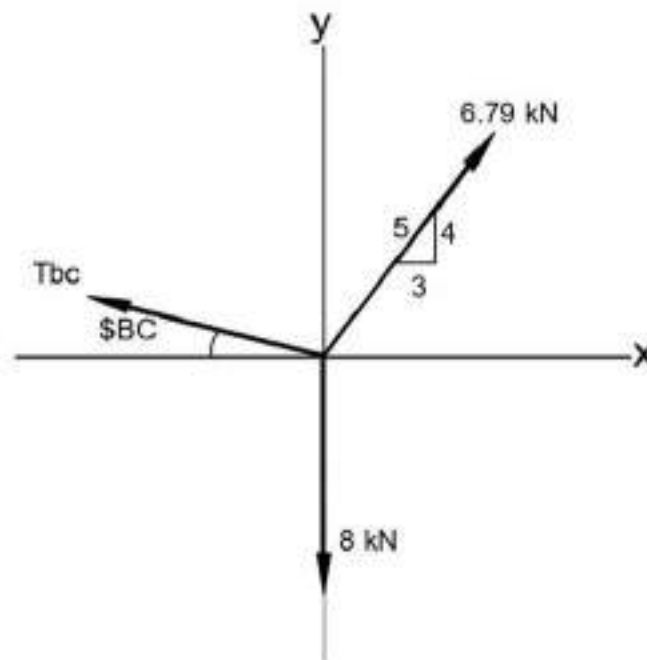


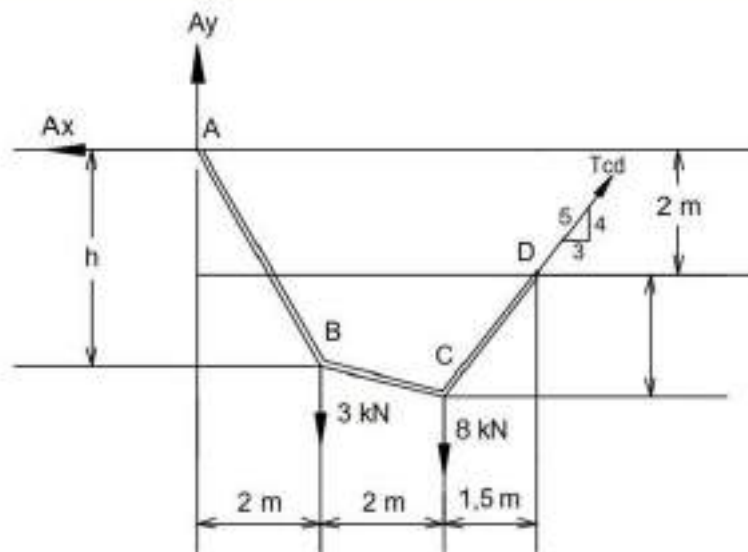
$$\sum M_A = 0; T_{cd}\left(\frac{3}{5}\right)(2m) + T_{cd}\left(\frac{4}{5}\right)(5.5m) - 3kN(2m) - 8kN(4m) = 0$$
$$T_{cd} = 6.79kN$$

Analizando punto C

$$\sum F_x = 0; 6.79kN\left(\frac{3}{5}\right) - T_{bc}\cos\angle Bc = 0$$

$$\sum F_y = 0; 6.79kN\left(\frac{4}{5}\right) - 8kN + T_{bc}\sin\angle Bc = 0$$





Punto B:

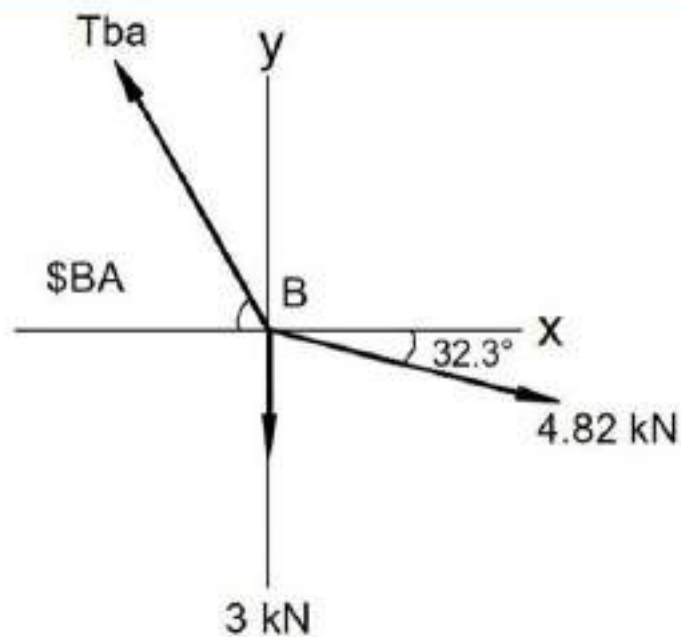
$$\sum F_x = 0; -T_{ba} \cos \theta_{BA} + 4.82 \text{ kN} \cos 32.3^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0; T_{ba} \sin \theta_{BA} - 4.82 \text{ kN} \sin 32.3^\circ - 3 \text{ kN} = 0$$

$$\theta_{BA} = 53.8^\circ$$

$$T_{ba} = 6.90 \text{ kN}$$

$$\text{Entonces: } h = (2\text{m}) \tan 53.8^\circ = 2.74\text{m}$$



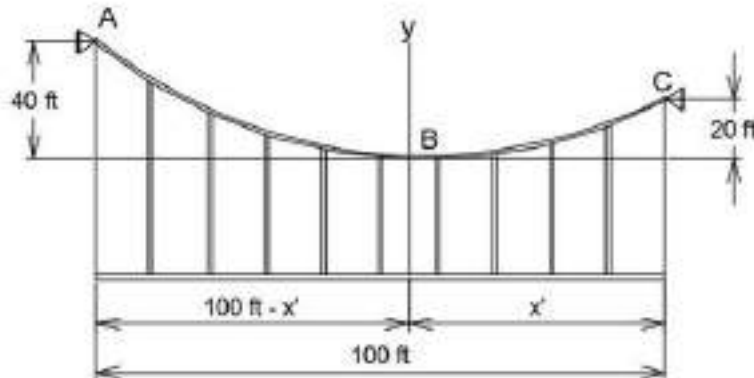


### Cables Sometidos a Cargas Uniformes:

Para este tipo de problema se asume una carga en su distribución. Entonces es importante el concepto de diferencial, donde se va integrando pequeñas secciones de carga una función a la curvatura del cable.

#### EJEMPLO:

El cable de la figura soporta un trabe con peso de 850 lb/ft. Determina la tensión en el cable en los puntos A, B y C. ¿Cuál es la fuerza en cada uno de los colgantes?



El origen se fija en el punto B, que es el punto mas bajo del cable y donde la pendiente es cero.

La ecuación parabólica del cable es:

$$Y = \frac{W_s X^2}{2Fh} = \frac{(850 \text{ lb / ft}) x^2}{2Fh} = \frac{425 x^2}{Fh}$$

(1)

Suponiendo que C se encuentre a  $X'$  de B

$$20 = \frac{(425 X'^2)}{Fh}$$

$$Fh = 21.25 X'^2$$

(2)

También para A:

$$40 = \frac{(425 / Fh) [(100 - X')^2]}{1}$$

$$X'^2 + 200 X' - 10000 = 0$$

$$X' = 41.42 \text{ ft}$$

Entonces de la conclusión de los puntos B y A:

$$Fh = 21.25 (41.42)^2 = 36459.2 \text{ lb}$$

$$dy/dx = (850 / 36459.2) X = 0.02331 X$$

Para A:  $X = -(100 - 41.42) = -58.58 \text{ ft}$

$$\tan \angle A = dy/dx = 0.02331 (-58.58) = -1.366$$

$$\angle A = -53.8^\circ$$

$$TA = Fh / \cos \angle A = 36459.2 / \cos(53.8^\circ) = \mathbf{61.7 \text{ kip}}$$

Para B  $X = 0$

$$\tan \angle = dy/dx = 0.02331 (0) = 0$$

$$\angle A = 0^\circ$$

$$TA = Fh / \cos \angle A = 36459.2 / \cos(0^\circ) = \mathbf{36.5 \text{ kip}}$$

Para A:  $X = -(100 - 41.42) = -58.58 \text{ ft}$

$$\tan \angle A = dy/dx = 0.02331(-58.58) = -1.366$$

$$\angle A = -53.8^\circ$$

$$TA = Fh / \cos \angle A = 36459.2 / \cos(53.8^\circ) = \underline{\underline{61.7 \text{ kip}}}$$

Para B  $X = 0$

$$\tan \angle S = dy/dx = 0.02331(0) = 0$$

$$\angle A = 0^\circ$$

$$TA = Fh / \cos \angle A = 36459.2 / \cos(0^\circ) = \underline{\underline{36.5 \text{ kip}}}$$

Para C:  $X = 41.42$

$$\tan \angle C = dy/dx = 0.02331(41.42) = 0.9657$$

$$\angle A = 44.0^\circ$$

$$TA = Fh / \cos \angle A = 36459.2 / \cos(44.0^\circ) = \underline{\underline{50.7 \text{ kip}}}$$

La fuerza en cada trabe:  $(850 \text{ lb/ft} \times 100 \text{ ft}) / (\text{no Trabes})$ .

## ARCOS

Al igual que los cables, los arcos pueden utilizarse para reducir los momentos flexionantes en estructuras de grandes luces ó claros. Esencialmente, un arco es un cable por lo que recibe su carga principal en COMPRESIÓN aunque, debido a su rigidez debe soportar cierta flexión y cortante, que depende de la forma de carga.

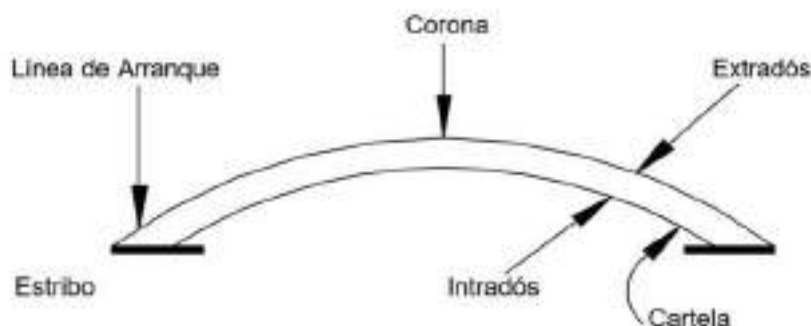
En particular, si el arco tiene una forma Parabólica y está sometido a una carga vertical uniforme distribuida horizontalmente, entonces del análisis de Cables se infiere que sólo fuerzas Compresivas son resistidas por el arco.

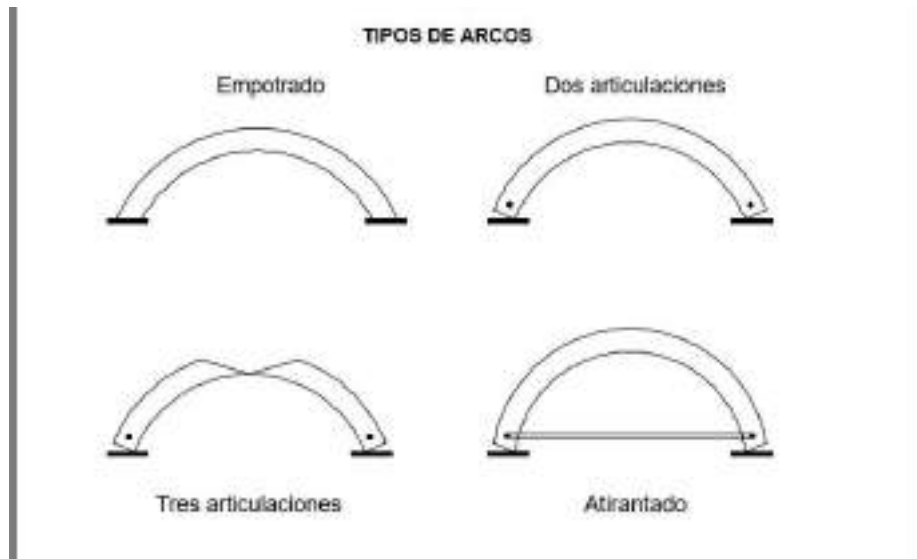
## ARCOS

Al igual que los cables, los arcos pueden utilizarse para reducir los momentos flexionantes en estructuras de grandes luces ó claros. Esencialmente, un arco es un cable por lo que recibe su carga principal en COMPRESIÓN aunque, debido a su rigidez debe soportar cierta flexión y cortante, que depende de la forma de carga.

En particular, si el arco tiene una forma Parabólica y está sometido a una carga vertical uniforme distribuida horizontalmente, entonces del análisis de Cables se infiere que sólo fuerzas Compresivas son resistidas por el arco.

## NOMENCLATURA





### ARCO EMPOTRADO

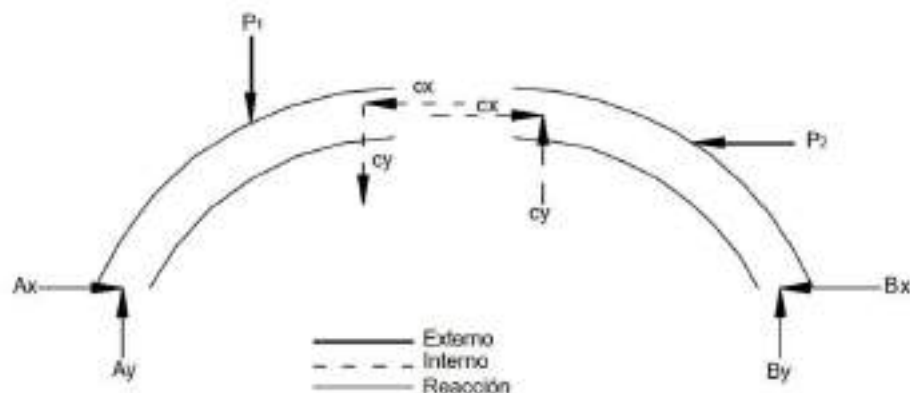
Suele fabricarse de concreto reforzado. Aunque puede requerir una menor cantidad de material para su construcción que otros arcos, debe tener una cimentación muy sólida; su indeterminación es de tercer grado, además de poder presentar esfuerzos adicionales por asentamientos tanto de terreno (carga) como de material (diferencial).

### ARCO DOS ARTICULACIONES

Se construye generalmente en metal ó en madera; es indeterminado en primer grado y, aunque menos rígido que un empotrado es menos insensible a los asentamientos. Puede hacerse de este tipo de arco una estructura determinada si una articulación es sustituida por un rodillo, pero se elimina la capacidad de la estructura de resistir flexión a lo largo de su claro, con lo que se acabaría una viga curva y no un arco.

### ARCO TRES ARTICULACIONES (curso)

También se fabrica en madera ó en metal, es estáticamente determinado y, no se ve afectado por asentamientos y cambios de temperatura.

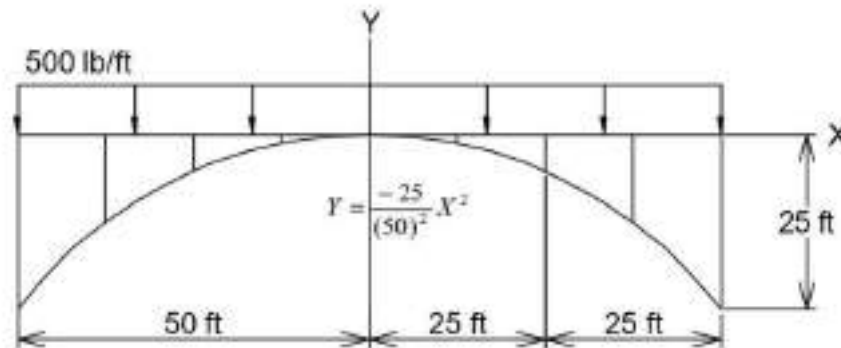


### ARCO ATIRANTADO

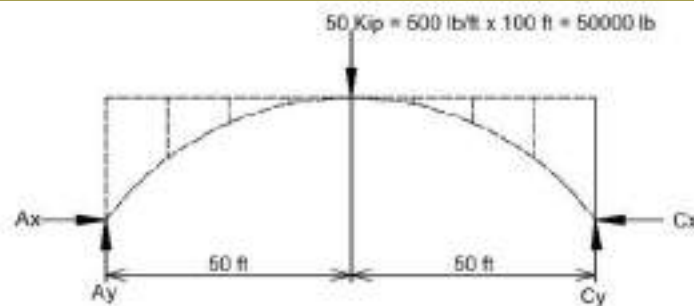
La estructura se comporta como una unidad rígida pues el tirante soporta la componente horizontal del empuje de los soportes. No es afectado por el asentamiento de los soportes.

### EJEMPLO:

Un puente de arco de timpano abierto triarticulado tiene una forma parabólica y soporta una carga uniforme. Demuéstrese que el arco está sometido sólo a compresión axial en el punto intermedio "D" a lo largo de su eje. Suponga que la carga se transmite uniformemente a las costillas del arco.



Aquí los soportes están a la misma altura. Aplicando las ecuaciones de equilibrio:

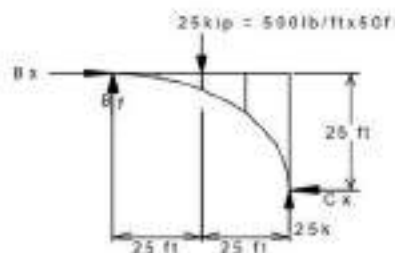


Analizando el Arco Entero :

$$\sum M_A = 0 \quad C_y(100 \text{ ft}) - 50 \text{ kip} \times (50 \text{ ft}) = 0, \quad C_y = 25 \text{ kip} \quad \text{y ahora la mitad derecha:}$$

$$\sum M_D = 0 \quad -25 \text{ kip} \times (25 \text{ ft}) + 25 \text{ kip} \times (50 \text{ ft}) - C_x(25 \text{ ft}) = 0, \quad C_x = 25 \text{ kip}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow B_x = 25 \text{ k} \quad \uparrow \sum F_y = 0 \quad B_y - 25 \text{ k} + 25 \text{ k} = 0, \quad B_y = 0$$



Una sección del arco tomada por el punto D,  $x = -25(25)^2/(50)^2 = -6.25 \text{ ft}$ , dónde la pendiente del segmento en D es:



$$\tan\theta = \partial y / \partial x = \left( \frac{-50x}{50^2} \right)_{x=25,0} = -0.5 \quad \theta = -26.6^\circ$$

Aplicando ecuaciones de equilibrio (ver gráfico inferior)

$$\sum F_x = 0 \rightarrow 25 \text{ kip} - Nd \cos 26.6^\circ + Vd \sin 26.6^\circ = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \quad -12.5 \text{ kip} + Nd \sin 26.6^\circ - Vd \cos 26.6^\circ = 0$$

$$\sum M_D = 0 \quad Md + 12.5 \text{ kip}(12.5 \text{ ft}) - 25 \text{ kip}(6.25 \text{ ft}) = 0$$

$Nd = 28.0 \text{ k}$  Esf. De Compresión, paralelo

$Vd = 0$  Esfuerzo de Corte, ortogonal

$Md = 0$  Momento Interno

