Límite: El Final de una *Tendencia*

J. Saquimux

17 de agosto de 2017

En memoria del profesor
de MB1, CUNOC
Ing. Hugo Pineda. Q.E.D.

1. El límite

Calculemos el límite (1),

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\sqrt{x+R^2}-R}{\sqrt{x+r^2}-r}\right] \tag{1}$$

2. Estimación con *tendencias* geométricas

Puesto que la función involucra radicales, construyamos triángulos rectángulos cuyas hipotenusas representen dichos radicales, dispongámoslos como se ilustra en la Figura 1, y tracemos circunferencias con centros en A y C .

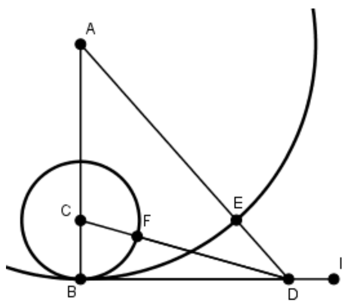

Figura 1: Construcción geométrica para estimar el límite (1).

Si $BD=\sqrt{x}, AB=R$, y $CB=r$. Tenemos que

$$ED=\sqrt{x+R^2}-R \quad \text{y} \quad FD=\sqrt{x+r^2}-r \tag{2}$$

Trazando segmentos tangentes a las circunferencias en los puntos F y E con extremos en en H y G respectivamente sobre el segmento BD como se ilustra en la Figura 2.

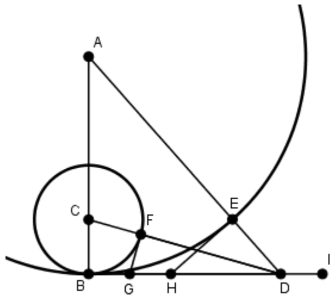

Figura 2: Trazos adicionales para estimar el límite (1).

Se forman los pares de triangunos semejantes $\triangle BDA \sim \triangle HDE$. y $\triangle BDC \sim \triangle GDF$ De los cuales obtenemos las proporciones dadas en (3),

$$\frac{ED}{BD} = \frac{EH}{AB} = \frac{EH}{R} \quad \text{y} \quad \frac{FD}{BD} = \frac{FG}{BC} = \frac{FG}{r} \tag{3}$$

De las proporciones en (3), tenemos,

$$\frac{ED}{FD} = \frac{r}{R}\frac{EH}{FG} \tag{4}$$

Si D *tiende* hacia B sobre el segmento $BI, BD = \sqrt{x}$, *tiende* a cero.

Considerando que

$$0 < x < \sqrt{x} < 1, \tag{5}$$

es claro que x debe *tender* a cero también.

Pero además, notemos en la Figura 2, que si D *tiende* a B sobre el segmento BI, los puntos G y H *tienden* a juntarse sobre BI y *tendiendo* hacia B. Detrás de ellos, los puntos tangentes a las circunferencias E y F *tienden* sobre las circunferencias correspondientes a D y los tres *tendiendo* a B.

Bajo las anteriores *tendencias*, intuimos que los segmentos EH y FG *tienden* a **¡igualarse!**, $EH \approx FG$. Por lo que de (4) y (5), en el límite, la proporción ED/FD *tiende* a la constante r/R, y por (2) finalmente concluimos que,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x + R^2} - R}{\sqrt{x + r^2} - r} = \frac{r}{R} \tag{6}$$

3. Visualización dinámica de las *tendencias*

Con softwares de matemática dinámica se pueden visualizar las tendencias para casos concretos, en ambientes dinámico y numérico. La Figura 3, muestra una pantalla con **GeoGebra**[1] de dichas tendencias para el caso particular cuando $r = 1$ y $R = 3$. En ella observamos que si D *tiende* a B, *tienden* a juntarse H con G, y F con E y D, por lo que $EH \approx FG$. Estas observaciones se verifican numéricamente también, al desplazar D hacia B, la proporción ED/FD va *tendiendo* y *tendiendo* cada vez más a $1/3$.

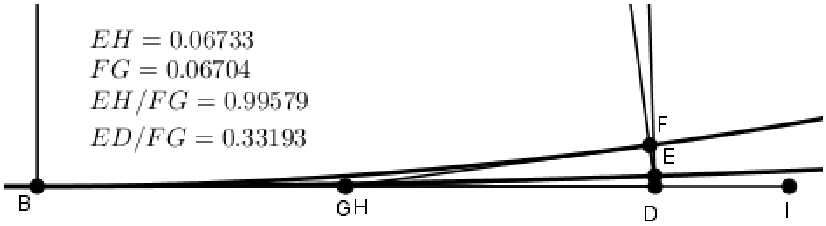

Figura 3: Visualización dinámica cuando D *tiende* a B.

Construida con **GeoGebra**, la Figura 4 muestras la gráfica cartesiana de $f(x) = (\sqrt{x+9}-3)/(\sqrt{x+1}-1)$ en línea punteada y la gráfica de la proporción ED/FD en fúnción de BD en línea contínua (construida con el comando lugar geométrico). En ella observamos que ambas *tienden* a $1/3$, cuando x y $BD = \sqrt{x}$ *tienden* a cero por la derecha.

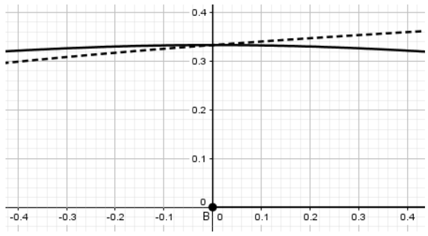

Figura 4: Gráficas de $f(x)$ punteada y de ED/FD continua, cerca de 0^+.

En el ambiente interactivo y dinámico del **Geogebra** se pueden explorar para otros valores particuales de r y R.

4. Verificación con CAS

La tendencia final obtenida se puede verificar con el CAS de programas de computo matemático o calculadoras.

El CAS del programa MAXIMA[2], confirma el valor del límite r/R, como se ilustra en la Figura 5.

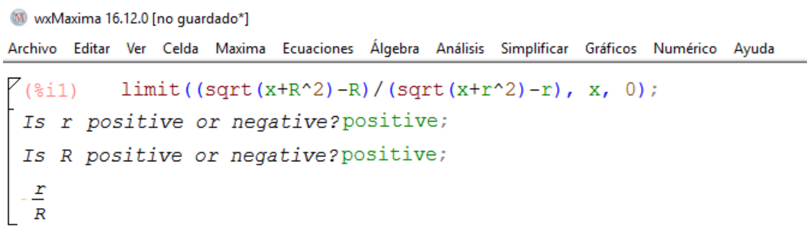

Figura 5: Calculo simbólico del límite con CAS de MAXIMA.

5. Discusión y conclusiones

El límite (1)[1] se puede estimar o calcular con otros procedimientos. El enfoque que presentamos está en el corazón de la noción –informal, intuitiva y dinámica– de límite como *tendencia* final: *la función tiende a ... cuando la variable tiende a ...* Además en los procesos presentados se usan operaciones mentales muy relacionadas con –creatividad constructiva, descubrimiento–, y procesamiento coordinado de información visual, competencias que creemos que la enseñanza de la matemática debe promover en la formación básica de estudiantes de ingeniería.

Para blancear o complementar el enfoque tradicional de enseñanza de límite, y promover el pensamiento creativo y de descubrimiento en el estudiante, sugerimos discutir situaciones similares a la presenada en el aula.

Actividades parecidas se proponen en [3, pág. 171] como problemas adicionales, pero en ellos se parte de un esquema ya construido, se espera que profesor/estudiante platee la representación simbólica del límite y que lo calcule con el algebra de límites y sustitución directa.

6. Actividad propuesta

Usando construcciones geométricas y *tendencias* de distancias límite en dichas construcciones, estime la *tendencia* final en (7) y verifíquelo usando softwares de matemática dinámica.

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) \tag{7}$$

Referencias

[1] **GeoGebra**. https://www.geogebra.org/

[2] **MAXIMA**. http://maxima.sourceforge.net/download.html

[3] **Stewart, J.** (2012), *Cálculo de una variable, Trascendentes tempranas* 7ma. Ed.

[4] **Zill, D. y Wright, W.** (2011), *Cálculo, Trascendentes tempranas*, 4ta. Ed. Mcgraw-Hill.

[5] Trazo decorativo tomados de http://www.freepik.es

Advertencia

Este documento puede tener errores y deficiencias de diverso tipo. Agradecemos sus observaciones y comentarios.

El autor.
`jmsaquimux@ing.usac.edu.gt`

[1]Este es un caso más general del límite propuesto en [4, pág 80]