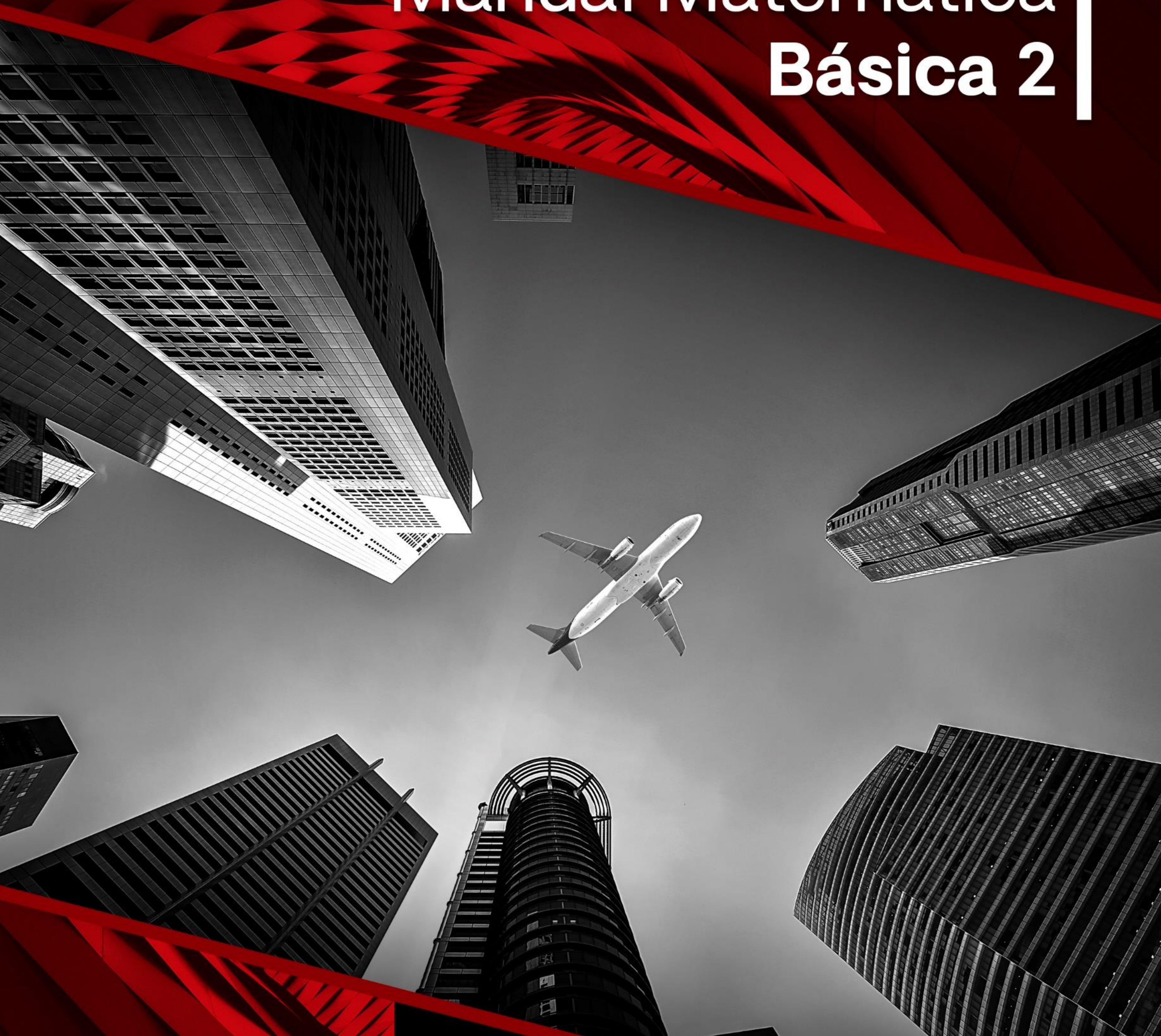
# Manual Matemática
# Básica 2



USAC
TRICENTENARIA
Universidad de San Carlos de Guatemala

Un Manual de:
- Brayan Velásquez -

# DIRECTORIO GENERAL

**Autor:** Brayan Miguel Velásquez García

**Institución:** Universidad De San Carlos De Guatemala
Centro Universitario De Occidente

**Ubicación De La Institución:** Calle Rodolfo Roble 29-99 Zona 1 Quetzaltenango. Guatemala

**Correo Electrónico**: ingenieria.cunoc@usac.edu.gt

**Directorio Telefónico:** 78730000

**Extensión Director De División:** 2255

**Extensión Secretaria de División:** 2267

**Director de División:** MBA. Ing. Víctor Carol Hernández Monzón

**Coordinador de Área Común:** Ing. Humberto Osvaldo Hernández Sac

**Fecha:** 14 de diciembre del año 2018

# INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de la matemática ha sido desde sus inicios complicada, de esto mismo puede dar testimonio más de algún docente que quizá en determinada ocasión tuvo que repetir más de una vez un curso relacionado con la matemática sino es que repitió la misma.

En mi experiencia como docente de matemática he visto varias deficiencias en el estudiante, deficiencias como; Que no leen, y al decir no leen no me refiero solamente a textos matemáticos, teoremas o enunciados, sino que, además no se informan de otros temas de ciencia y conocimiento por lo cual al darles un modelo matemático descriptivo él mismo estudiante no comprende y no logra imaginarse lo que le están hablando. También me he encontrado con el problema que, relacionado a la falta de lectura, cuando el estudiante intenta leer un libro de cálculo no comprende la explicación que este le brinda, por lo mismo que son muy técnicos y en algunos temas se redondea bastante por lo que rápidamente el estudiante se fatiga, de tanto que se le explica no comprende el teorema y no comienza a interpretar su aplicación en la vida real, sucedido esto él estudiante decide no continuar con el estudio o intentar que alguien más le explique y que a veces esto último resulta bien o en otros casos solo lo confunde más.

Por eso mismo nace este **MANUAL** que intenta explicar los temas de la matemática básica 2 de una manera simple, concreta y con un lenguaje más común haciéndolo parecer como si un docente particular estuviera dándole clases privadas, además que dentro del mismo manual encontrará ejercicios resueltos por cada tema para una mejor comprensión. Dicho lo anterior debo recalcar en esta parte que: El motivo de **este Manual no es el de sustituir a un libro de Cálculo** utilizado en ingeniería sino más bien el de **reforzar la enseñanza** que estos mismos libros ofrecen, servir como un material de apoyo para el estudiante de ingeniería. Mi recomendación es que lea primero su libro de cálculo para luego si no comprende algo tome el manual e intente comprender directamente de lo que se le está hablando.

# PRÓLOGO

En los años como docente de la División de Ciencias de la Ingeniería del Centro Universitario de Occidente especialmente en el área de Matemáticas, pocas veces se ha visto el interés por parte de los auxiliares de Matemática Básica 2 de dejar plasmada su experiencia docente en un documento escrito como este, por lo que solo por el hecho de tomarse el tiempo de preparar un material de apoyo al estudiante de matemáticas ya es algo importante que el autor ha realizado y un ejemplo al personal docente de la división de ingeniería para escribir su experiencia docente.

Este documento el cual se ha denominado Manual de Matemática Básica 2, presenta por medio de un mapa conceptual la importancia del estudio de la matemática y su relación con otras disciplinas, el cual lo hace de una forma bastante gráfica, clara y con amplias explicaciones.

El autor, al ir analizando cada uno de los conceptos de la matemática básica 2, los presenta de una forma sencilla y clara, dando a conocer el significado y las propiedades de los mismos, y lo más importante es que hace uso frecuentemente de una herramienta muy importante en la enseñanza de la matemática como lo es la graficación, esto lo desarrolla usando un software matemático, y de esta manera motiva al estudiante al uso de la tecnología.

Algo que es importante resaltar, es el hecho que en el transcurso de sus explicaciones el autor utiliza ejemplos de la vida cotidiana para relacionar los conceptos matemáticos y de esta forma clarificar y contextualizar la enseñanza, así mismo hace uso constante de la palabra “cuidado” cuando el autor de acuerdo a su experiencia docente visualiza situaciones críticas en la que el estudiante podría confundirse, de esta manera pone en alerta en las situaciones donde se debe de poner especial atención.

Por lo anterior, este documento sin duda alguna será de vital importancia en el aprendizaje de la matemática básica 2 y en lo personal y de parte del departamento de matemáticas de la división de Ciencias de la Ingeniería, felicitar al autor de este manual, por atreverse a escribirlo y motivarlo para que sea el primero de varios documentos de apoyo a la docencia que pueda producir, esto en beneficio del aprendizaje de la matemática.

Ing. Humberto Osvaldo Hernández Sac
Coordinador Área Común y Supervisor del Área de Matemáticas
División de Ciencias de la Ingeniería
Centro Universitario de Occidente.

# Índice

Directorio General....3
Introducción....5
Prólogo ....6
Índice ....7
Formulario Matemática Básica 1 ....9
**¿Por qué Estudiar Matemática?** ____ **11**
Historia Breve De La Matemática ....11
¿Qué Es La Matemática? ....13
Mapa Conceptual De La Importancia Y Conexión de la Matemática con otras Ciencias ....14
Mapa Conceptual Contenido matemática Básica 1 ....15
Mapa Conceptual Contenido matemática Básica 2 ....16
**Repaso** ____ **17**
Función ....17
Funciones Racionales ....19
Comportamiento Final ....20
Repaso Con El Modelado ....21
¿Qué Es El Modelado? ....21
Modelado Con Geometría ....22
Modelado Con Funciones ....24
**Límites** ____ **28**
Pendientes ....28
Definición De Límites ....31
Formas De Evaluar Un Límite ....31
Forma Algebraica....31
Teorema De La Compresión ....33
Límites Trigonométricos ....33
Límites Infinitos ....35
Límites Al Infinito ....35
Definición Precisa Del Límite ....35
Continuidad ....36
Aplicaciones De Los Límites ....37
**Ejercicios Resueltos ....39**
**Derivadas** ____ **42**
¿Qué es la Derivada? ....42
Derivada General De Una Función ....43
Regla Del Producto ....44
Regla Del Cociente ....44
Regla De La Cadena ....46
Derivación Implícita ....46
Derivadas De Funciones Logarítmicas ....48
Derivación Logarítmica ....48
Aplicaciones De La Derivada ....50
Trazo De Gráficas ....50
1era Derivada ....50
2da Derivada ....51
Razones De Cambio ....57

Optimización ....................................................................................................................59
Método De Newton Raphson ..............................................................................................60
**Ejercicios Resueltos ..........................................................................................................62**
**Integrales ____________________________________________________________73**
Antiderivadas ....................................................................................................................73
El Problema Del Área ..........................................................................................................74
La Suma De Riemann .........................................................................................................78
El Problema De La Distancia ...............................................................................................80
La Integral Definida ...........................................................................................................81
El Teorema Fundamental Del Cálculo ...................................................................................83
Integrales Indefinidas ..........................................................................................................83
Regla De La Sustitución .......................................................................................................85
Aplicaciones De La Integral ..................................................................................................86
Área Encerrada Entre Curvas ................................................................................................86
Volúmenes ..........................................................................................................................89
Método De Discos ................................................................................................................89
Método De Secciones Transversales Conocidas ......................................................................93
Método De Cascarones Cilíndricos ........................................................................................94
Trabajo ...............................................................................................................................97
Trabajo Al Bombear Agua De Un Recipiente ..........................................................................98
Trabajo Al Mover Un Resorte (Ley De Hooke) ......................................................................101
Trabajo Al Levantar Un Objeto Con Peso Variado ..................................................................101
Trabajo Cuando Se Nos Da La Función Posición ....................................................................103
**Ejercicios Resueltos .........................................................................................................104**
Reflexiones Matemáticas ....................................................................................................109
Manual De Algunas Prácticas Por Computadora ....................................................................111
Formulario Matemática Básica 2 ..........................................................................................119
Mapa Conceptual Contenido Matemática Intermedia 1 ..........................................................121
Agradecimiento .................................................................................................................123

# Formulario Matemática Básica 1

## Geometría

**Cuadriláteros**

$A = l * l$

$p = 4 * l$

**Rectángulo**

$A = b * h$

$P = 2b + 2h$

**Trapecio**

$A = \frac{(b+B)*h}{2}$

$P = b + B + z$

**Triángulos**

$A = \frac{1}{2} b * h$

$P = a + c + b$

**Triángulo Equilátero**

$A = \frac{\sqrt{3} * a^2}{4}$

$P = 3 * a$

**Pitágoras**

Un triángulo Rectángulo

$c^2 = a^2 + b^2$

**Circunferencia**

$A = \pi r^2$

$P = 2\pi r$

**Sector Circular**

$A = \frac{\theta r^2}{2}$

$P = \theta r$

**Polígonos Regulares**

$A = \frac{a*n*l}{2}$

$P = n * l$

**Prismas**

$V = A * h$

A= Área De una de sus bases

**Esfera**

$V = \frac{4\pi r^3}{3}$

$As = 4\pi r^2$

**Cilindro**

$V = \pi r^2 h$

$As = 2\pi rh + 2\pi r^2$

**Cono Circular**

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$As = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$

**Cono Truncado**

$$V = \frac{\pi h}{3}\left[R^2 + rR + r^2\right]$$

$$As = \pi\left[\sqrt{(R-r)^2 + h^2} * (R + r) + R^2 + r^2\right]$$

**Ángulos**

| Ángulos en grados | Ángulos en Radianes | Fracción De Vuelta |
|---|---|---|
| 360° | $2\pi$ | 1 |

## Desigualdades

$A \leq B$ *entonces* $A \pm C \leq B \pm C$

*Si* $C > 0$ *y* $A \leq B$ *entonces* $AC \leq BC$

*Si* $C < 0$ *y* $A \leq B$ *entonces* $AC \geq BC$

*Si* $A > 0$ *y* $B > 0$ *y* $A \leq B$ *entonces* $\frac{1}{A} \geq \frac{1}{B}$

*Si* $A \leq B$ *y* $C \leq D$ *entonces* $A + C \leq B + D$

**Valor Absoluto**

$|x| < c$ *equivale a* $-c < x < c$

$|x| \leq c$ *equivale a* $-c \leq x \leq c$

$|x| > c$ *equivale a* $x < -c$ *o* $c < x$

$|x| \geq c$ *equivale a* $x \leq -c$ *o* $c \leq x$

## Geometría De Coordenadas

**La Recta**

$y = mx \pm b$

Donde m=Pendiente

b= intersecto de recta en el eje y

**Rectas Perpendiculares**

$y_1 = m_1 x \pm b_1$

$y_2 = m_2 x \pm b_2$

y entre ellas hay 90°

$m_1 * m_2 = -1$

**La circunferencia**

$x^2 + y^2 = r^2$

**La circunferencia desplazada**

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

con centro en (h , k)

## Funciones

$y = f(x)$ (Una función es la regla de relación entre el conjunto A y el conjunto B, donde para cada valor de A existe un Solo valor de B)

**Función Creciente**

f es creciente en I si:

$f(x1) < f(x2)$ siempre que: $x1 < x2$

**Funciones Decrecientes**

f es Decreciente en I si:

$f(x1) > f(x2)$ siempre que: $x1 < x2$

**Transformación De Funciones (Desplazamiento Vertical)**

Suponga $c > 0$

*Para graficar* $y = f(x) + c$ *despace c unidades arriba*

*Para graficar* $y = f(x) - c$ *despace c unidades abajo*

**Transformación de Funciones (Desplazamiento Horizontal)**

Suponga $c > 0$

Para graficar $y = f(x - c)$ *desplace en x c unidades a la derecha*

Para graficar $y = f(x + c)$ *desplace en x c unidades a la izquierda*

**Combinación de Funciones**

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

**Función Inversa**

$f^{-1}(y) = x$ *entonces* $f(x) = y$

**Funciones Cuadráticas**

*la función* $f(x) = ax^2 + bx + c$

Puede expresarse de manera normal

$f(x) = a(x - h)^2 + k$

Con vértice en (h,k)

**Valor máximo o mínimo De una cuadrática**

$x = -\frac{b}{2a}$ entonces tendrá máximo o mínimo

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

**Funciones Polinomiales**

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$

donde n es un entero no negativo y $a_n \neq 0$

**Funciones Exponenciales**

$f(x) = a^x$

**Interés Compuesto**

$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

**Interés Simple**

$A(t) = P(1 + r)$

**Interés Capitalizado Continuamente**

$A(t) = Pe^{rt}$

**Función Logarítmica**

$log_a x = y$

**Propiedades De Logaritmos**

$log_a 1 = 0 \quad log_a a = 1$

$log_a a^x = x \quad a^{log_a x} = x$

**Logaritmo Natural**

$Lnx = log_e x$

**Leyes De Los Logaritmos**

$Log_a(AB) = Log_a A + Log_a B$

$Log_a\left(\frac{A}{B}\right) = Log_a A - Log_a B$

$log_a(A^C) = C * log_a(A)$

**Crecimiento Exponencial (Tasa de crecimiento)**

$n(t) = n_0 e^{rt}$

**Identidades Trigonométricas Fundamentales**

$\csc(x) = \frac{1}{sen(x)} \quad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$

$\tan(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)} \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{sen(x)}$

$sen^2(x) + cos^2(x) = 1 \quad tan^2(x) + 1 = sec^2(x)$

$1 + cot^2(x) = csc^2(x)$

$sen(2x) = 2sen(x) * \cos(x)$ $\cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)$

$cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ $sen^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

$sen(A \pm B) = Sen(A)\cos(B) \pm sen(B)\cos(A)$

$cos(A + B) = \cos(A)\cos(B) - sen(A)sen(B)$

$cos(A - B) = \cos(A)\cos(B) + sen(A)sen(B)$

## Movimiento Armónico Simple

$y = asen(\omega t)$ o $y = a\cos(wt)$ $amplitud = |a|$ $período = \frac{2\pi}{\omega}$ $frecuencia = \frac{\omega}{2\pi}$

## Movimiento Armónico Amortiguado

$y = ke^{-ct}sen(\omega t)$ o $y = ke^{-ct}cos(\omega t)$ $c > 0$ $k = amplitud\ inicial$ $c = constante\ de\ amortiguamiento$

## Funciones Trigonométricas

**Ley De Senos**

$\frac{\text{SenA}}{\text{a}} = \frac{\text{SenB}}{\text{b}} = \frac{\text{SenC}}{\text{c}}$

**Ley De Cosenos**

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * cos(A)$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac * cos(B)$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ac * cos(C)$

**Fórmula De Herón**

$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$s = \frac{a+b+c}{2}$

## Secciones Cónicas

**Parábola con eje vertical**

$x^2 = 4py$ donde $p > 0$

Vértice (0,0)

Foco $(0, p)$

Directriz $(y = -p)$

**Parábola con eje Horizontal**

$y^2 = 4px$ donde $p > 0$

Vértice (0,0)

Foco $(p, 0)$

Directriz $(x = -p)$

**Elipse (Hacia X)**

$\frac{X^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a > b > 0$

Focos $(\pm c, 0)$

$(c^2 = a^2 - b^2)$

Vértices $(\pm a, 0)$

$e = \frac{c}{a}$

**Elipse (Hacia Y)**

$\frac{X^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$b > a > 0$

Focos $(0, \pm c)$

$(c^2 = b^2 - a^2)$

Vértices $(0, \pm a)$

$e = \frac{c}{b}$

**Hipérbolas (Hacia X)**

$\frac{X^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Vértices $(\pm a, 0)$

Asíntotas ($\left(y = \pm\frac{b}{a}x\right)$

Focos $(\pm c, 0); c^2 = a^2 + b^2$

**Hipérbolas (Hacia Y)**

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Vértices $(0, \pm a)$

Asíntotas ($\left(y = \pm\frac{a}{b}x\right)$

Focos $(0, \pm c); c^2 = a^2 + b^2$

## Cónicas Desplazadas

**Parábola con eje vertical desplazada**

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$

$p > 0$ o $p < 0$

**Parábola con eje Horizontal desplazada**

$(y - k)^2 = 4p(x - h)$

$p > 0$ o $p < 0$

**Elipses Desplazadas**

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$con\ centro\ en\ (h, k)$

**Hipérbolas Desplazadas**

$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$con\ centro\ en\ (h, k)$

## Cónica General

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

# ¿Por qué Estudiar Matemática?

## Historia breve de la matemática

Historia Del Universo (Para que se comprenda donde estamos)

La teoría más refutable científica de la creación del universo es el llamado **Big Bang,** fue una explosión cósmica que creo toda la energía y la materia como la conocemos en la actualidad y aunque parece una locura, hay evidencia observacional fuerte que apoya la teoría del big bang, incluye la cantidad de helio en el cosmos y el brillo de las ondas remanentes de la explosión. En la serie televisiva Cosmos hacen una bonita escala de reducción del tiempo transcurrido del universo, que tiene 13,800 millones de años, a 1 año en el calendario terrestre. En esta escala cada mes representa casi 1,000 millones de años, cada día representa casi 40 millones de años, quedando:

- El 01 de enero inicia el Calendario cósmico con el nacimiento de nuestro universo, el llamado Big Bang. Todo nació de un punto más pequeño que el átomo, el espacio mismo exploto con un fuego cósmico y que expandió el universo y que esa misma expansión provoco enfriamiento y obscuridad alrededor de 200 millones de años.
- El 10 de enero surgieron las primeras estrellas gracias a que la gravedad comenzó a reunir masas de gases y las calentó.
- El 13 de enero estas estrellas se fusionaron con las primeras galaxias y estas galaxias se unieron para crear otras más grandes.
- El 15 de marzo del año cósmico nace nuestra galaxia.
- El 31 de agosto (hace 4,500 millones años) nace nuestro sol. La tierra, así como los demás planetas del sistema solar se formaron por un disco de gas y de polvo que orbitaban el sol recién nacido. Las continuas colisiones produjeron una bola de desechos cada vez mayor
- El 21 de septiembre inicia la vida en el planeta tierra, pero vida molecular
- Para el 9 de noviembre la vida se movía, respiraba, comía, reaccionaba en su entorno y también inventaron el sexo para reproducción
- El 17 de diciembre la vida se aceleró, las plantas crecieron al igual que los árboles. El tiktaalik fue uno de los animales primerizos en salir del agua para adentrarse en la tierra, debió sentirse como un visitante de otro mundo.
- Los bosques, los pájaros, los dinosaurios, Insectos, todos evolucionaron en la última semana de diciembre
    - La primera flor floreció el 28 de diciembre
    - A medida que estos bosques antiguos crecieron y murieron y sus restos se hundieron bajo la superficie se transformaron en carbón, 300 millones de años después los humanos quemamos ese carbón para impulsar y arriesgar a nuestra civilización (El cambio Climático)
- El 30 de diciembre Se calcula que a las 6:24 am del calendario cósmico el asteroide impacto con la tierra matando a los Dinosaurios
- El 31 de diciembre a las 11:00 pm aparece el ser humano y comienza su evolución.
- El 31 de diciembre a las 11:59:00 se comenzaron a pintar las primeras pinturas en cuevas.
- El 31 de diciembre a las 11:59:14 pm Toda la historia registrada y las personas que alguna vez se escuchó hablar vivieron en los últimos 14 segundos.

## Historia Del desarrollo de las matemáticas

La historia de la matemática tiene sus orígenes en la astronomía. De hecho, todos descendemos de los astrónomos, nuestra supervivencia dependía de saber cómo leer las estrellas para predecir la llegada del invierno y la inmigración de las manadas silvestres.

Luego alrededor de 10,000 años atrás empezó una revolución de la forma en que vivíamos, nuestros ancestros aprendieron a transformar su entorno, domesticaron plantas y animales, cultivaron la tierra y se asentaron. Esto cambio todo, por primera vez en la historia se tuvimos más cosas de las que se podían cargar, se necesitaba inventar una forma de llevar un registro de ellas así que hace 6,000 años se **inventó la escritura** con la que se llevaban registros de faenas de granos, guardar pensamientos y poder compartir ideas para las futuras generaciones.

La entrada a la matemática fueron los números, fueron símbolos utilizados para representar unidades de comida, prendas y habitantes que gobernar.

Siguiendo con la analogía del calendario Cósmico:

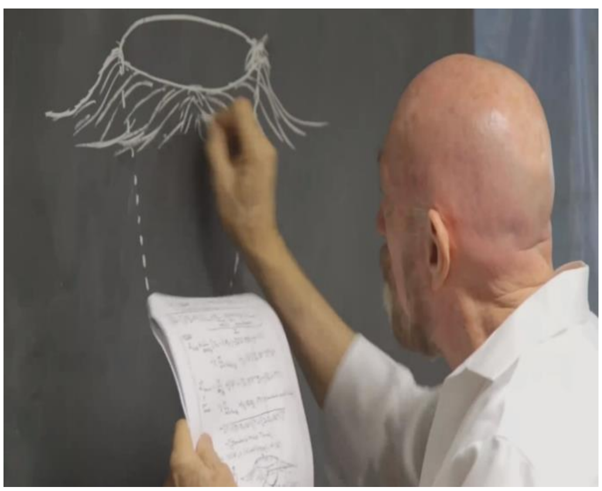
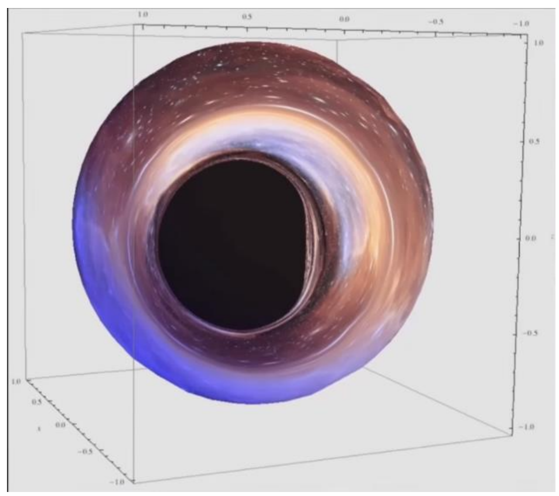
- Moisés nació hace 7 segundos
- Buda nació hace 6 segundos
- Jesús hace 5 segundos
- Mahoma nació hace 3 segundos
- Hace menos de 2 segundos para bien o para mal las dos mitades de la tierra se descubrieron entre sí
- En el último segundo del calendario cósmico se comenzó a utilizar la ciencia para revelar los secretos y las leyes de la naturaleza. El método científico es tan poderoso que en tan solo 4 siglos nos ha llevado a todos desde el primer vistazo de Galileo a otro mundo a través de un telescopio hasta llevarnos y dejar nuestras huellas en la Luna, todos como especie, nos ha permitido ver a través del espacio y el tiempo para descubrir cuando y donde estamos en el cosmos.

Es importante comprender que cada cultura ubicada en un lugar diferente utilizo y desarrollo la matemática a su conveniencia y le asigno simbología distinta, pero todos los símbolos con un mismo propósito, el de representar conceptos abstractos de la vida cotidiana. Por ejemplo: Los mayas fueron una civilización mesoamericana que tuvieron como base monetaria el Cacao y el maíz y que en el año 230-300 D.C (Después de Cristo) desarrollaron la escritura y a través de esa escritura hicieron cálculos numéricos con orientación astronómica para saber cuándo llovería he incluso lo orientaban para épocas de guerra.
La entrada al lenguaje Maya fueron los números, con base vigesimal (base 20) y gracias a estos se comprendieron muchísimos acontecimientos de dicha cultura.
Entiéndase que todas las culturas han tendido la idea de la matemática, pero cada cultura la ha utilizado y desarrollado diferente.

### Matemáticas En El Siglo XXI

En el año 2000, el Clay Mathematics Institute anunció los siete problemas del milenio, y en 2003 la demostración de la conjetura de Poincaré fue resuelta por Grigori Perelmán (que razonó éticamente en no aceptar el premio).

**Hoy en día las matemáticas modelan Agujeros negros.**

**El Ganador del premio Nobel de física Kip Thorne modelando matemáticamente un Agujero negro en Tres Dimensiones**

## ¿Qué es la Matemática?

La matemática es el lenguaje por excelencia que utiliza la ciencia para describir conceptos abstractos de la vida cotidiana. En otras palabras, la matemática es el lenguaje que estudia los Símbolos (Números, signos de relación, Elementos Químicos, Monedas…)
Galileo Galilei dijo alguna vez: "**Las matemáticas son el lenguaje** en el que **Dios** escribió el **universo**"

*Ejemplo*

El siguiente enunciado podemos decirlo de dos formas:
1. X es mayor que Y e Y es mayor que Z
o forma simplificada podemos decir que
2. $X > Y > Z$

Este es el motivo por el cual las matemáticas son tan solo un lenguaje simplificado con una herramienta para cada problema específico.

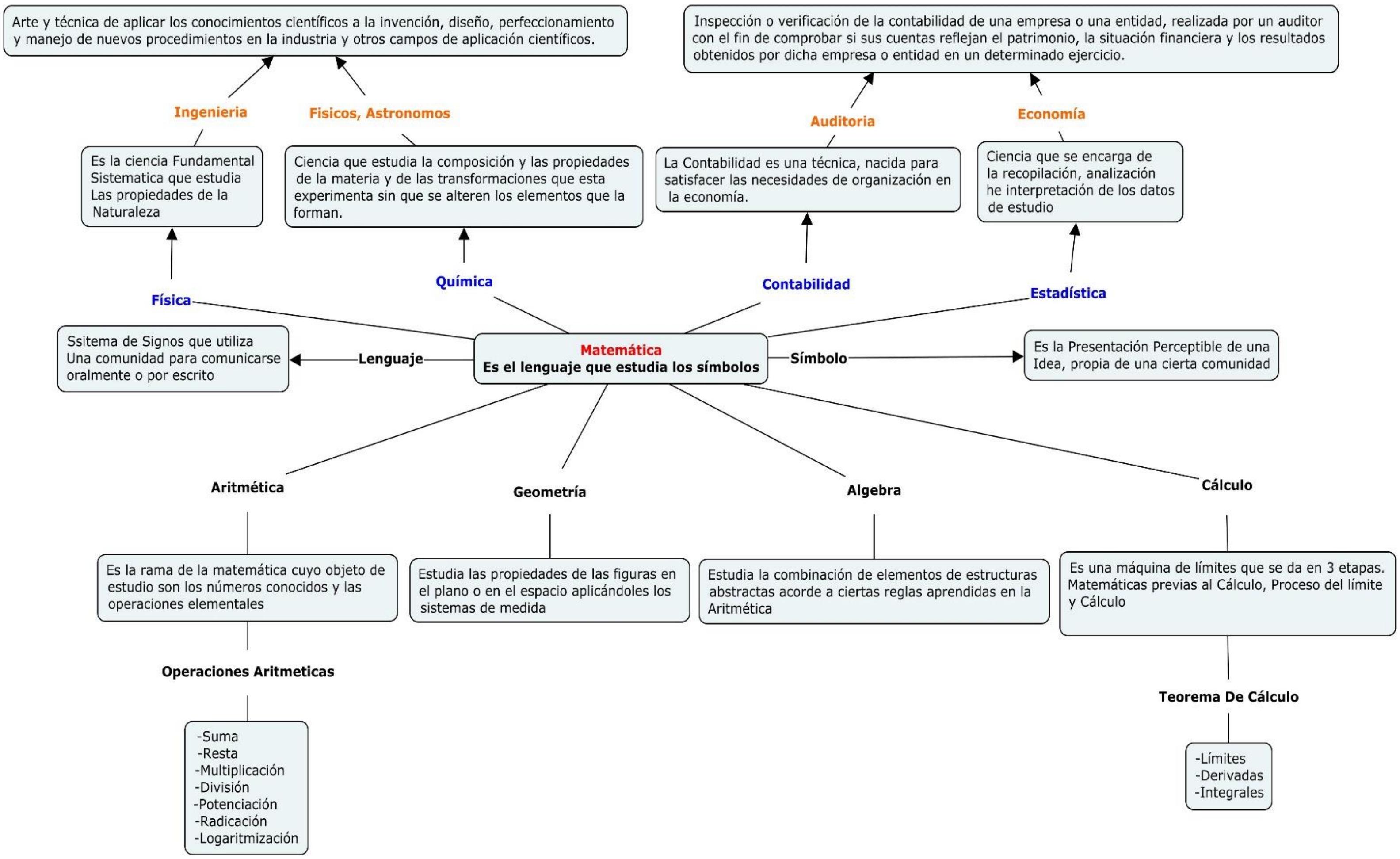



**Figura No. 0 Mapa Conceptual De La Importancia de la matemática y Conexión Con Otras Ciencias**
**Imagen De Autoría Propia**

# CONTENIDO MATEMÁTICA BÁSICA 1 QUE YA DEBE CONOCER EL ESTUDIANTE

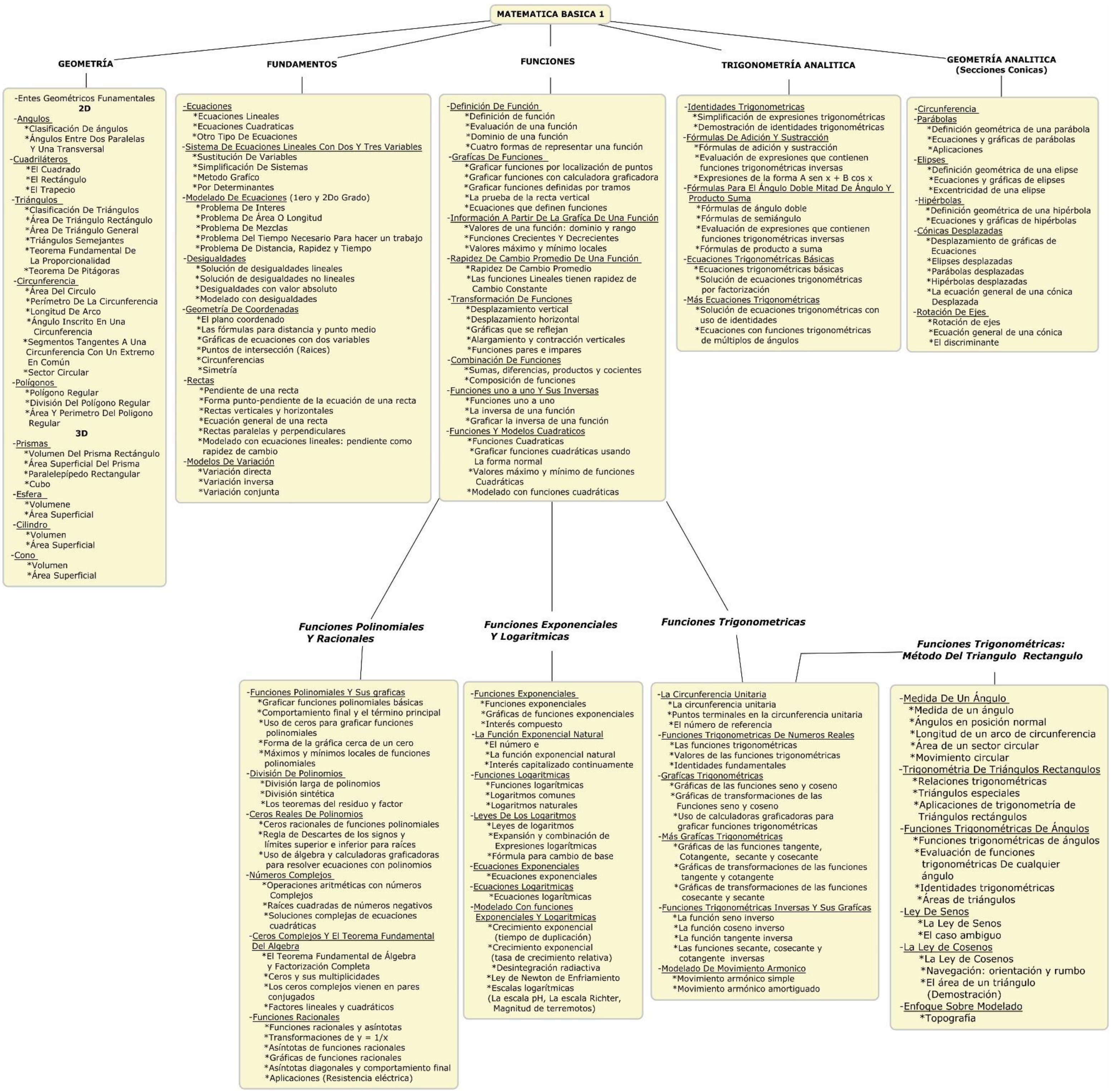



**Figura No. 1 Mapa conceptual Con el Contenido De La Básica 1**
**Imagen De Autoría Propia**

# CONTENIDO MATEMÁTICA BÁSICA 2 QUE EL ESTUDIANTE APRENDERÁ

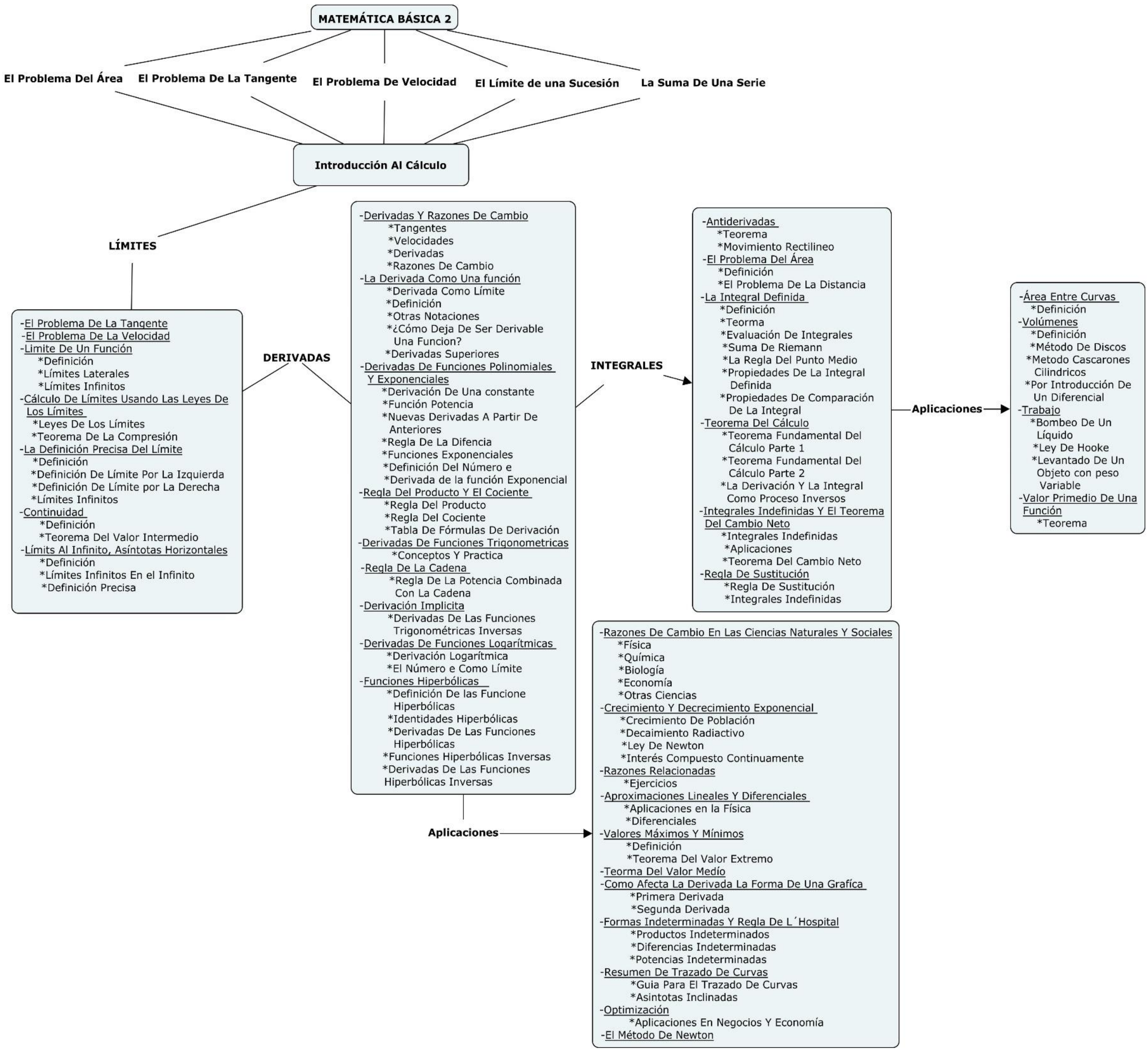
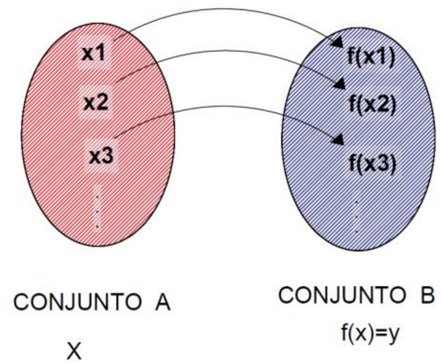



**Figura No. 2 Mapa conceptual Con el Contenido De La Básica 2**
**Imagen De Autoría Propia**

# REPASO

## Función

Una función es la regla de relación entre el conjunto A y el Conjunto B, donde para cada valor de A existe un solo valor de B y donde el conjunto A es llamado Dominio y el conjunto B es llamado Codominio, Rango o Espejo.




*Ejemplos*

- Si Ana y Pedro son Novios ellos pueden decir que tienen una relación, cosas que los une o que les gusta en común.
- Juan tiene el Doble de edad de lo que tiene Mateo
  $Edad\ Juan = y$
  $Edad\ Mateo = x$
  La regla de relación entre ambos es: $y = 2x$
- La Carga de un Teléfono en función (dependencia) del Tiempo.
- El Precio De una Viga De Acero está en Función a su peso.

Acá lo importante es que se comprenda de qué manera podemos relacionar las variables recordando que toda función es una ecuación más no toda ecuación es una función, ya que relacionamos las variables por medio del signo de igualdad.

## Formas De Expresar Una Función

Existen 4 formas de Expresar las funciones

a) Forma Descriptiva
b) Forma Algebraica
c) Forma Grafica
d) Forma Numérica (Por Tablas)

### a) Forma Descriptiva

*Ejemplo*

Mario posee el Triple de Dinero de lo que posee David

## b) Forma Algebraica

$Dinero\ Mario = y$ $\qquad$ $Entonces\ la\ relación\ queda: \quad y = 3x$

$Dinero\ David = x$

## c) Forma Geométrica

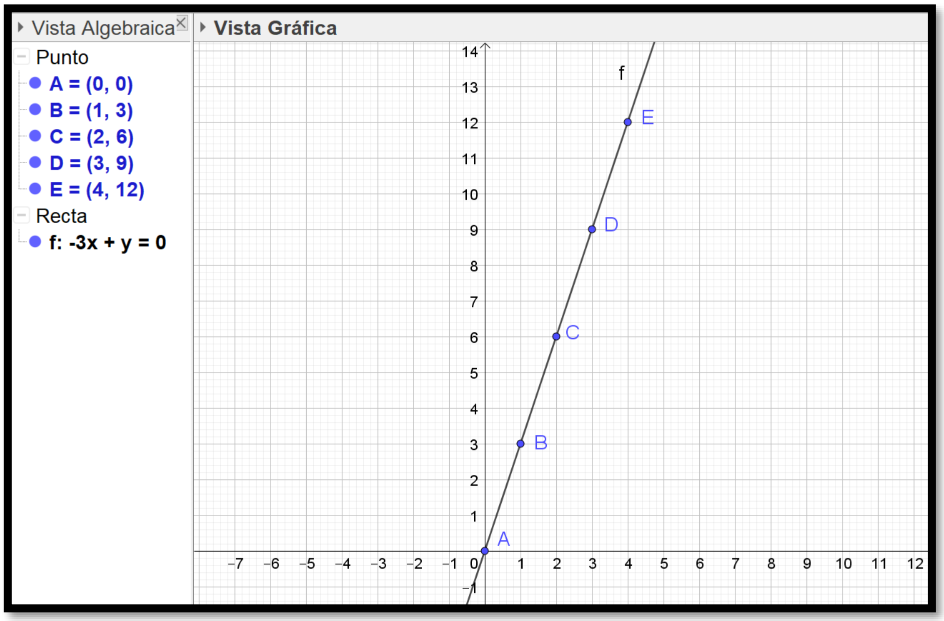



**Figura No. 3 Descripción Gráfica De una Función**
**Imagen obtenida del Software GeoGebra 5**

## d) Forma Numérica

| Dinero David | Dinero Mario |
|---|---|
| x | y |
| 0 | 0 |
| 1 | 3 |
| 2 | 6 |
| 3 | 9 |
| 4 | 12 |
| 5 | 15 |

Estas son las 4 formas de expresar una función, la más utiliza es la Algebraica

## Dominio

Es importante comprender que el dominio de una función son las posibles entradas para el valor de x

## Rango

También llamada espejo o Codominio, es el resultado que se obtiene de evaluar la variable x

Después de haber repasado todo esto, es importante que recuerde todos los:

## Tipos De Funciones Que Existen

- Funciones Polinomiales y Racionales
- Funciones Racionales
- Funciones Exponenciales
- Funciones Logarítmicas
- Funciones Trigonométricas

Después de esto también es importante comprender las operaciones de funciones:

- Transformación De Funciones
- Combinación De Funciones
- Funciones Uno A Uno Y Sus Inversas
- Aplicaciones De Cada una de Ellas

Esto solo hablando de Funciones, aparte se encuentran los otros temas indicados en la figura No. 1

Debemos enfocarnos en la parte de las Funciones Racionales ya que ahí se veía lo que se conoce como Comportamiento Final.

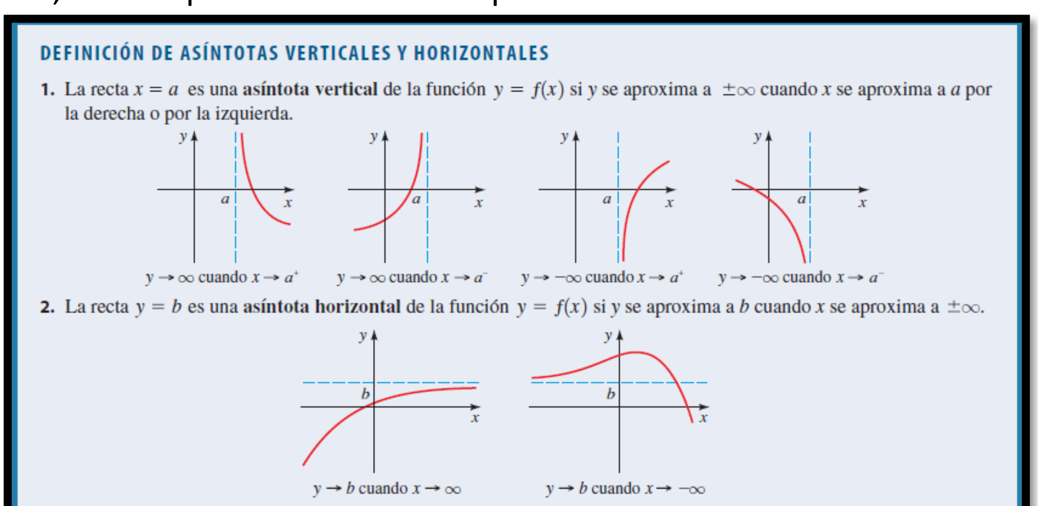
## Funciones Racionales

(Capitulo 3.7 Precálculo, Sexta Edición - Matemáticas Para el Cálculo - James Stewart)

Una Función racional es la que se representa como:

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad Donde \quad Q(x) \neq 0$$

Es importante comprender dentro de este Tema las *Asíntotas Verticales,* estás se producen cuando $Q(x) = 0$, es una parte de la función que no está definida



DEFINICIÓN DE ASÍNTOTAS VERTICALES Y HORIZONTALES

1. La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la función $y = f(x)$ si $y$ se aproxima a $\pm\infty$ cuando $x$ se aproxima a $a$ por la derecha o por la izquierda.

$y \to \infty$ cuando $x \to a^+$ $\quad$ $y \to \infty$ cuando $x \to a^-$ $\quad$ $y \to -\infty$ cuando $x \to a^+$ $\quad$ $y \to -\infty$ cuando $x \to a^-$

2. La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la función $y = f(x)$ si $y$ se aproxima a $b$ cuando $x$ se aproxima a $\pm\infty$.

$y \to b$ cuando $x \to \infty$ $\quad$ $y \to b$ cuando $x \to -\infty$

**Figura No. 4 Definición De Asíntotas Horizontales y verticales**
**(Imagen Sacada Del Precálculo 6e James Stewart)**

Es importante que el estudiante recuerde Lo que son las asíntotas Diagonales, esto para el trazo de gráficas.

## Comportamiento Final

Esta parte es la **Introducción a la básica 2** ya que se ve un lenguaje matemático que sin duda alguna le servirá al estudiante más adelante.

El **comportamiento final** de una función es una descripción de lo que ocurre cuando *x* se hace grande, en la dirección positiva o negativa, o cuando x se aproxima a un valor, en especial a las Funciones Irracionales cuando hacemos el análisis respecto a una Asíntota. Para describir el comportamiento final, usamos la siguiente notación:

$$x \to \infty \quad significa\ que\ "x\ se\ hace\ grande\ en\ la\ posición\ positiva"$$
$$x \to -\infty \quad significa\ que\ "x\ se\ hace\ grande\ en\ la\ posición\ Negativa"$$

Si en $x = a$ existe una asíntota se dice que:

$$x \to a^- \ significa\ que\ "x\ tiende\ a\ ser\ a\ por\ la\ izquiera"$$
$$x \to a^+ \ significa\ que\ "x\ tiende\ a\ ser\ a\ por\ la\ derecha"$$

*Ejemplo*

Graficar y Analizar el comportamiento final de la función $r(x) = \frac{x^3-2x^2+3}{x-2}$

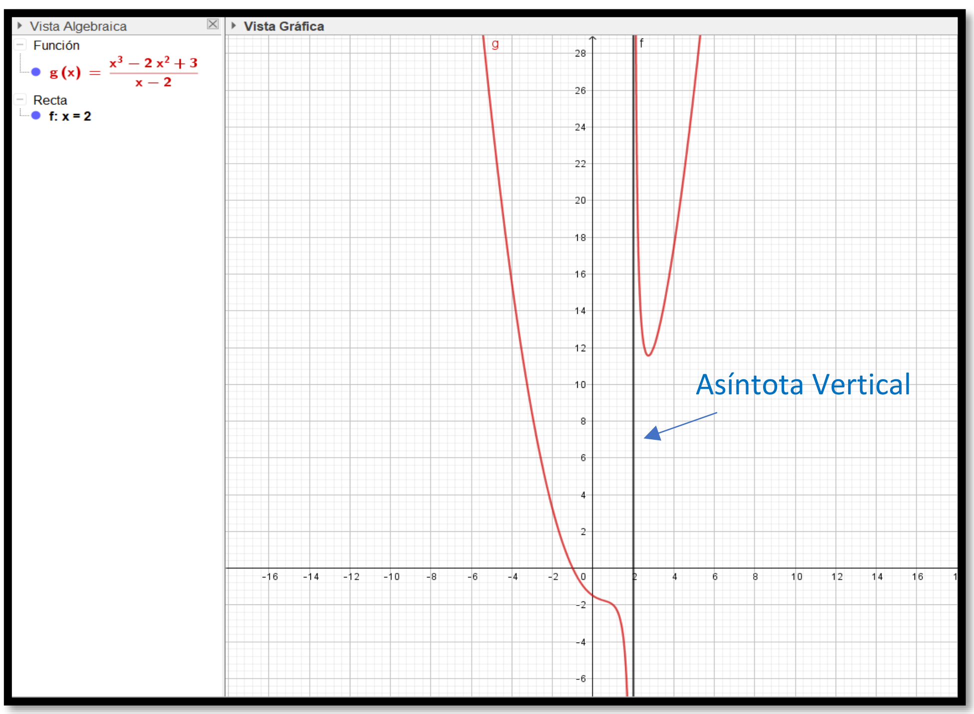



**Figura No. 5 Grafica de la función r(x) a través del programa GeoGebra 5**

Análisis Del Comportamiento Final

$$x \to 2^- \quad y \to -\infty$$
$$x \to 2^+ \quad y \to \infty$$
$$x \to -\infty \quad y \to \infty$$
$$x \to \infty \quad y \to \infty$$

## Repaso Con El Modelado

### ¿Qué es el modelado?

El modelado o modelo matemático **es describir con el lenguaje matemático un fenómeno** que ocurre en la vida cotidiana o en la naturaleza, ya sean físicos, sociológicos o hasta económicos. Lo difícil de crear el modelo matemático es **la relación de variables** ya que en algunos problemas se describe lo que sucede y el estudiante debe auxiliarse de temas o Teoremas donde su modelo ya se encuentra definido para definir el nuevo modelo.
En resumen, el modelado se puede resumir como utilizar teoremas establecidos y conocidos para **dejar una variable en función de otra.**

### Algunos Teoremas y modelos matemáticos establecidos que auxilian son:

-Geometría

* Teorema De Pitágoras
* Áreas, Perímetros Y Volúmenes De figuras establecidas
  - ✓ **Dos dimensiones (2D)**
    (Círculos, triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares)
  - ✓ **Tres Dimensiones (3D)**
    -Paralepípedos Rectangulares (cubos, Ladrillos, Cajas de zapatos, Blocks, Libros…)
    -Paralepípedos
    -Cono (Cono normal y cono invertido)
    -Pirámide (Su base puede ser un triángulo (tetraedro), cuadrado, pentágono, hexágono…)
    -Prismas (Son las figuras que mantienen sus bases o secciones transversales iguales)
    En ellos entra el: Cilindro y todo aquel que tenga su sección transversal un polígono regular o irregular pero la condición es que sus cortes transversales sean los mismos
* Ley de senos y cosenos
* Relación de triángulos
* Ley de Herón
* Distancias de las figuras geométricas

-Modelado de Ecuaciones

* Problema de Interés
* Problema de área y longitud
* Problema de mezclas
* Problema del tiempo necesario para realizar un trabajo
* Problema de distancia, rapidez y tiempo

-Geometría De Coordenadas

* El plano coordenado
* La fórmula para la distancia y punto medio

-Modelos de Variación

* Variación Directa (Proporcional)
* Variación Inversa (Inversamente proporcional)

*Variación Conjunta

-Funciones Polinomiales

*Modelado con funciones cuadráticas

*Los teoremas del residuo y factor

-Funciones Exponenciales

*Interés Compuesto

*Interés Compuesto Continuamente

*Crecimiento/Decrecimiento Exponencial

*La escala PH

-Funciones Trigonométricas

*Ley de senos y Cosenos

*Movimiento armónico Simple

*Movimiento armónico amortiguado

*Medida de un ángulo

*Longitud de arco de circunferencia

*Área de sector circular

-Geometría Analítica (Secciones Cónicas)

*Circunferencia

*Parábolas

*Elipses

*Hipérbolas

La formulación de un modelo matemático de un sistema se inicia con:

- identificación de las variables que ocasionan el cambio del sistema. Podremos elegir no incorporar todas estas variables en el modelo desde el comienzo. En este paso especificamos el **nivel de resolución** del modelo.
- *S*e establece un conjunto de suposiciones razonables o hipótesis, acerca del

sistema que estamos tratando de describir. Esas hipótesis también incluyen todas las leyes empíricas que se pueden aplicar al sistema.

## Modelado Con Geometría

Estos modelos son fundamentales en la matemática básica 2 (Lo verá el lector más adelante) pues ahí se ven razones de cambios (velocidades) como velocidades con la que crece la altura de un volumen y la velocidad del mismo volumen. Acá nos auxiliamos de distancias, áreas y volúmenes

*Ejemplo*

Un cono de papel de diámetro de 4 pulgadas y altura de 5 pulgadas está inicialmente lleno de agua. Se le hace un pequeño agujero en el fondo y el agua comienza a fluir. Sea h y r la altura y el radio, respectivamente, del agua en el cono t minutos después de que el agua comienza a fluir.

a) Exprese r como función de h
b) Exprese el volumen V como una función de h
c) Si la altura del agua después de t minutos está dada por $h(t) = 0.5\sqrt{t}$, exprese V como función de t

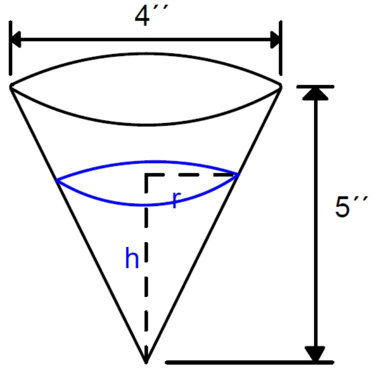



Figura 1a

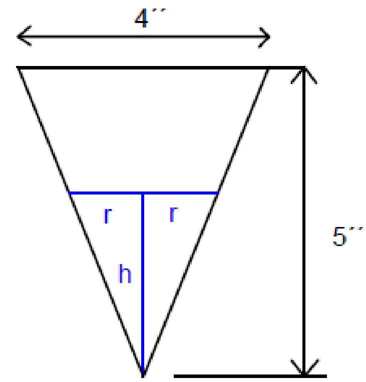



Figura 2a

*Resolviendo el inciso a)*

En la Figura 2a podemos relacionar el radio con la altura a través de triángulos semejantes

$$\frac{base\ menor}{Base\ Mayor} = \frac{altura\ menor}{Altura\ Mayor}$$

$$\frac{2r}{4} = \frac{h}{5} \quad luego\ despejamos\ para\ r$$

$$r = \frac{4h}{5*2} \quad entonces \quad r = \frac{2h}{5}$$

*Resolviendo el inciso b)*

Como la figura es un cono, su fórmula para el volumen es:

$$V = \frac{\pi * radio^2 * altura}{3} \quad entonces\ el\ volumen\ del\ agua\ sera:$$

$V = \frac{\pi * r^2 * h}{3}$ Acá debemos sustituir el resultado del inciso a)

$$V = \frac{1}{3} * \pi * \left(\frac{2h}{5}\right)^2 * h = \frac{4\pi}{75} * h^3 \qquad V = \frac{4\pi}{75} * h^3$$

*Resolviendo el inciso c)*

Como ya se tiene el volumen en función de la altura, y así mismo la altura en términos del tiempo, por **composición de funciones** podemos tener el volumen en términos del tiempo.

$$V = \frac{4\pi}{75} * h^3 \quad y \ \ h(t) = 0.5\sqrt{t} \quad entonces$$

$$V = \frac{4\pi}{75} * \left(0.5\sqrt{t}\right)^3 \qquad V = \frac{\pi}{150} * \sqrt{t^3}$$

## Modelado Con funciones

En estos modelos se deben saborear bien las palabras descritas por un problema, imaginar lo que sucede y relacionar variables. Recuerde, usted es quien asigna variables y luego usted busca teoremas conocidos que nos ayuden a relacionar las mismas variables.

*Ejemplo*

Una compañía de televisión por cable da servicio a 500 usuarios y cobra Q200.00 por mes. Un estudio de mercado indica que por cada Q10.00 menos en la tarifa mensual, se suscribirán 500 nuevos clientes. Ahora bien, R(x) denota el ingreso total mensual cuando el cobre es de x quetzales mensuales

a) Determine la función de ingreso R
b) Trace un bosquejo de la gráfica del inciso (a)
c) Determine el valor del cobro de modo que la compañía reciba el máximo ingreso mensual.
d) Exprese el dominio real de la función de ingreso R
e) Determine la inversa de la función del inciso (a). ¿Qué significa?, ¿Para qué dominio es la función inversa?

*Resolviendo el inciso a)*

*Identificando Datos*

$5000\ usuario\ \rightarrow Q200/persona$

R(x)=Ingreso mensual a la compañía

x = cobro mensual

El cobro irá bajando de Q10.00 en Q10.00

Para resolver el problema necesitamos armar una tabla, donde hagamos la analogía que a cada Q10.00 menos del cobro inicial (Q200/persona)

| x | R(x) | R(x) |
|---|---|---|
| 200 | R(200)=5000(200) | Q1,000,000 |
| 190 | R(190)=5000(190)+500(190) | Q1,045,000 |
| 180 | R(180)=5000(180)+2(500)(180) | Q1,080,000 |
| 170 | R(170)=5000(170)+3(500)(170) | Q1,105,000 |
| 160 | R(160)=5000(160)+4(500)(160) | Q1,120,000 |
| 150 | R(150)=5000(150)+5(500)(150) | Q1,125,000 |
| 140 | R(140)=5000(140)+6(500)(140) | Q1,120,000 |
| 130 | R(130)=5000(130)+7(500)(130) | Q1,105,000 |

$$R(x) = \begin{cases} 5000(200) & x = 200 \\ 5000x + 500x\left(\frac{200-x}{10}\right) & x \leq 200 \end{cases}$$

La función de R(x) la obtenemos haciendo la Analogía con la tabla y viendo que x disminuirá De Q10 en Q10 a partir de Q200. 00 que cobran y que los clientes irán aumentando de 500 en 500

**Entonces**

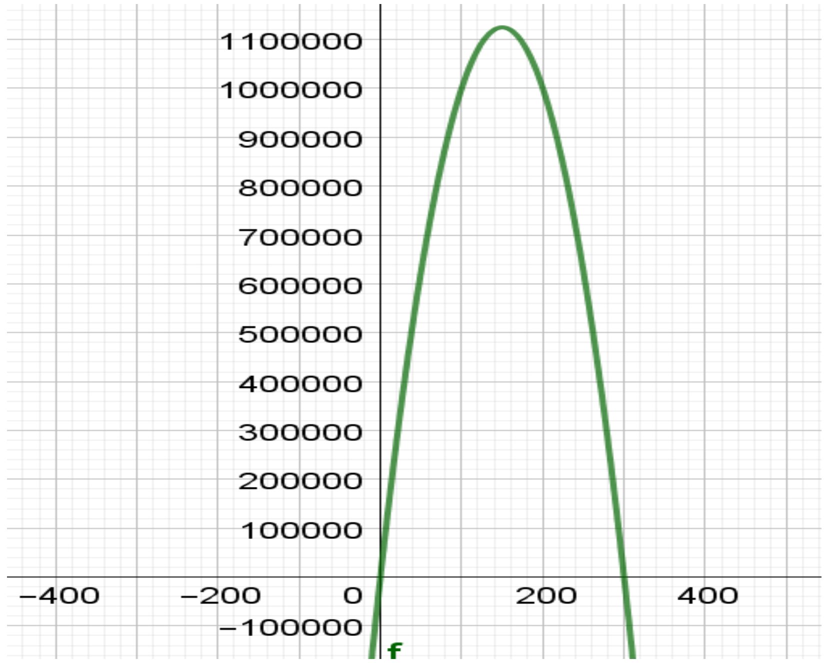
$$R(x) = 5000x + 50x(200 - x) = 5000x + 10000x - 50x^2$$

$$R(x) = -50x^2 + 15000x$$

$$R(x) = -50x^2 + 15000x$$

*Resolviendo el inciso b)*

$$f(x) = -50\,x^2 + 15000\,x$$




*Resolviendo el inciso c)*

Como la función es una Cuadrática, podemos utilizar la fórmula para encontrar máximos/mínimos que dice: $x = \frac{-b}{2a}$

En este caso b=15000  a= - 50

$$x = \frac{-15000}{2(-50)} = 150 \;\; (se\ puede\ corroborar\ en\ la\ gráfica\ o\ en\ la\ tabla)$$

$x = 150$

*Resolviendo el inciso d)*

Para el dominio se necesita mucho criterio, pues al ser una Cuadrática alguien podría decir que el dominio es de: $(-\infty, \infty)$ pero no hay cobros negativos ni mayores a Q200/Persona

$$R(x) = -50x^2 + 15000x \qquad 0 \leq x \leq 200$$

*Resolviendo el inciso e)*

$y = -50x^2 + 15000x$

$50x^2 - 15000x + y = 0$   $nos\ auxiliamos\ de\ la\ fórmula\ de\ la\ cuadrática$

$$x = \frac{15000 \pm \sqrt{250{,}000{,}000 - 200y}}{100} \qquad Cuanto\ se\ cobrá\ en\ función\ al\ ingreso\ mensual$$

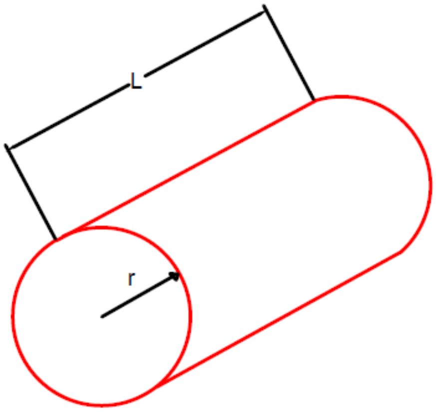
$250{,}000{,}000 - 200y \geq 0$   $sabiendo\ que\ y = R(x)$

$y \leq 1{,}125{,}000$   $que\ precisamente\ es\ el\ máximo$   $0 \leq R(x) \leq 1{,}125{,}000$

## *Ejemplo*

Un Deposito tiene una longitud de 20 Pies de largo y su sección transversal es un circulo (Circunferencia) con radio igual a 5 metros.

a) Calcule la capacidad total del Deposito
b) Calcule una función del Volumen V en términos de la altura de llenado (Ver imagen)
c) Cuanto es el volumen cuando la altura es de 7 metros




### *Resolución inciso a)*

$V = A_{base} * Largo \quad Por\ ser\ un\ paralepipedo$

$$V = \pi r^2 * L = \pi(5m)^2 * 20\,\cancel{ft} * \frac{12\,\cancel{in}}{1\,\cancel{ft}} * \frac{2.54\,\cancel{cm}}{1\,\cancel{in}} * \frac{1\,m}{100\,\cancel{cm}}$$

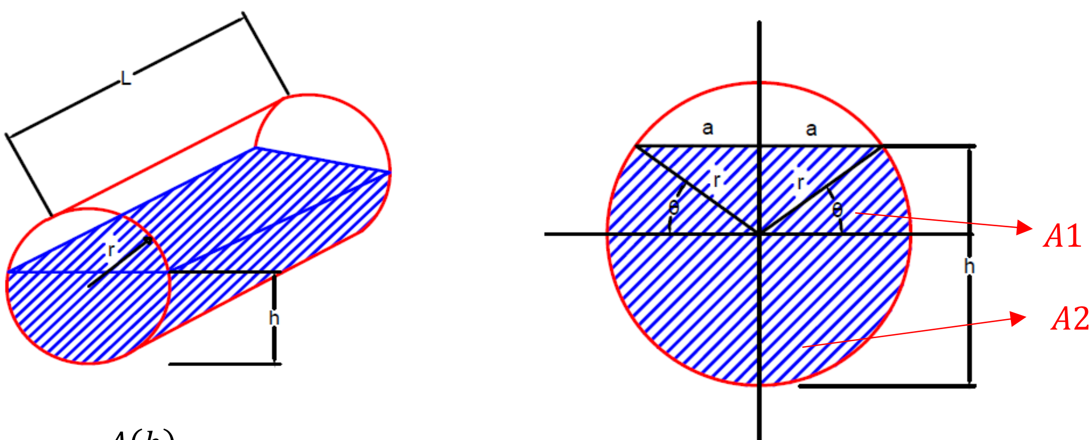
$Trabajar\ bajo\ mismas\ dimensionales$

$V = \pi(5m)^2 * 6.096\,m$

$V = \frac{762}{5}\pi \qquad\qquad V = 478.78\,m^3$

### *Resolución inciso b)*

El reto de este ejercicio es dejar el área transversal en términos de h (La Altura)




$A_{buscada} = A(h)$

$A_{buscada} = A1 + A2 = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2(A1)$

$Se\ puede\ ver\ gráficamente\ que$:

$A1 = Área\ del\ sector\ circular\ en\ terminos\ de\ \theta + Área\ Rectangulo$

$$A1 = \frac{\theta * r^2}{2} + \frac{1}{2} * a * y \qquad donde\ y = h - r$$

- $Dejando\ \theta\ en\ terminos\ de\ h\text{:}\ \ sen(\theta) = \frac{y}{r}\ ; \theta = sen^{-1}\left(\frac{y}{r}\right) = sen^{-1}\left(\frac{h-r}{r}\right)$

- $Dejando\ a\ en\ terminos\ de\ h$

  $h = y + r$

  $x^2 + y^2 = r^2$

  $a^2 +\ (h - r)^2 = r^2 \qquad Resolviendo\ todo\ para\ dejar\ a\ en\ terminos\ de\ h$

  $a = \sqrt{2rh - h^2}$

Entonces

$$A_{buscada} = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2\left(\frac{\theta * r^2}{2} + \frac{1}{2} * a * y\ \right)$$

$$A_{buscada} = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2(A1) = \frac{1}{2}\pi r^2 + 2\left(\frac{r^2}{2} * \underbrace{sen^{-1}\left(\frac{h-r}{r}\right)}_{\theta} + \frac{1}{2}\underbrace{(h-r)}_{y} * \underbrace{\sqrt{2rh - h^2}}_{a}\right)$$

$$A_{buscada} = \frac{1}{2}\pi r^2 + r^2 * sen^{-1}\left(\frac{h-r}{r}\right) + (h-r) * \sqrt{2rh - h^2}$$

$Por\ ser\ un\ Paralepipedo\ sabemos\ que\text{:}\ \ V = Area_{base} * Largo$

$$V(h) = 6.096 * \left[\frac{1}{2}\pi r^2 + r^2 * sen^{-1}\left(\frac{h-r}{r}\right) + (h-r) * \sqrt{2rh - h^2}\right]$$

## Resolución inciso c)

$$V(7) = 6.096 * \left[\frac{\pi * 25}{2} + 25sen^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) + 2\sqrt{45}\right]$$

$$V(7) = 383.8909\ m^3$$

$$V(7) = 383.8909\ m^3$$

# LÍMITES

Para encontrar la pendiente de una recta, como se aprendió en la básica 1 necesitamos conocer por lo menos dos puntos de esa misma recta.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

## ¿Qué Expresa Una Pendiente?

La pendiente expresa matemáticamente *el cambio* de la variable en el numerador por el cambio en unidad que se encuentra en el denominador, en otras palabras, que tanto cambia "y" cuando "x cambia de uno en uno".

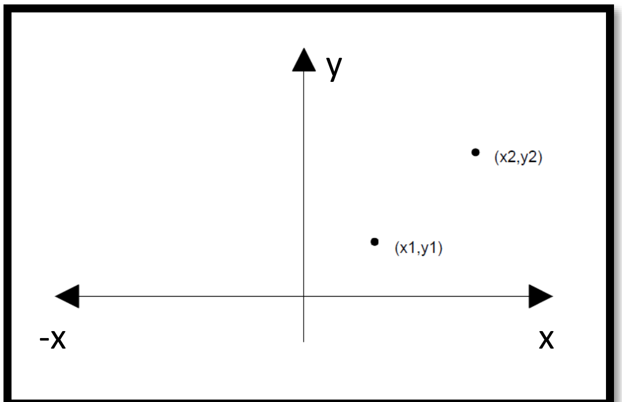



**Figura No. 6 Dos Puntos Coordenados**

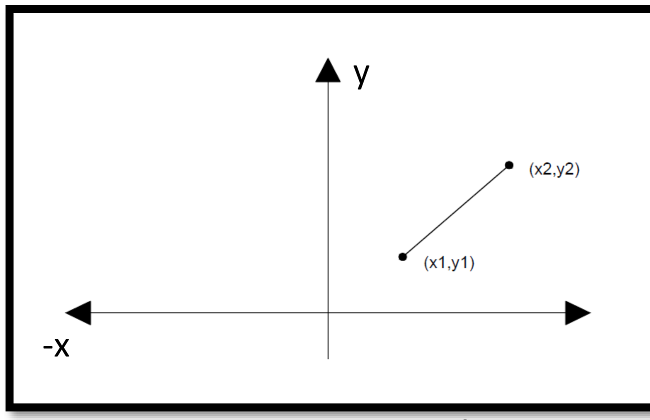



**Figura No. 7 Segmento Que Une Ambos Puntos**

## Volcán Santa María Y Santiaguito

(Pendientes en el mundo cotidiano)

Al momento de escalar un volcán se nos complica un poco, puesto que su *Pendiente* es muy grande. O sea que por cada metro horizontal que se avanza, se sube unos 8 metros en el eje vertical. Por eso a las personas al momento de subir una montaña calculan si tiene mucha pendiente por qué en base a ello ven si suben o no. Existen personas que lo ven como Deporte y un pasatiempo.

## ¿Por qué hablamos de pendientes?

Iniciamos nuestro Curso de Básica 2 con el siguiente análisis:

**Tenemos la función $y = x^3$ y específicamente en el punto $P(1,1)$ queremos encontrar la recta tangente.**

¿Qué hacer para encontrarla, ya que solo tenemos un punto?

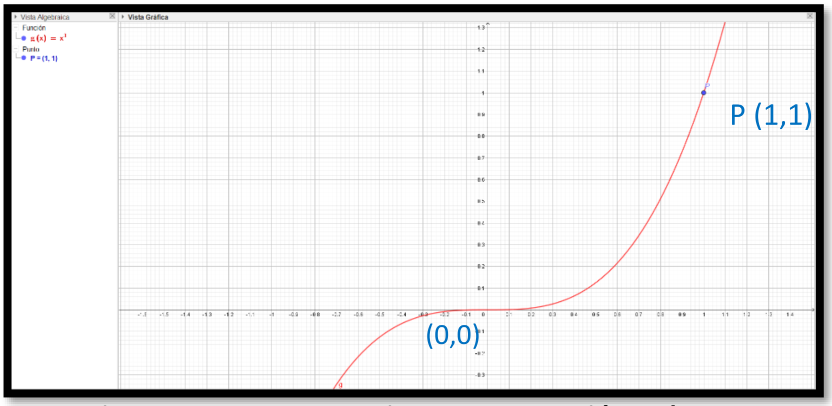



**Figura No. 8 Comportamiento De La Función Y El Punto P**

Lo que hacemos entonces, es introducir un nuevo punto llamado Q y con coordenadas Q$(x, x^3)$ para que vaya siendo parte de la función y así poder unir ambos puntos P y Q con una recta

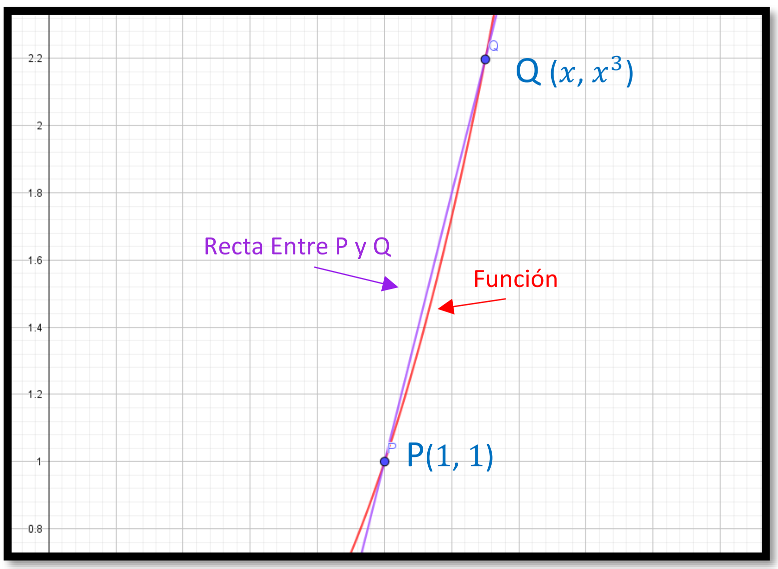



**Figura No. 9 Grafica De la recta Tangente(morada) y la función (Roja)**

Viendo lo anterior se puede decir:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x^3 - 1}{x - 1} \quad Donde\ x \neq 1$$

$$m\ es\ la\ pendiente\ de\ la\ recta\ tangente$$

Acá se inicia con el análisis de Cálculo, el análisis Infinitesimal, lo que se hace es comenzar a aproximar el punto Q al punto P, o sea $x \to 1$.

Este análisis Se puede realizar por medio de una tabla ya que $m(x) = f(x)$

| Iteración | $x \to 1^{+}$ | $m(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ |
|---|---|---|
| 1 | 1.1 | 3.31 |
| 2 | 1.01 | 3.0301 |
| 3 | 1.001 | 3.003001 |
| 4 | 1.0001 | 3.00030001 |
| 5 | 1.00001 | 3.00003 |

| Iteración | $x \to 1^{-}$ | $m(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.8 | 2.44 |
| 2 | 0.9 | 2.71 |
| 3 | 0.99 | 2.9701 |
| 4 | 0.999 | 2.997001 |
| 5 | 0.9999 | 2.99970001 |

Vemos que:

$$x \to 1^{+} \quad m \to 3 \qquad y\ \ Cuando \qquad x \to 1^{-} \quad m \to 3$$

Por lo cual la pendiente Tangente es 3 (m = 3)

$$utilizamos\ la\ ecuación\ y - y_0 = m(x - x_0) \quad Para\ encontrar\ la\ ecuación$$

$$y - 1 = 3(x - 1)$$

$$y = 3x - 2$$

Ecuación De La Recta Tangente

Esto mismo lo podemos representar de forma gráfica.

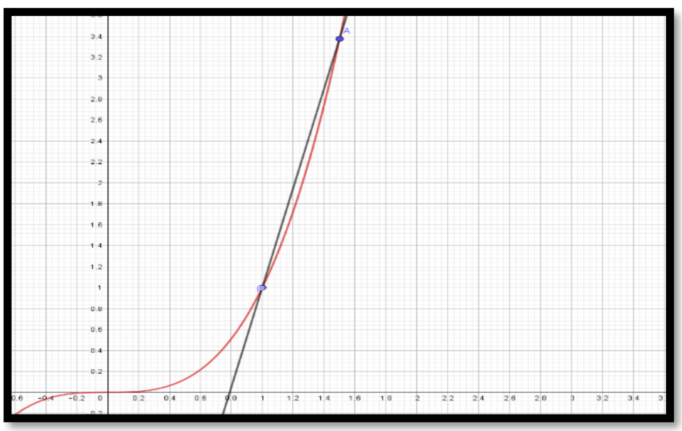


**Figura No. 10 Recta No.1**

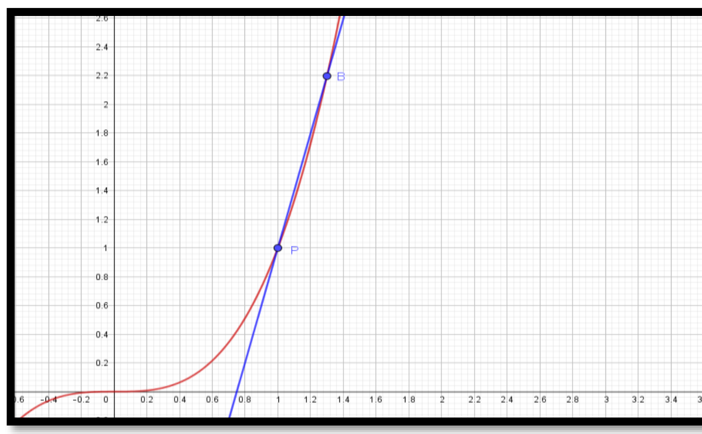


**Figura No. 11 Recta No 2**

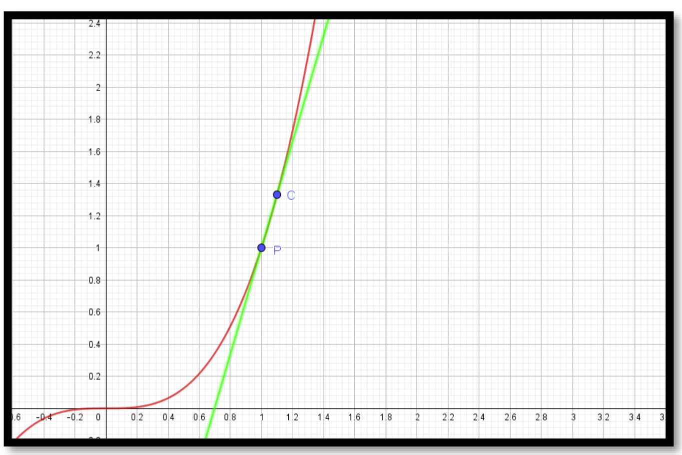


**Figura No. 12 Recta No 3**

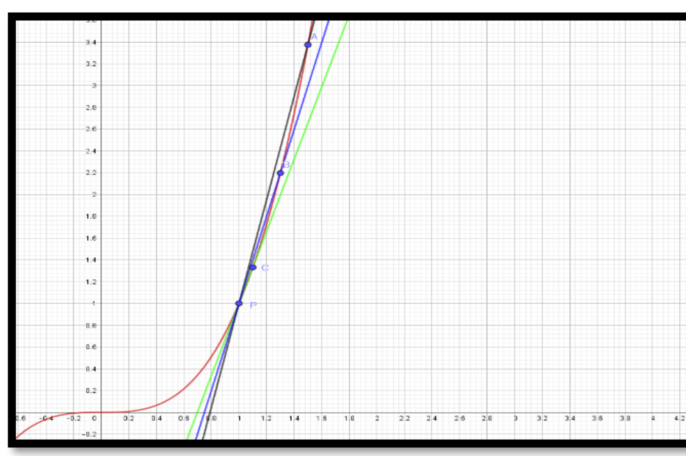


**Figura No. 13 Familia De Las Rectas Anteriores**

En las figuras se puede ver que: Mientras más se aproxime x a 1 $(x \to 1)$, más se nota que es una recta tangente por lo que podemos determinar que:

**El Límite de las rectas secantes Es la Recta Tangente**

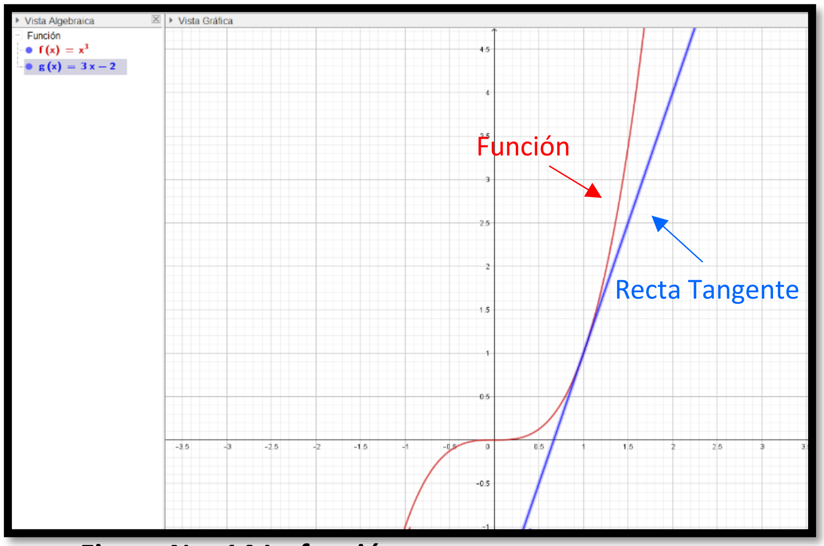



**Figura No. 14 La función y su recta tangente**

## Definición De Límite

El Límite es un tipo de *Evaluación* que se le hace a las funciones para ver qué pasa antes y después de un punto querido a evaluar.

**Cuidado:** El límite no es evaluar la función directamente

$$f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$$

## Existen 3 formas de avaluar Un Límite

*Forma Numérica (Por Tablas)

Para ver la tendencia al ir Interpolando los valores y acercarlos más a "a".

*Forma Gráfica

Se observa la gráfica de forma inmediata y se observa si coincide o no el límite y si coincide por los laterales se observa la tendencia o el valor de límite.

*Forma Algebraica *(La más difícil pero la más útil)*

Anteriormente vimos la resolución de la forma numérica y la forma gráfica, ahora veremos la forma algebraica que es la más importante a comprender.

## *Forma Algebraica

Suponga que le piden la resolución del límite

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{sen(x) - \cos(x)}{x - \frac{\pi}{4}}$$

Por tablas Tendríamos:

| x→ $\frac{\pi}{4}^{-}$ | $\frac{sen(x)-cos(x)}{x-\frac{\pi}{4}}$ |
|---|---|
| $\frac{\pi}{4}-0.1$ | 1.411857718 |
| $\frac{\pi}{4}-0.01$ | 1.414189992 |
| $\frac{\pi}{4}-0.001$ | 1.414213327 |
| $\frac{\pi}{4}-0.0001$ | 1.41421356 |

| x→ $\frac{\pi}{4}^{+}$ | $\frac{sen(x)-cos(x)}{x-\frac{\pi}{4}}$ |
|---|---|
| $\frac{\pi}{4}+0.1$ | 1.411857718 |
| $\frac{\pi}{4}+0.01$ | 1.414189992 |
| $\frac{\pi}{4}+0.001$ | 1.414213327 |
| $\frac{\pi}{4}+0.0001$ | 1.41421356 |

Al ver la tabla veríamos que el límite tiende a ser 1.414213…
Acá es donde hacemos el análisis, ¿Cuál es el verdadero valor del límite?
Por eso es importantísima la forma Algebraica pues **entrega el valor exacto del límite.** En este caso el resultado es $\sqrt{2}$ pero imagínese si el resultado fuera $\sqrt{\frac{\pi}{981}}$ (0.05659009626…) estaría difícil encontrar el valor por tabla y viendo la tendencia.

¿Cómo se resuelven los Límites Por La Forma Algebraica?
En esta parte es donde el estudiante Pierde la mayor calificación posible en su parcial, no pierde por Básica 2 sino más bien por la matemática básica 1, ya que no saben **FACTORIZAR.** Es importante que el estudiante entienda que, si no se recuerda o no sabe a fondo la factorización vuelva a su libro de algebra.

Volviendo al análisis

$$m = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} \longleftarrow \textit{Continuando con el análisis}$$

- Siempre Comenzamos a Evaluar el valor del límite $f(a)$, ya que lo que buscamos es que quede $\frac{0}{0}$ que indica que al sustituir $f(a) = \frac{(x-a)*g(x)}{(x-a)*h(x)}$ y lo que buscamos eliminar es esa expresión $f(x) = \frac{(x\cancel{-a})*g(x)}{(x\cancel{-a})*h(x)}$ para que quede $f(a) = \frac{g(a)}{h(a)}$ Y poder sustituir *a*

Entonces en nuestro análisis es importante acordarnos del caso No. 9 (Forma en clasificar del Libro Algebra Del Dr. Aurelio Baldor), Suma o Diferencia De Cubos Perfectos

1. $m = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(1)^3-1}{1-1} = \frac{0}{0} \quad significa\ que\ m = \frac{(x-1)*g(x)}{(x-1)*h(x)}$
2. Entonces procedemos a Simplificar con el caso No. 9

$$m = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x\cancel{-1})(x^2+x+1)}{x\cancel{-1}} = \lim_{x\to 1} x^2+x+1$$

$$m = 1^2+1+1 = 3$$

De esta manera se encuentra el límite Exacto.

**Al ver todo lo anterior entonces podemos Resumir el teorema que dice:**

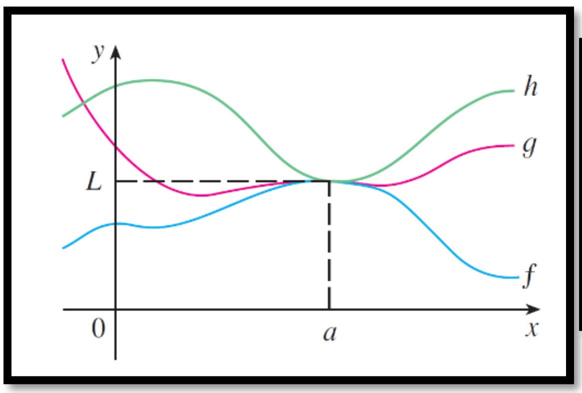
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \textit{Si y solo si} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

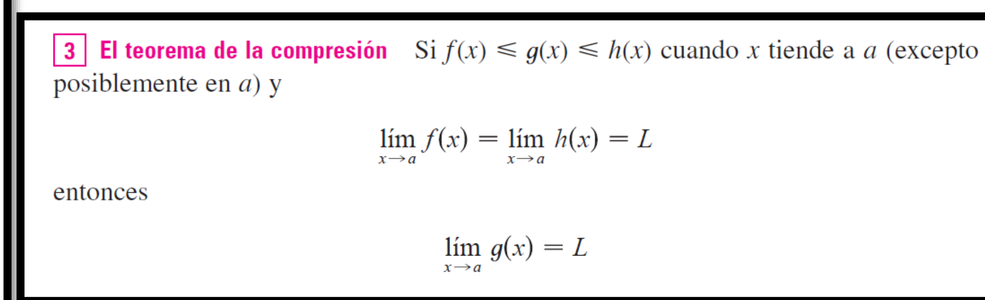
## Teorema De La Compresión

Este teorema lo que hace es encontrar un límite relacionando 3 funciones, es otra forma de encontrar los límites. Está relación puede ser por el signo de igualdad (=), mayor igual(≥), menor igual(≤)

Nos sirve el teorema también para **Demostrar** límites.

- El teorema consiste en dejar al centro la función a la que se le quiera aplicar el límite
- Entonces se aplica el Límite en los laterales y ese valor del límite (L) se dice que es entonces el mismo que para el límite de la función central
- Se debe relacionar las 3 funciones mediante el análisis del matemático que este resolviendo el límite, ya que estos pueden ser por Áreas, Distancias y demás…



**3 El teorema de la compresión** Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ cuando $x$ tiende a $a$ (excepto posiblemente en $a$) y

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

entonces

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

**Figura No. 15 Límite En el punto x=a** **Figura No. 16 Descripción Del Teorema De La Compresión**

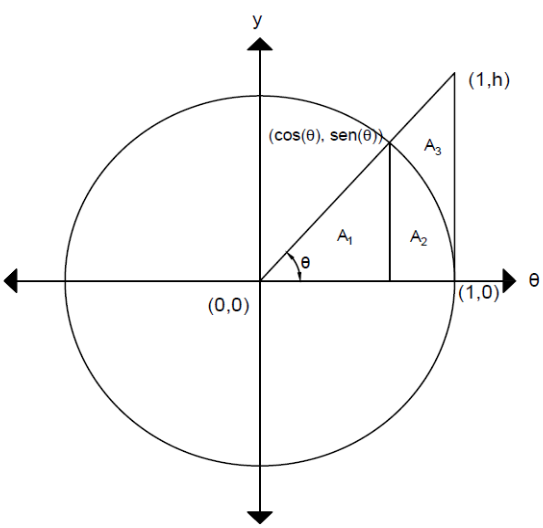
**(Imágenes Sacadas del cálculo De James Stewart 7ma Edición)**

## Límites Trigonométricos

Con los límites Trigonométricos se debe conocer la identidad que dice:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{sen(\theta)}{\theta} = 1$$

***Demostración:***




Recordando El Circulo unitario para puntos coordenados

$$sen(\theta) = \frac{y}{1} \qquad \cos(\theta) = \frac{x}{1}$$

$$y = sen(\theta) \qquad x = \cos(\theta)$$

Para encontrar h utilizamos relación de Triángulos

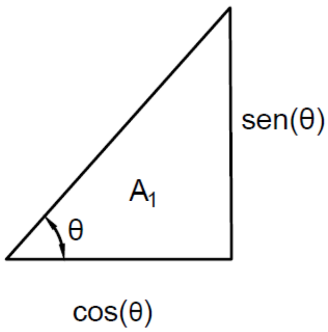
$$\frac{h}{sen(\theta)} = \frac{1}{\cos(\theta)} \quad \textit{Por tanto} \quad h = \tan(\theta)$$

Luego se hace el análisis De las 3 áreas ($A_1$, $A_2$ y $A_3$)

$$A1 \leq A2 \leq A3 \ (Teorema\ De\ La\ Compresión)$$

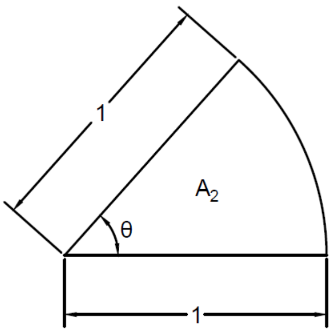
**Debemos estar claros desde que lo que buscamos Es:**

$$\lim_{\theta \to 0} f(\theta) \ \leq \ \lim_{\theta \to 0} \frac{sen(\theta)}{\theta} \ \leq \ \lim_{\theta \to 0} h(\theta)$$




- Encontrando el Área 1 ($A_1$) En términos del ángulo $A1(\theta)$

$$A1 = \frac{1}{2} * Base * Altura = \frac{1}{2} * \cos(\theta) * sen(\theta)$$

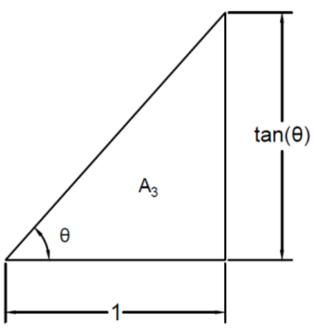



- Encontrando el Área 2 ($A_2$) En términos del ángulo $A2(\theta)$

$$A2 = \frac{\theta}{360°} * \pi * r^2 = \frac{\theta}{2\pi} * \pi * r^2 = \frac{\theta * r^2}{2}$$

Y sabemos que el radio es igual a 1 (Circulo Unitario)

$$A2 = \frac{\theta}{2}$$




- Encontrando el Área 3 (A3) En términos del ángulo $A3(\theta)$

$$A3 = \frac{1}{2} * Base * Altura = \frac{1}{2} * 1 * \tan(\theta)$$

$$A3 = \frac{sen(\theta)}{2\cos(\theta)}$$

- Relacionando las 3 áreas

$$A1 \leq A2 \leq A3$$

$$\frac{1}{2} * \cos(\theta) * sen(\theta) \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{sen(\theta)}{2\cos(\theta)} \quad En\ está\ parte\ solo\ se\ debe\ llega\ a\ lo\ requerido.$$

$$\cos(\theta) * sen(\theta) \leq \ \theta \leq \frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)}$$

$$cos(\theta) \leq \frac{\theta}{sen(\theta)} \leq \frac{1}{\cos(\theta)} \qquad Acá\ invertido\ las\ expresiones\ recordando\ que:$$

$$\frac{1}{\cos(\theta)} \ \geq \ \frac{sen(\theta)}{\theta} \ \geq \ \cos(\theta) \qquad Si\ teniamos\ \frac{1}{A} \leq \frac{1}{B}\ Entonces\ \ A \geq B$$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\cos(\theta)} \ \geq \lim_{\theta \to 0} \frac{sen(\theta)}{\theta} \ \geq \ \lim_{\theta \to 0} \cos(\theta)$$

$$1 \geq \lim_{\theta \to 0} \frac{sen(\theta)}{\theta} \geq 1 \qquad Por\ lo\ cual\ se\ concluye\ con\ que: \quad \lim_{\theta \to 0} \frac{sen(\theta)}{\theta} = 1$$

Otra forma de corroborar el límite es por el método gráfico

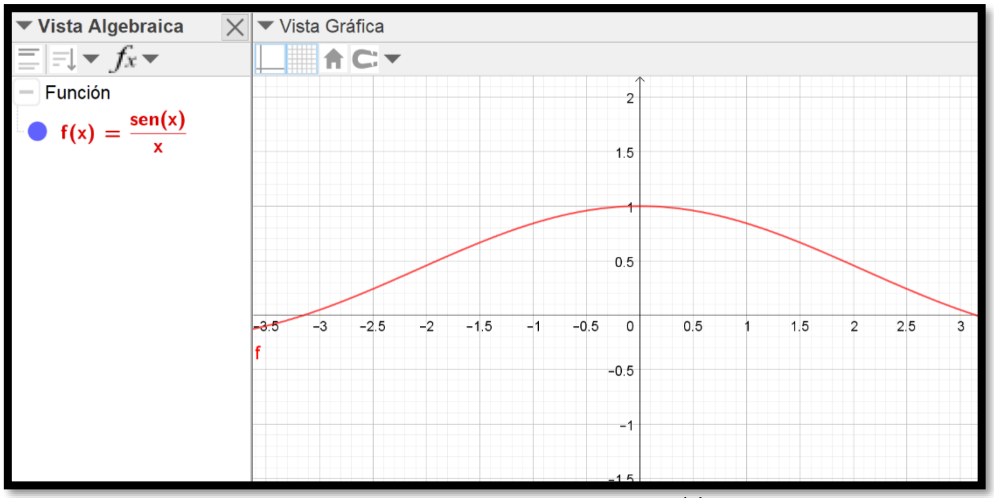



**Figura No. 17 Comportamiento de la función $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$ Imagen obtenida de GeoGebra 5**
**Se puede observar que: Cuando X se aproxima a 0 la función se aproxima a 1.**

Una vez analizado lo anterior podemos ver el siguiente tema:

## Límites Infinitos

Estos técnicamente no existen, pues lo único que indican es que la función tiende a un valor muy grande $\left(\lim_{x \to a} f(x) = \infty\right)$ o sea, no dan ningún valor en concreto y por eso se dice que no existen. Estos límites nos servirán muchísimo en el trazado de gráficas.
**Cuidado:** Debe recordar que el símbolo ∞ no indica un número sino es una simbología de que un valor es muy grande.

## Límites Al Infinito

Acá se analizan los límites cuando el valor de "$a$" tiende a ser muy grande ya sea por la izquierda o por la derecha ($x \to \infty$ ó $x \to -\infty$). Es importantísima está parte para el trazado de gráficas.

## La Definición Precisa Del Límite

Esta es la parte Matemática que define precisamente el límite, ¿cómo es? y realmente ¿qué es?
Anteriormente se definieron las palabras x tiende a… y L se aproxima a…
Pero fueron muy vagas.
En la figura No. 19 se puede observar el siguiente análisis.

$$\mathrm{x} - \mathrm{a} \approx \delta \qquad \mathrm{f(x)} - \mathrm{L} \approx \varepsilon$$
$$0 < |x - a| < \delta \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

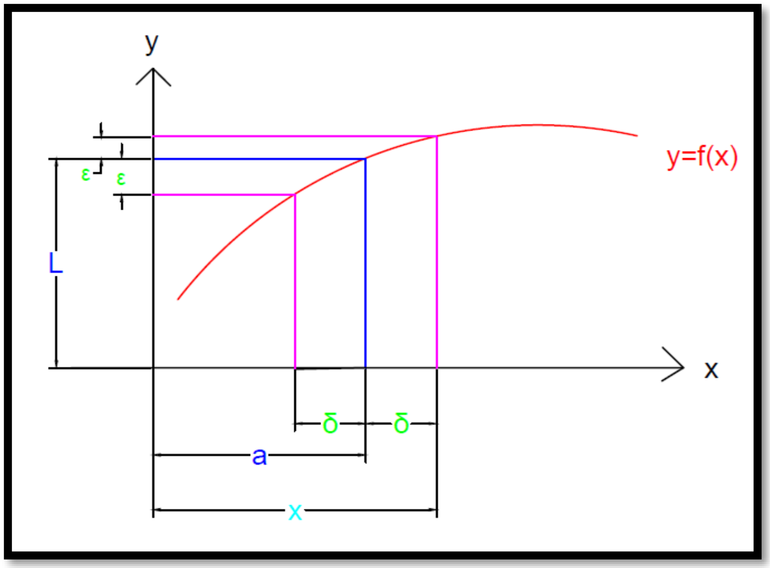



**Figura No. 18 Análisis de la definición Precisa del Límite**

**Definición:** Sea $y = f(x)$ la función definida sobre un intervalo abierto que contiene el número a, pero que posiblemente no está definida en x=a, entonces decimos que **El Límite de f(x) cuando x tiende a "a" es L** de esta manera:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad si\ y\ solo\ si \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$
$$Si\ para\ cada\ número\ \varepsilon > 0 \quad existe\ un\ número\ \delta > 0\ tal\ que:$$
$$si:\ 0 < |x - a| < \delta \quad entonces\ |f(x) - L| < \varepsilon$$

## Continuidad

La continuidad expresa el intervalo donde el trazo de la función no se ve interrumpida. Es decir, de donde a donde no se levanta el lápiz de la hoja
Los requisitos para que exista continuidad en un punto son:

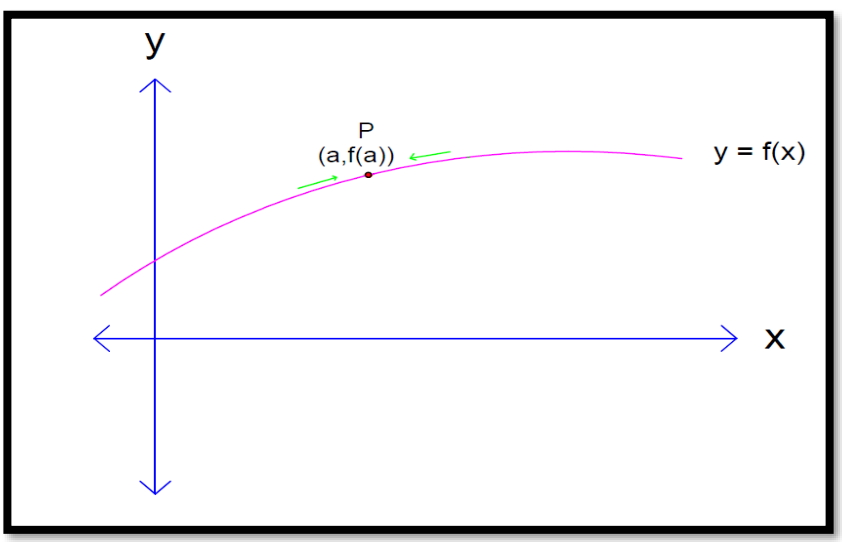



**Figura No. 19 Análisis de la continuidad en el punto P**

Viendo la **figura No. 19** podemos darnos cuenta los requisitos para que sea continua la función en un punto.

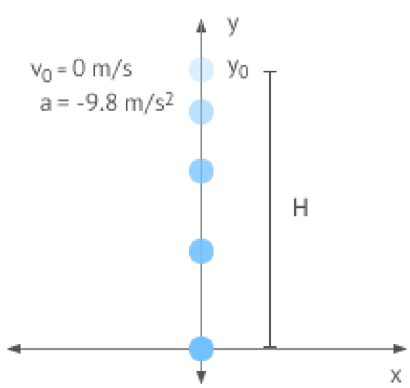
**Cuidado:** La continuidad se analiza en un punto específico.

1. Que el punto *a* sea parte del Dominio de la función
2. Que el límite de la función exista
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = L$$
3. Que El límite sea igual al valor que queda de evaluar la función en el punto *a*
$$\lim_{x\to a} f(x) = L = f(a)$$

## Aplicaciones De Los Límites

Uno de los problemas que acá vemos es: **el problema de la velocidad.** Este mismo sucede cuando se tiene una velocidad variable en cuanto al tiempo, por ejemplo, al ir manejando un automóvil usted podría notar que la velocidad del mismo está variando en el velocímetro.

Ahora, generalmente los problemas de velocidad que acá analizamos son los de **caída libre** en donde la **gravedad** es la aceleración constante pero donde la velocidad varia notablemente.
En la caída libre se sabe que el objeto cae independientemente a su masa y que solo depende de la velocidad inicial del objeto y altura inicial




**Sistema de Referencia en Caída Libre**

A la hora de resolver este tipo de problemas es común utilizar el sistema de referencia de la figura. El cuerpo siempre se encuentra sobre el eje Y positivo, e inicialmente su posición es $y_0 = H$, su velocidad es 0 m/sg (ya que parte del reposo) y su aceleración es constante e igual a la gravedad pero con signo negativo ya que la tendencia del movimiento es contrario al sentido del eje y. Ten en cuenta que **los valores de velocidad** que obtengas **serán también negativos.**

La ecuación que describe su posición, no solo de la caída libre sino de cualquier objeto que se somete a una aceleración constante, es:

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad en\ donde\ y(t) = f(t)$$

$$recuerde\ que:\ g = -9.8\ \frac{m}{seg^2};si\ se\ suelta\ el\ objeto\ v_0 = 0\frac{m}{seg};$$
$$que\ todo\ depende\ de\ su\ punto\ de\ referencia\ inicial.$$

Para encontrar la velocidad promedio decimos:

$$Velocidad\ Promedio = \frac{Cambio\ de\ posición}{Tiempo\ transcurrido} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

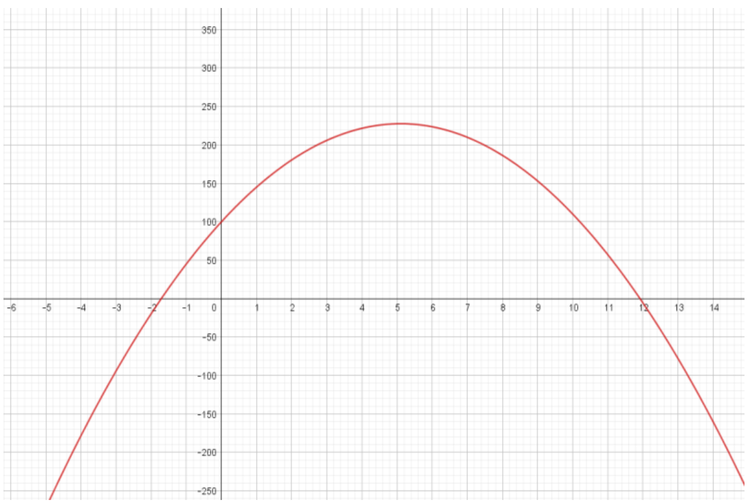
Entonces, cuando nos pidan encontrar la velocidad Instantánea es cuando debemos aplicar límites y el análisis que se hace es **el mismo que hacíamos con la pendiente tangente** y decimos que el límite de las velocidades promedio es la velocidad Instantánea.

$$Velocidad\ Instantanea = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad ; \quad Aceleración\ Instantanea = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta t}$$

**Nota:** Esto también aplica para cualquier función posición en términos del tiempo, no solo para la caída libre. Así mismo para la aceleración instantánea en un punto (derivada de la velocidad)

*Ejemplo: Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta con ecuación de movimiento* $s = 100 + 50t - 4.9t^2$ *donde s se mide en metros y t en segundos. Halle la velocidad y la rapidez cuando t=5 segundos*

Resolviendo




Viendo la gráfica ingresaríamos un punto dentro de la función con coordenadas $\mathrm{P}(5, 227.5)$. Luego ingresamos otro Punto que sea parte de la función con coordenadas $Q(t, s) = (t, 100 + 50t - 4.9t^2)$ donde $Q \to P\ o\ sea\ t \to 5$

Entonces la pendiente entre el eje horizontal (tiempo) y el eje vertical (distancia=s) será la pendiente

$$velocidad = \mathrm{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{100 + 50t - 4.9t^2 - s(5)}{t - 5} = \frac{100 + 50t - 4.9t^2 - 227.5}{t - 5}$$

$$\mathrm{v} = \frac{-4.9t^2 + 50t - 127.5}{t - 5} \quad \text{"}Velocidad\ promedio\ en\ terminos\ de\ t\text{"}$$

Como lo que me están pidiendo es la velocidad instantánea entonces decimos que:

$El\ tiempo\ se\ aproxima\ a\ 5\ infinitesimalmente$

$t \to 5$

$$\mathrm{v} = \lim_{t \to 5} \frac{-4.9t^2 + 50t - 127.5}{t - 5}$$

- Evaluamos en la velocidad el tiempo igual a 5 para ver que quede 0/0

$$v(5) = \frac{-4.9(5)^2 + 50(5) - 127.5}{5-5} = \frac{0}{0}$$

- Como quedo 0/0 significa que podemos evaluar ese límite de la forma algebraica
- Debemos factorizar: Para factorizar la velocidad en el numerador sabemos que es divisible por $t - 5$ misma división la podemos hacer por división sintética.

$$\begin{array}{ccc|c} -4.9 & 50 & -127.5 & 5 \\ & 24.5 & 127.5 & \\ \hline -4.9 & 25.5 & 0 & \end{array}$$

Entonces: $-4.9t^2 + 50t - 127.5 = (t-5)(-4.9t + 25.5)$

$$v = \lim_{t\to 5} \frac{-4.9t^2 + 50t - 127.5}{t-5} = \lim_{t\to 5} \frac{\cancel{(t-5)}(-4.9t+25.5)}{\cancel{t-5}}$$

$$v = \lim_{t\to 5} -4.9t + 25.5 = 1\ m/seg$$

$$v = 1\ m/s \text{ (Rapidez)} \qquad V = 1\ m/s \text{ hacia arriba (Velocidad)}$$

**Análisis:** La velocidad quedo positiva por qué significa que el objeto aún sigue subiendo, o sea va para arriba, mientras que cuando queda negativa significa que va hacia abajo el signo de la velocidad nos indica su dirección respecto al plano de ubicación.

## EJERCICIOS RESUELTOS

**1.** $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$

1. Primero Evaluamos: $\frac{\sqrt{6-2}-2}{\sqrt{3-2}-1} = \frac{2-2}{1-1} = \frac{0}{0}$
2. Ahora procedemos a racionalizar el numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1} * \frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{3-x}+1} * \frac{\sqrt{6-x}+2}{\sqrt{6-x}+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(6-x-4)(\sqrt{3-x}+1)}{(3-x-1)(\sqrt{6-x}+2)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(2-x)}(\sqrt{3-x}+1)}{\cancel{(2-x)}(\sqrt{6-x}+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{6-x}+2} = \frac{1+1}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1} = \frac{1}{2}$$

**2.** $$\lim_{x\to 0} \frac{sen(8x)}{sen(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{sen(8x)}{sen(3x)} * \frac{\frac{8}{8x}}{\frac{3}{3x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{8*sen(\cancel{8x})}{\cancel{8x}}}{\frac{3*sen(\cancel{3x})}{\cancel{3x}}} = \frac{8}{3}$$

**3.** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{sen\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}-2sen(x)}$

a) Primero evaluamos para ver si se indefine: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{sen\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}-2sen\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{0}{0}$

b) Lo que se hace es hacer una sustitución: $u = x - \frac{\pi}{3} \;\therefore\; x \to \frac{\pi}{3}\; u \to 0$

Esto se hace para llegar a la forma $\lim\limits_{u \to 0} \frac{sen(u)}{\text{u}} = 1$

$$\lim_{u \to 0} \frac{sen(u)}{\sqrt{3} - 2sen\left(u + \frac{\pi}{3}\right)} = \lim_{u \to 0} \frac{sen(u)}{\sqrt{3} - 2\left[senu * \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + sen\left(\frac{\pi}{3}\right) * \cos(u)\right]}$$

$$\lim_{u \to 0} \frac{sen(u)}{\sqrt{3} - 2\left[\frac{1}{2} * sen(u) + \frac{\sqrt{3}}{2} * \cos(u)\right]} = \lim_{u \to 0} \frac{sen(u)}{\sqrt{3} - sen(u) - \sqrt{3}\cos(u)}$$

$$\lim_{u \to 0} \frac{sen(u)}{-sen(u) + \sqrt{3}(1 - \cos(u))} = \lim_{u \to 0} \frac{\frac{sen(u)}{u}}{\frac{-sen(u)}{u} + \sqrt{3} * \cancel{\frac{1 - \cos(u)}{u}}} = \frac{1}{-1 + 0} = -1$$

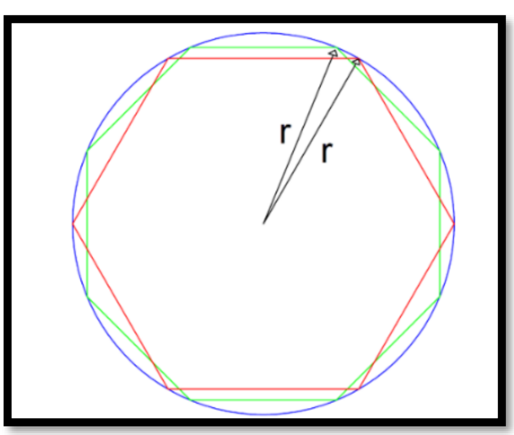
Por aparte resolvemos:

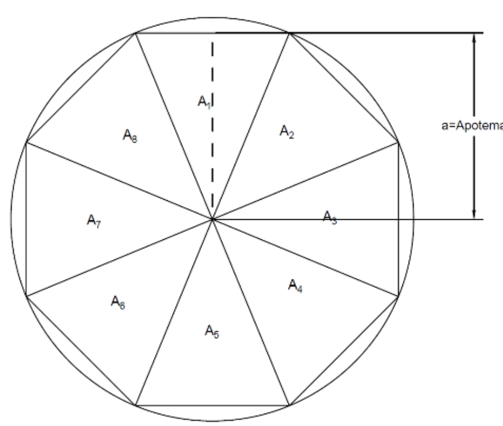
$$\lim_{u \to 0} \frac{1 - \cos(u)}{u} * \frac{1 + \cos(u)}{1 + \cos(u)} = \lim_{u \to 0} \frac{1 - cos^2(u)}{u(1 + \cos(u))} = \lim_{u \to 0} \frac{sen^2(u)}{u(1 + \cos(u))} = 0$$

Entonces concluimos que: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{sen\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}-2sen(x)} = -1$

**4.** $\lim\limits_{y \to \infty} \frac{\sqrt{y}+y^2}{2y-y^2} = \lim\limits_{y \to \infty} \frac{\sqrt{y}+y^2}{2y-y^2} * \frac{\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{y^2}} = \lim\limits_{y \to \infty} \frac{\cancel{\frac{1}{y^{3/2}}}+1}{\cancel{\frac{2y}{y^2}}-1} = -1$

**5.** Demuestre que cuando el número de lados del Polígono Regular aumenta y tiende a ser infinito ($n \to \infty$) el área del mismo polígono es igual al área de un circulo con radio r.



$$Ap = \acute{A}rea\ Del\ Poligono = \frac{apotema * número\ de\ lados * Medida\ de\ un\ Lado}{2} = \frac{a * n * l}{2}$$

- $\theta = \frac{360}{n} = \frac{2\pi}{n}\quad entonces\ \ n = \frac{2\pi}{\theta}$ $\quad$ $OJO$: $cuando\ n \to \infty \quad \theta \to 0$
- $sen\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\frac{l}{2}}{r} = \frac{l}{2r}\quad entonces\quad 2r * sen\left(\frac{\theta}{2}\right) = l$
- $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{a}{r}\quad entonces\quad r * \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = a$

$Recordamos\ la\ identidad:\quad sen(2x) = 2 * sen(x) * \cos(x)$

$$Ap = \frac{r * \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) * \frac{2\pi}{\theta} * 2r * sen\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} = \frac{2\pi r^2 * sen(\theta)}{2\theta} = \frac{\pi * r^2 * sen(\theta)}{\theta}$$

Acá Vemos la Aplicación y la Importancia de los límites pues al tener:

$Ap(\theta) = \frac{\pi * r^2 * sen(\theta)}{\theta}$ Lo que estoy indicando es que el área del Polígono está en términos

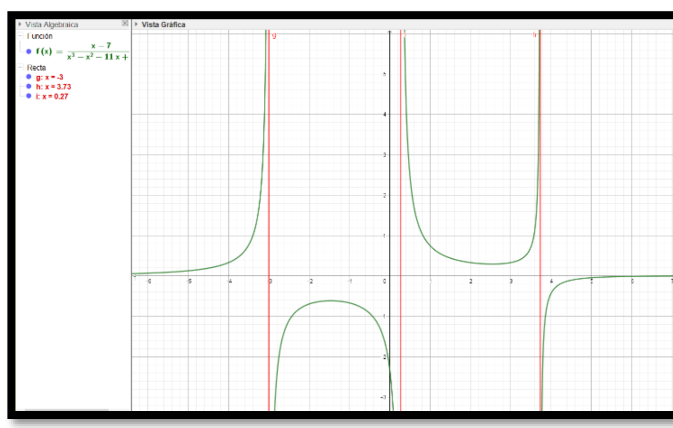
Del ángulos $\theta$ y al aplicar que $\theta \to 0$ estoy evaluando.

$$Ap = Area\ Del\ circulo = \lim_{\theta \to 0} \frac{\pi * r^2 * sen(\theta)}{\theta} = \pi * r^2 * \lim_{\theta \to 0} \frac{sen(\theta)}{\theta}$$

$$Ap = \pi * r^2 \qquad Cuando\ n \to \infty\ \ o\ \ \theta \to 0$$

**6.** Dada la función $f(x) = \frac{x-7}{x^3 - x^2 - 11x + 3}$ Analizar la continuidad en su dominio

- Para encontrar el dominio, primero encontramos
Los valores en donde la función no está definida.
$x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | -1 | -11 | 3 | -3 |
| | -3 | 12 | -3 | |
| 1 | -4 | 1 | 0 | |

Por división Sintética
Simplificamos

$$x^3 - x^2 - 11x + 3 = (x+3)(x^2 - 4x + 1) = 0$$

$$x = -3 \quad x = 2 + \sqrt{3} \quad x = 2 - \sqrt{3}$$

$$\lim_{x \to -3} \frac{x-7}{(x+3)(x^2 - 4x + 1)} = \nexists \qquad \lim_{x \to 2+\sqrt{3}} \frac{x-7}{(x+3)(x^2 - 4x + 1)} = \nexists$$

$$\lim_{x \to 2-\sqrt{3}} \frac{x-7}{(x+3)(x^2 - 4x + 1)} = \nexists$$

Por lo que se concluye que: El dominio de la función es

$$(-\infty, -3)\ \text{U}\ (-3, 2-\sqrt{3})\ \text{U}\ (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})\ \text{U}\ (2+\sqrt{3}, \infty)$$

# DERIVADAS

Está parte de la matemática comienza a ser un tanto agresiva, por lo que el lector, o sea usted, debe continuar con su preparación y no asustarse sino tratar de comprender el tema

*Volvemos a nuestro análisis de límites inicial de encontrar pendientes tangentes*:

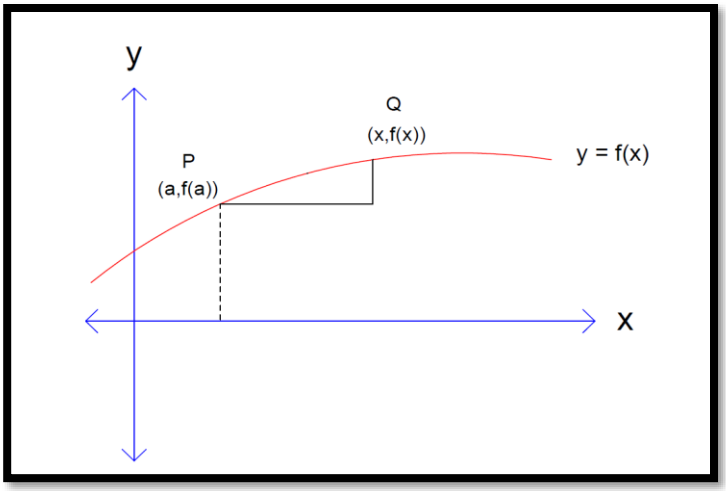



**Figura No. 20 Análisis Inicial de Derivadas**

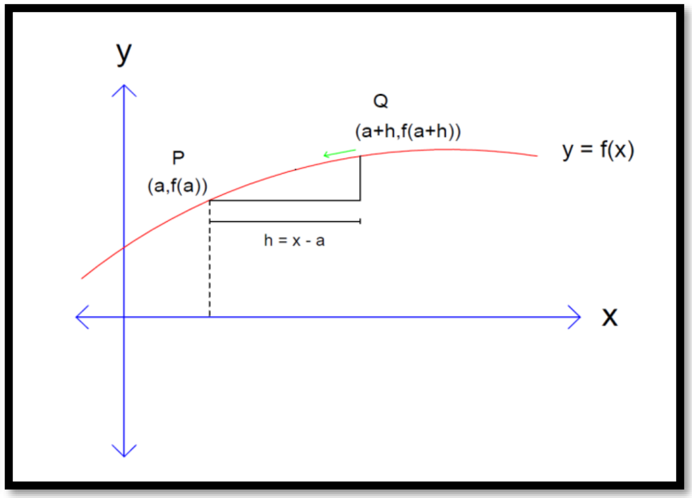



**Figura No. 21 Sustitución de h = x - 1**

Viendo la figura No. 20 y asumiendo que a es constante vemos que la pendiente es:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Entonces hacemos la sustitución: $h = x - a \quad y\ cuando \quad x \to a \quad h \to 0$

Quedando al sustituir: $$\boldsymbol{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

La ecuación anterior es lo que conocemos como "**La Derivada como límite**" y es **una fórmula para encontrar la pendiente tangente por límite**
entonces:

**¿Qué es una derivada?**

Al inicio del análisis se presentaba la idea de la pendiente tangente. Entonces la derivada sigue siendo lo mismo Una Pendiente, pero más adelante veremos que es más que eso, es una razón de cambio.
(La variable del numerados divido por la variable del denominador)

Anteriormente se asumía que a era una constante y más adelante encontrará ejemplos de ello, pero y si ahora nos hacemos a la siguiente pregunta:
y si yo quisiera encontrar una función general de la pendiente en términos de x, en otras palabras, si tengo una función y = f(x) a través de ella como podría encontrar la función pendiente "m "en términos de x ¿Cómo lo hago?

## Derivada General de una función

Esto es para contestar a la pregunta anterior, entonces lo que hacemos es sustituir la constante a por la variable x ya que ahora esa a=x será variable o simplemente cambiante.

$$\boldsymbol{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

*Ejemplo:*

a) Encontrar la ecuación de la recta Tangente de la función $y = x^3$ en el punto P(1, 1)

b) Encontrar la función punto pendiente de la misma función.

*Resolución inciso a*

- Este análisis como recordará el lector ya lo habíamos realizado y nos quedaba la pendiente tangente igual a 3, esto cuando x se aproximaba a 1 por la izquierda y por la derecha.
- Ahora la sacaremos utilizando la fórmula

$$f(x) = x^3 \quad Entonces: \; m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h}$$

$a = 1$

$f(a+h) = f(1+h) = (1+h)^3$

$f(a) = f(1) = 1$

Para resolver eso, utilizamos las leyes de los límites

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} 3 + 3h + h^2 = m = 3$$

*Resolución Inciso b*

$$f(x) = x^3 \quad Entonces: \; m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$a = x$

$f(a+h) = f(x+h) = (x+h)^3$

$f(a) = f(x)$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = m = \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^3 = 3x^2 + 3x(0) + (0)^3 = 3x^2$$

$m = 3x^2$ Está sería la función punto pendiente de la función $y = x^3$

En Resumen: Si tenemos la función $y = f(x)$ la derivada será:

$$y' = f'(x) = \frac{d\,f(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad y \text{ será la primera derivada}$$

## Regla Del Producto

Suponga que le piden derivar la función compuesta $y = sen(x) * x^2$ ¿Cómo lo derivará si no existe ninguna identidad para ello?

Bueno, pues para eso está la regla del producto que dice que si tenemos una función compuesta la derivada será:

$$y = f(x) * g(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}f(x) * g(x) + \frac{d}{dx}g(x) * f(x)$$

**Demostración**

$y = f(x) * g(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) * g(x+h) - f(x) * g(x)}{h} \quad \textit{siguiendo la ecuación de derivada como límite}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) * g(x+h) - f(x+h) * g(x) + f(x+h) * g(x) - f(x) * g(x)}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) * g(x+h) - f(x+h) * g(x)}{h}}_{factor\ común\ f(x+h)} + \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) * g(x) - f(x) * g(x)}{h}}_{factor\ común\ g(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x+h) * \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) -* g(x)}{h} + g(x) * \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$sabiendo\ que: \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad y \quad que: \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) * g'(x) + g(x) * f'(x) \quad Demostrando\ asi\ la\ fórmula$$

Entonces para resolver esa función seria

*Ejemplo*

$y = sen(x) * x^2$

$f(x) = sen(x)$ $\qquad$ $g(x) = x^2$

$f'(x) = \cos(x)$ $\qquad$ $g'(x) = 2x$

$y' = \cos(x) * x^2 + 2x * sen(x)$

**NOTA:** Si tuviera una función $y = h(x) * i(x) * j(x) * k(x)$ tendría que ver que:

$$f(x) = h(x) * i(x) \qquad g(x) = j(x) * k(x)$$

Y que: $f'(x) = h'(x) * i(x) + i'(x) * h(x)$ ; $g'(x) = j'(x) * k(x) + k'(x) * j(x)$

Para llevarla a la forma $y = f(x) * g(x)$

Y decir: $y' = f'(x) * g(x) + g'(x) * f(x)$

## Regla Del Cociente

Así mismo como se analizó la regla del producto se analiza la regla del cociente.

Suponga que le piden encontrar la derivada de la función compuesta $y = \frac{sen(x)}{x^2}$

¿Cómo lo hará?

Bueno, pues para eso está la regla del cociente que dice que:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\frac{d}{dx}f(x) * g(x) - \frac{d}{dx}g(x) * f(x)}{[g(x)]^2} = \frac{f'(x) * g(x) - g'(x) * f(x)}{[g(x)]^2}$$

***Demostración***

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h) * g(x) - f(x) * g(x+h)}{g(x+h) * g(x)}}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) * g(x) - f(x) * g(x+h)}{h * g(x+h) * g(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) * g(x) - f(x) * g(x) + f(x) * g(x) - f(x) * g(x+h)}{h * g(x+h) * g(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x)[f(x+h) - f(x)] - f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h * g(x+h) * g(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x) * \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) * \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h) * g(x)}$$

$$sabiendo\ que\text{:}\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)\ \ y\ que\text{:}\ \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x) * f'(x) - f(x) * g'(x)}{g(x+h) * g(x)} = \frac{g(x) * f'(x) - f(x) * g'(x)}{g(x) * g(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x) * f'(x) - f(x) * g'(x)}{[g(x)]^2} \quad Demostrando\ asi\ la\ fórmula$$

*Ejemplo*

$$y = \frac{sen(x)}{x^2}$$

$$f(x) = sen(x) \qquad g(x) = x^2$$

$$f'(x) = \cos(x) \qquad g'(x) = 2x$$

$$y' = \frac{x^2 * \cos(x) - 2x * sen(x)}{[x^2]^2} = \frac{x\cos(x) - 2sen(x)}{x^3}$$

$$y' = \frac{x\cos(x) - 2sen(x)}{x^3}$$

## Regla De La Cadena

Asuma que le piden encontrar la derivada de la función:

$$y = sen(x)$$

Usted ya sabe que la derivada de la misma será $y' = \cos(x)$

Pero…

Y si nos piden Encontrar la derivada de la función $y = sen(x^2)$, ¿será que él resultado es $y' = \cos(x^2)$

Precisamente de esto nace la regla de la cadena, que nos ayuda a resolver derivadas de funciones muy complejas

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{d\,y}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

Si se da cuenta no se altera nada, puesto que al ver nuevamente el análisis nos damos cuenta que $\frac{d\,y}{dx} = \frac{dy}{\cancel{du}} * \frac{\cancel{du}}{dx}$

**Nota:** Vea que si hace varias sustituciones tendría que utilizar la regla de la cadena de forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dm} * \frac{dm}{dp} * \frac{dp}{dk} * \frac{dk}{dx} \quad si\ usted\ ve\ el\ analisis, no\ altero\ nada$$

### ¿Qué Es Entonces la Regla de la Cadena?

Es hacer una o varias sustituciones de modo de llevar la función inicial a una parte donde se pueda derivar utilizando las identidades de derivación.

*Ejemplo*

$y = sen(x^2)$ $\qquad u = x^2 \quad entonces \quad \frac{du}{dx} = 2x$

$Al\ Sustituir\ quedaría\ \ y = sen(u)$

$$\frac{dy}{du} = \cos(u)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} = \cos(u) * 2x = \cos(x^2) * 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x * \cos(x^2)$$

## Derivación Implícita

Existen dos tipos de funciones

*Funciones Explicitas

Son las funciones que se expresan de Manera y = f(x)

Es decir: Se logra dejar y en términos de x

*Funciones Implícitas

Son las funciones que se expresan de manera g (x, y) = f (x, y)

ejemplo:

$$3x + sen(y^x) + e^{\frac{1}{x-y}} = \ln(xy)$$

*Entonces:*

Esta parte nos sirve para "Derivar Funciones Implícitas o sea funciones donde no podemos dejar y en términos de x, o ya sea x en términos de y"

- Para resolverla necesitamos comprender bien la Regla de la cadena.
- Si le piden $\frac{dy}{dx}$ entonces la función que tenga $g(x,y)=f(x,y)$ la multiplicamos por $\frac{d}{dx}[g(x,y)]=\frac{d}{dx}[f(x,y)]$
- Si nos piden $\frac{dx}{dy}$ entonces a la función que tenga $g(x,y)=f(x,y)$ la multiplicamos por $\frac{d}{dy}[g(x,y)]=\frac{d}{dy}[f(x,y)]$
- Recuerde que para derivar necesita $\frac{df(x)}{dx}$ osea la función en términos de la variable $\left(\text{No puede derivar } \frac{df(y)}{dx}\right)$

*Ejemplo: Encuentre la derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función: $3x^2+4y-sen(xy)=e^x+e^y$*

*Tal como se dijo, no se puede dejar y en términos de x por lo que procedemos a derivar implícitamente*

$$\frac{d}{dx}[3x^2+4y-sen(xy)]=\frac{d}{dx}[e^x+e^y]$$

$$\frac{d}{dx}(3x^2)+\frac{d}{dx}(4y)-\frac{d}{dx}\big(sen(xy)\big)=\frac{d}{dx}(e^x)+\frac{d}{dx}(e^y)$$

$$6x+4\frac{d}{dy}(y)*\frac{dy}{dx}-\frac{d}{dx}\big(sen(xy)\big)=e^x+\frac{d}{dy}(e^y)*\frac{dy}{dx}$$

*Por aparte resolvamos:*

$$\frac{d}{dx}\big(sen(xy)\big) \quad \textit{para ello podríamos hacer una sustitución}: u=xy$$

$$\frac{du}{dx}=y+x\frac{dy}{dx} \quad \textit{para derivar eso nos auxiliamos de la regla del producto}$$

$$\frac{d}{du}sen(u)*\frac{du}{dx}=\cos(u)*\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}sen(xy)=\cos(xy)\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)$$

*Entonces volviendo a la derivada tendremos:*

$$6x+4\frac{dy}{dx}-ycos(xy)-xcos(xy)\frac{dy}{dx}=e^x+e^y\frac{dy}{dx}$$

$$6x+4y'-ycos(xy)-xcos(xy)\,y'=e^x+e^y y'$$

$$4y'-xcos(xy)\,y'-e^y y'=e^x+y\cos(xy)-6x$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{e^x+y\cos(xy)-6x}{4-xcos(xy)-e^y}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{e^x+y\cos(xy)-6x}{4-xcos(xy)-e^y}$$

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{d}{dx}(c)=0$ | $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$ | $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$ |
| $(cf)'=cf'$ | $(f+g)'=f'+g'$ | $(f-g)'=f'-g'$ |
| $(fg)'=fg'+gf'$ | $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{gf'-fg'}{g^2}$ | |

## Derivadas De Funciones Logarítmicas

Las derivadas Logarítmicas tienen toda una sección, la 3.6 en el Cálculo De Stewart.

$$\frac{d}{dx}(log_a x) = \frac{1}{x\ lna} \qquad\qquad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

Para derivar acá nos auxiliamos de:
Leyes de los Logaritmos
La regla de la cadena
La regla del producto
Regla del cociente
Propiedades de las derivadas

*Ejemplo: Encuentre la derivada con respecto a x de la siguiente función*

$$y = ln\left(\frac{\sqrt{x+1}}{2x-1}\right)$$

1. *Utilizando las leyes de los logaritmos podríamos decir:* $Ln\left(\frac{A}{B}\right) = Ln\ A - Ln\ B$

$$y = ln\left(\sqrt{x+1}\right) - ln(2x-1) \ = \ ln\left((x+1)^{\frac{1}{2}}\right) - \ln(2x-1)$$

$$y = \frac{1}{2}\ln(x+1) - \ln(2x-1)$$

2. *Aplicar la Derivada*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln(x+1) - \ln(2x-1)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln(x+1) - \frac{d}{dx}\ln(2x-1)$$

3. *Derivando*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} * \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x-1} * 2 \qquad\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x+2} - \frac{2}{2x-1}$$

## Derivación Logarítmica

Comúnmente el cálculo de las derivadas de funciones que contienen productos, cocientes o potencias pueden complicarse. Para ello está este tipo de derivación que utiliza la ley Logarítmica $Ln(x^a) = a\ Lnx$ a su favor, ya que hace que baje una potencia como multiplicador

1. Introduzca logaritmos naturales por ambos lados de la función $y = f(x)$
2. Derive Implícitamente respecto a x o la variable que le soliciten
3. Resuelva la ecuación despejando para $y' = \frac{dy}{dx}$

*Ejemplo:*

$$y = \frac{x^{3/8} * \sqrt{4+x^4}}{(x-1)^2 * \sqrt[3]{x+2}}$$

1. $Ln(y) = Ln\left(\frac{x^{3/8} * \sqrt{4+x^4}}{(x-1)^2 * \sqrt[3]{x+2}}\right)$

$$Ln(y) = Ln(x^{3/8}) + Ln\left(\sqrt{4+x^4}\right) - Ln((x-1)^2) - Ln\left((x+2)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$Ln(y) = \frac{3}{8}Ln(x) + \frac{1}{2}Ln(4+x^4) - 2Ln(x-1) - \frac{3}{2}Ln(x+2)$$

2. $\frac{d}{dx}Ln(y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{8}Ln(x) + \frac{1}{2}Ln(4+x^4) - 2Ln(x-1) - \frac{3}{2}Ln(x+2)\right)$

$$\frac{d}{dy}Ln(y) * \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{8}Lnx\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}Ln(4+x^4)\right) - \frac{d}{dx}\left(2Ln(x-1)\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}Ln(x+2)\right)$$

$$\frac{1}{y} * \frac{dy}{dx} = \frac{3}{8} * \frac{1}{x} + \frac{1}{2} * \frac{4x^3}{4+x^4} - \frac{2}{x-1} - \frac{3}{2} * \frac{1}{x+2}$$

3. Resuelva la ecuación despejando para y'

$$\frac{dy}{dx} = y * \left(\frac{3}{8} * \frac{1}{x} + \frac{1}{2} * \frac{4x^3}{4+x^4} - \frac{2}{x-1} - \frac{3}{2} * \frac{1}{x+2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/8} * \sqrt{4+x^4}}{(x-1)^2 * \sqrt[3]{x+2}} * \left(\frac{3}{8x} + \frac{2x^3}{4+x^4} - \frac{2}{x-1} - \frac{3}{2x+4}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/8} * \sqrt{4+x^4}}{(x-1)^2 * \sqrt[3]{x+2}} * \left(\frac{3}{8x} + \frac{2x^3}{4+x^4} - \frac{2}{x-1} - \frac{3}{2x+4}\right)$$

## APLICACIONES DE LA DERIVADA

Las aplicaciones de la derivada se resumen básicamente en 4 temas.
1.-Trazo De Graficas
2.- Razones a Fines (Razones De Cambio)
3.-Optimización
4.-Método de Newton

### Trazo De Graficas

Está parte de la matemática básica es **muy importante** Puesto que acá se realizan las gráficas reales, no como se realizaban en matemática básica 1 que eran aproximadas.

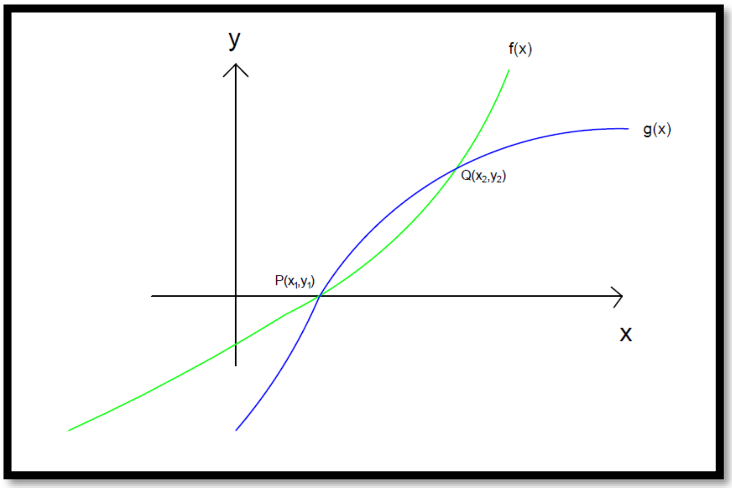



**Figura No. 22 Análisis del punto P al punto Q**

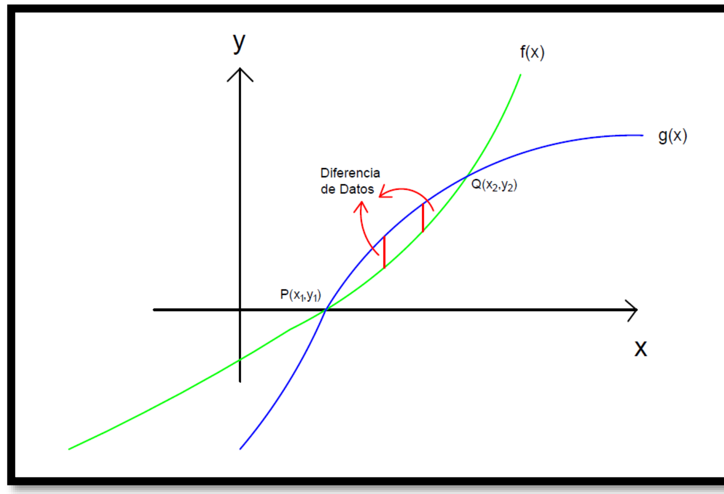



**Figura No. 23 Diferencia de Datos de P a Q**

En la figura No. 22 se presenta el análisis de dos funciones $[y = f(x);\ y = g(x)]$ Vemos que ambas ***funciones conectan ambos puntos P y Q***
¿Qué tienen de diferente ambas funciones de P a Q?
Esta diferencia entre ambas funciones se conoce como concavidad, algo que veremos más adelante.

### Primera Derivada De Una Función

Como se dijo anteriormente, la primera derivada $m = y' = \frac{dy}{dx}$ expresa la **pendiente.** En esta parte se debe analizar:

- Intervalos Positivos: Indican de donde a donde una función es creciente.
$$y' > 0$$
- Intervalos Negativos: Indican de donde a donde una función es Decreciente.
$$y' < 0$$
- Puntos Máximos o mínimos:
$$y' = 0$$
- Si en x=a hay un punto Máximo como se muestra en la imagen se debe cumplir:

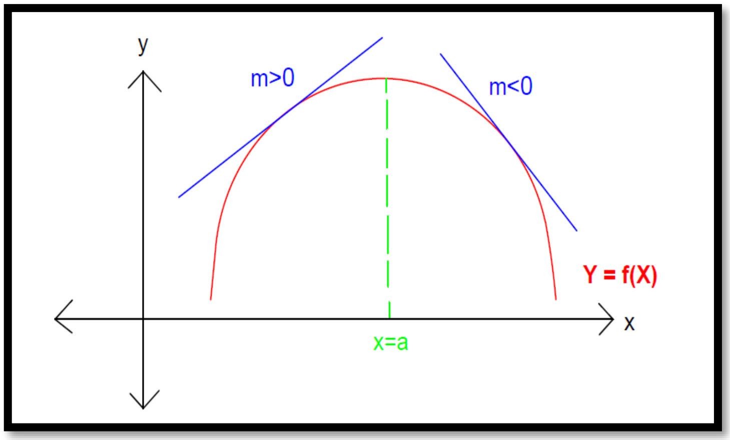



**Figura No. 24 Análisis De Un máximo relativo**

$$x \to a^{-} \quad m > 0 \quad y \quad x \to a^{+} \quad m < 0$$

Entonces en $x = a$ existe un mínimo

- Si en x=a hay un punto Mínimo como se muestra en la imagen se debe cumplir:

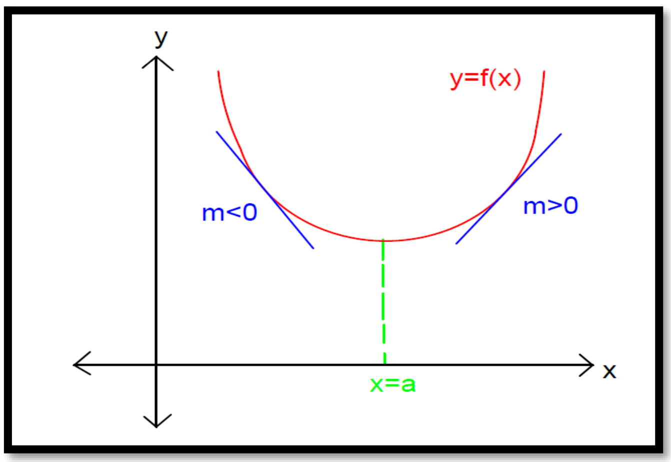
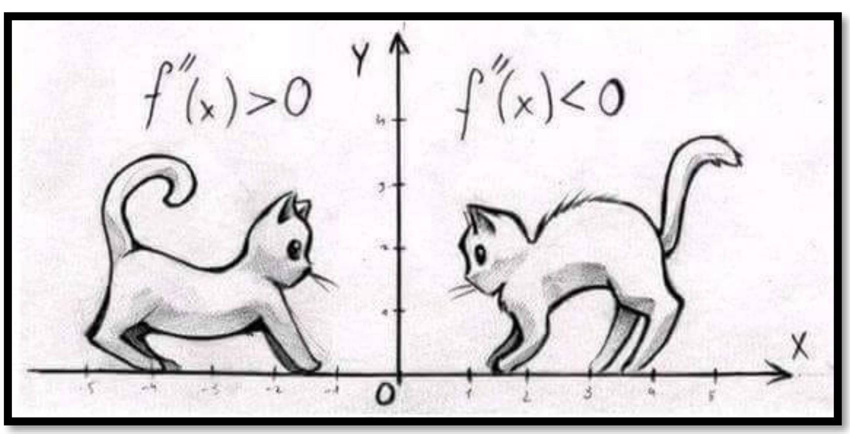



**Figura No. 25 Análisis de un mínimo relativo**

## Segunda Derivada

La segunda derivada se conoce en el trazo de Gráficas como Concavidad. La concavidad expresa geométricamente el comportamiento de abertura de una función en intervalo abierto I




**Fotografía No. 26 Descripción de concavidad en la vida real**

Existen 2 tipos de concavidad al igual que la pendiente, positiva y negativa

Concavidad Positiva

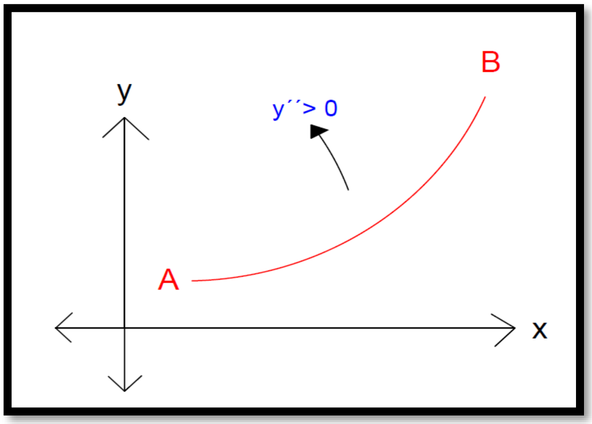



**Figura No. 27 Concavidad Positiva en Función Creciente**

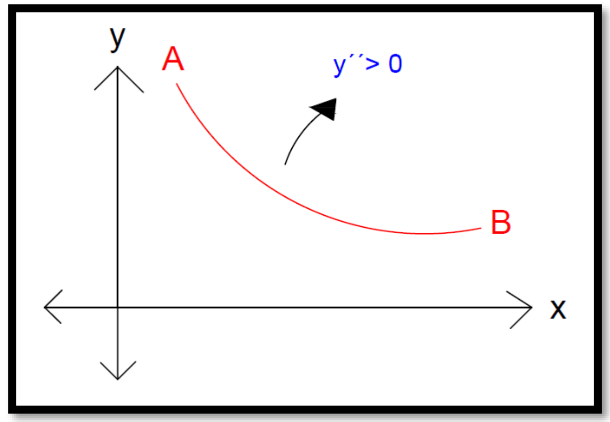



**Figura No. 28 Concavidad Positiva en Función Decreciente**

Concavidad Negativa

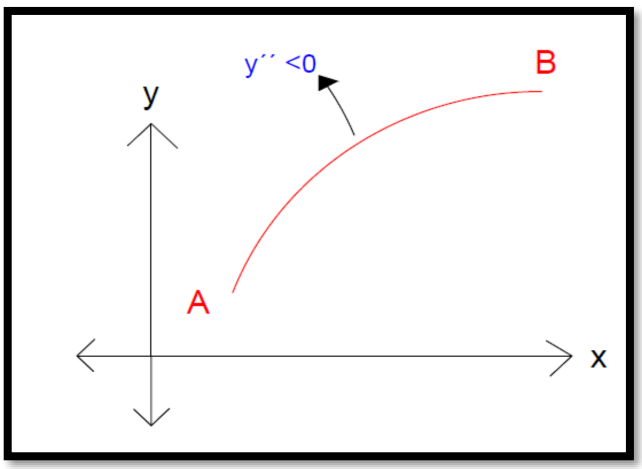



**Figura No. 29 Concavidad Negativa en Función Creciente**

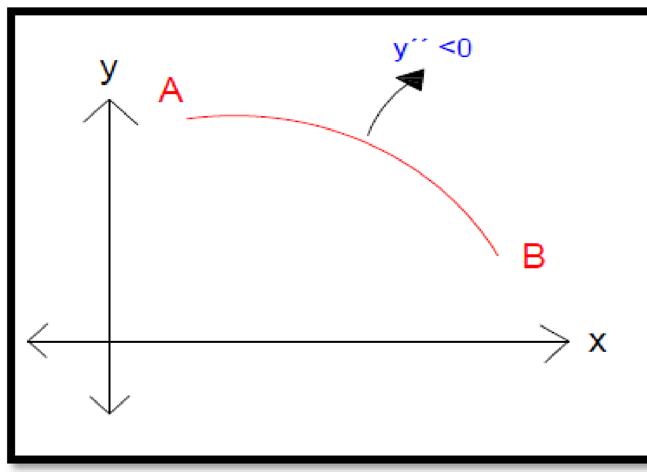



**Figura No. 30 Concavidad Negativa en Función Decreciente**

La segunda derivada $y'' = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ expresa la **Concavidad** de la función

En esta parte se debe analizar:

- Intervalos Positivos: Indican de donde a donde una función es cóncava positiva.
$$y'' > 0$$
- Intervalos Negativos: Indican de donde a donde una función es cóncava negativa.
$$y'' < 0$$
- Puntos de Inflexión: Indican en qué punto la función cambia de cóncava positiva a negativa o viceversa
$$y'' = 0$$

## Resumen De Los Para El Trazo De Curvas

**1.** Dominio

Ver los valores de x para que la función exista.

**2.** Intersección

2.1 El Intersecto en el eje " y " $\quad Cuando\ x = 0$

2.2 El Intersecto en el eje " x " $\quad Cuando\ y = 0$

**3.** Simetría

3.1 Si $f(-x) = f(x)$ $\quad Es\ una\ función\ Par$

3.2 Si $f(-x) = -f(x)$ $\quad Es\ una\ función\ Impar$

3.3 Si $f(x+p) = f(x)$ $\quad Es\ una\ función\ Periódica$

$p = periodo$

Este tipo de función es más trigonométrica

**4.** Asíntotas

4.1 Asíntotas Horizontales

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

Quiere decir que cuando x es un número muy grande la función tiende a ser L

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Quiere decir que cuando x es un número muy pequeño la función tiende a ser L

4.2 Asíntotas Verticales

Si en $x = a$ existe una asíntota se debe cumplir:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \qquad y \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Con la condición que: $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$

**5.** Intervalos Donde la Función es Creciente o Decreciente

Acá se analiza lo que vimos en la página 48

**6.** Valores Máximos y mínimos locales

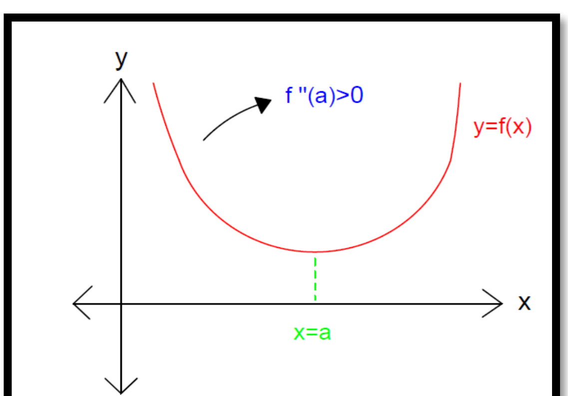
Existen dos maneras de analizarlos

6.1 Por primera derivada

Si en $x = a$ existe un valor máximo o mínimo se cumple: $y'(a) = 0$

6.2 Por Segunda Derivada

Si en $x = a$ existe un valor máximo o mínimo se cumple: $f''(a) \neq 0$



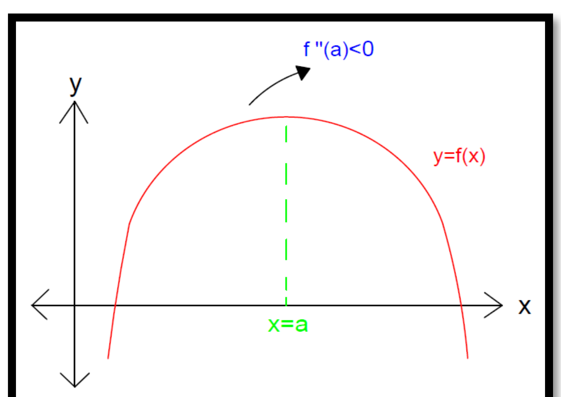



**Figura No. 31 Punto mínimo con concavidad    Figura No. 32 Punto máximo utilizando concavidad**

**7.** Concavidad

Acá se analiza lo que se vio en la página 50. Junto con puntos de inflexión

**8.** Trazar la grafica

Acá se resume todo lo visto en las páginas anteriores, uniendo punto con punto y colocando en coordenadas los análisis realizados en cada inciso

*Ejemplo*

*Analizar y dibujar la gráfica de* $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$

1. Dominio: $al\ ser\ una\ polinomial\ decimos\ que\ el\ dominio\ es$

$$(-\infty, \infty)$$

2. Intersección:

$cuando\ x = 0\quad y = 0$

$0 = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x = x(x^3 - 12x^2 + 48x - 64) = x(x-4)^3$

$x = 0\,;x = 4$

$$(0{,}0)\text{U}(4{,}0)$$

3. Simetría:

$f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$

$f(-x) = x^4 + 12x^3 + 48x^2 + 64x$

No es simétrica

4. Asíntotas:

Para ello se revisa el Dominio   Ninguna

5. Intervalos donde la función es creciente o Decreciente

$f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x \qquad función$

$f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 96x - 64 \qquad función\ pendiente$

$4x^3 - 36x^2 + 96x - 64 = 0$

$x = 1\,;x = 4\quad (puntos\ críticos)$

| Función | $(-\infty, 1)$ | $(1{,}4)$ | $(4, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 96x - 64$ | - | + | + |

Decreciente $(-\infty, 1)$; $\quad Creciente(1, \infty)$

6. Valores Máximos y mínimos:

$f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 96x - 64 = 0$

$x = 1\,;x = 4$

$cuando\ x \to 1^-\quad f'(x) < 0\quad y\ cuando\ x \to 1^+\quad f'(x) > 0\quad (Mínimo)$

$cuando\ x \to 4^-\quad f'(x) > 0\quad y\ cuando\ x \to 4^+\quad f'(x) > 0$ (Ninguno)

$$f(1) = -27$$

$$Mínimo\ Relativo\ en\quad (1, -27)$$

7. Concavidad:

$$f''(x) = 12x^2 - 72x + 96 \qquad función\ concavidad$$

$$f''(x) = 12x^2 - 72x + 96 = 0 \qquad x = 2\,;x = 4\ \ (Puntos\ de\ inflexión)$$

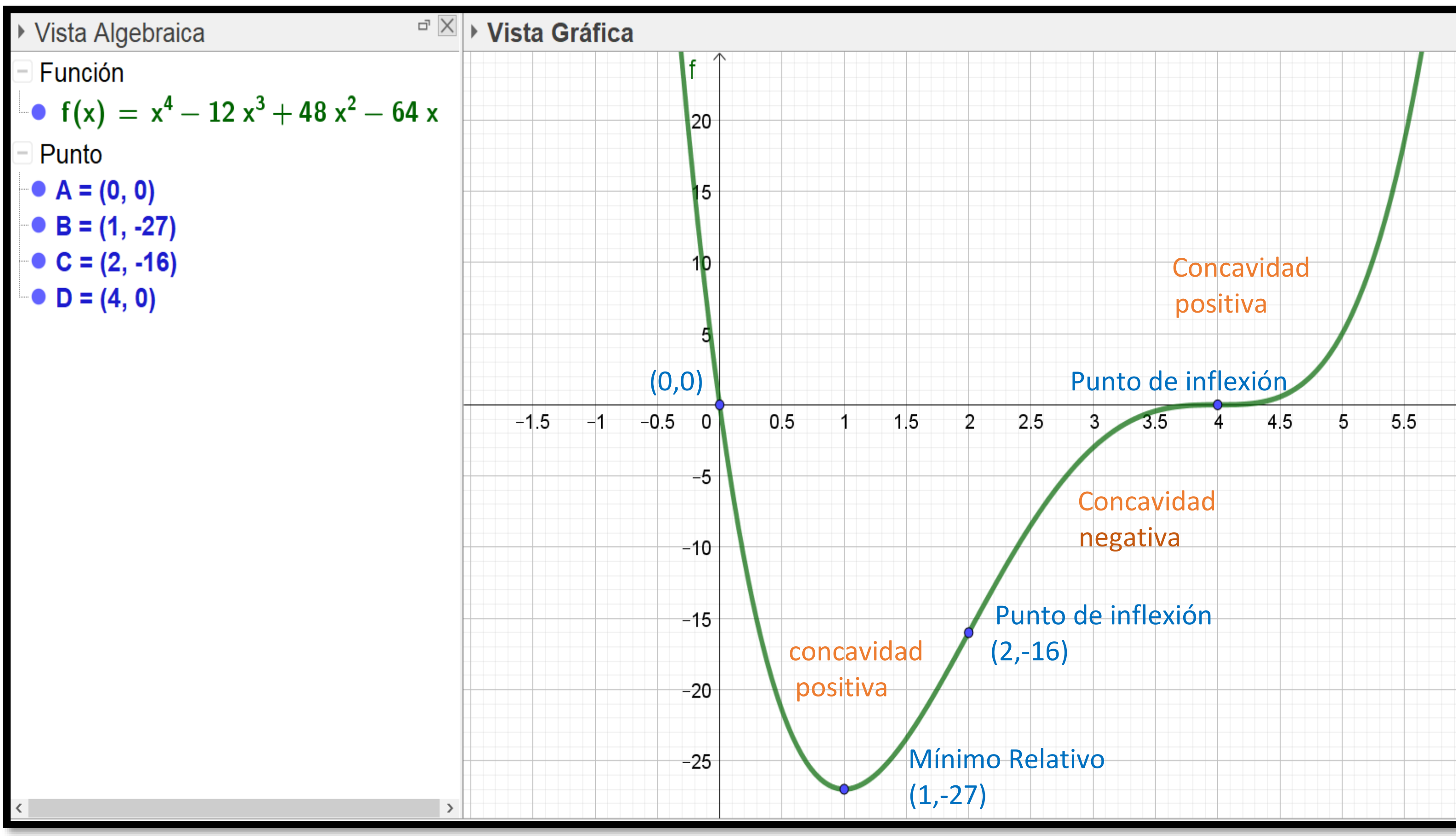
| Función | $(-\infty, 2)$ | $(2,4)$ | $(4, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x) = 12x^2 - 72x + 96$ | + | - | + |

(2,-16) U (4,0) Puntos de Inflexión

Concavidad Positiva $(-\infty, 2)U(4, \infty)$

Concavidad Negativa 2,4)

8. Trazo de gráfica:



## PASOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MODELADO

- Comprender el enunciado, eso implica poder imaginarlo. Si no lo entiende, vuélvalo a leer hasta que lo comprenda
- Dibuje si es posible un diagrama que exprese lo que sucede.
- Asigne variables
- Relacionar las variables
  Para ellos hay que conocer el modelado matemático
  - Por Distancias
  - Por Áreas
  - Por Volúmenes
  - Por Proporcionalidad (*Ejemplo: la variable "y" aumenta proporcionalmente a "x")*
  - Por el teorema de Pitágoras
  - Funciones Trigonométricas (Seno, coseno, tangente)
  - Ley De Senos
  - Ley De Cosenos
  - Funciones Polinomiales, Por funciones Exponenciales y Por Funciones Racionales.
    Acá se debe ver las funciones estándar y luego se busca las condiciones
    *Ejemplo: la función* $y = ax^2 + bx + c$ *Se tendría que buscar el valor de a, b y c*
  - Modelos ya establecidos (Ya están establecidas sus ecuaciones)
    * Interés Compuesto
    * Interés Capitalizado Continuamente
    * Ley De Enfriamiento De Newton
    * Drenado de tanques
    * Caída Libre
    * Crecimiento Poblacional

**Cuidado:** Vea detenidamente pues por esta parte pierde la mayoría de los estudiantes de la básica 2 por no poder relacionar variables

## Razones De Cambio o Razones Relacionadas

Una razón es una división y las relacionamos para ver que tanto cambia una variable respecto al cambio de otra. Por eso les llamamos razones relacionadas.

*Ejemplos de relaciones relacionadas*

$$\frac{dx}{dt}=\frac{Cambio\ De\ Distancia}{Respecto\ al\ tiempo}\ (velocidad) \qquad \frac{dw}{dt}=\frac{El\ Cambio\ de\ Energía}{Con\ respecto\ al\ tiempo}\ (Potencia)$$

$$\frac{dW}{dx}=\frac{El\ Cambio\ de\ Energía}{Respecto\ a\ la\ Distancia}\ (Fuerza)$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{El\ Cambio\ de\ angulo}{Respecto\ al\ tiempo}\ (velocidad\ angular)$$

Esos son algunos ejemplos de **cómo relacionamos cambios** en esta parte del cálculo

*Situaciones que veremos:*

- Si estamos inflando un globo de los utilizados en una fiesta, aumenta tanto su volumen como su radio y sus razones de incremento están relacionadas entre sí

$$V=\frac{4}{3}*\pi*r^3$$

*Derivamos implícitamente*

$$\frac{dV}{dt}=4*\pi*r^2*\frac{dr}{dt}$$

Vemos que el cambio del volumen depende del cambio del radio y del mismo radio en un instante t determinado

*Estrategias para la resolución de estos problemas*

1. Lea con cuidado el problema (Se recalca la parte de entendimiento del mismo)
2. Hacer un diagrama
3. Asignar variables
4. Vea que variables cambian y cuales se mantienen constantes $\left(\frac{dy}{dx}=0\right)$
5. Relacionar las variables
6. Utilice la regla de la cadena para derivar respecto a t (u otra variable) ambos miembros de la ecuación.
7. Sustituya La Información, dada al inicio en el enunciado, en la ecuación resultante y resuelva para la razón de cambio desconocida.

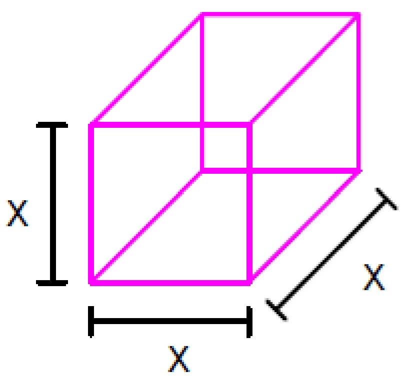
**CUIDADO:** No sustituya las variables al inicio, eso se hace hasta que ya haya encontrado una ecuación que describa su razón de cambio desconocida.
Sino al sustituir y cuando quiera derivar al ser constantes se le harán cero.

*Ejemplo*

Si V es el volumen de un cubo con arista x, y el cubo se expande a medida que transcurre el tiempo, exprese $dV/dt$ en términos de $dx/dt$.

*Paso No. 1*

Diagrama




*Paso No. 2*

Asignación de variables

En este caso Las aristas miden x

$$Volumen = V \qquad Tamaño\ lado = x$$

*Paso No. 3*

Relación de Variables

En este caso Volumen y Arista tamaño x

$$V = x * x * x \quad fórmula\ paralepipedo\ rectangular$$

$$V = x^3 \quad relacionadas\ las\ variables$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dx^3}{dt} = \frac{dx^3}{dx} * \frac{dx}{dt}$$ Derivación Implícita

$$\frac{dV}{dt} = 3x^2 * \frac{dx}{dt}$$

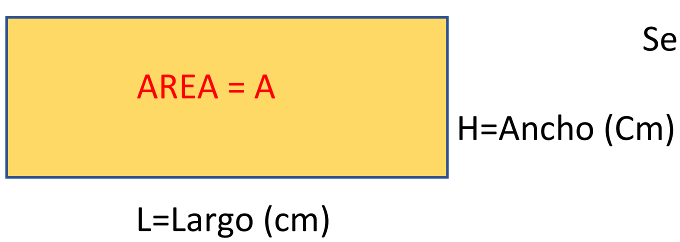
Vemos como $dV/dt$ está en términos de $dx/dt$. A esto le llamamos relaciones relacionadas.

*Ejemplo*

El largo de un rectángulo se incrementa a razón de 8 $cm/seg$ y el ancho a razón de $3cm/seg$. Cuando el largo es de 20 cm y el ancho es de 10 cm, ¿qué tan rápido se incrementa el área del rectángulo?

*Paso No. 1*

Diagrama




*Paso No. 2*

Asignación de variables

$$\frac{dL}{dt} = 8\frac{cm}{seg} \qquad \frac{dH}{dt} = 3\frac{cm}{seg}$$

Se quiere encontrar el cambio del área justo cuando:

$$L = 20\ cm \qquad H = 10\ cm$$

*Paso No. 3*

Relación De Variables

$$A = L * H$$

$$\frac{dA}{dt} = H\frac{dL}{dt} + L\frac{dH}{dt} \quad Regla\ del\ producto$$

$$\frac{dA}{dt} = 10 * 8 + 20 * 3 \quad Se\ sustituyen\ valores$$

$$\frac{dA}{dt} = 140\ {cm^2}/{seg}$$

**NOTA:** Para las dimensionales de la razón solamente se debe ver el numerador, en este caso el Área y el área la estamos midiendo en $cm^2$. Lo mismo para el denominador que en este caso es tiempo y se está midiendo en segundos. Mucho Ojo con esto ya que pueden variar.

## Optimización

Es la acción de buscar la mejor forma de hacer algo, esto quiere decir que es buscar mejores resultados, mayor eficiencia o mejor eficacia en el desempeño de algún trabajo u objetivo a lograr, en este caso del recurso de una empresa, llamándose optimización de recursos.

En el campo laboral se contrata al Ingeniero por sus habilidades manejando recursos, optimizando, un tema muy importante ya que siempre se le pedirá encontrar algunos datos mínimos o inversamente máximos.

- Un ingeniero Civil debe **minimizar** costos (Dinero) en una obra.
- Un ingeniero mecánico debe **maximizar** el material metálico.
- Un ingeniero Industrial debe **minimizar** Sueldos sin abusar de las leyes.
- Un ingeniero Eléctrico debe **maximizar** el Voltaje en base a las Resistencias.

Pero si no ha logrado comprender como lo hacemos en esta parte le dejo **el siguiente análisis.**

*Suponga que usted vende Lápices y quiere encontrar la mejor oferta a vender, para "GANAR MÁS DINERO". Entonces modela la siguiente tabla.*

| En La Compra De Número De Lápices | Se le vende por el Precio por Unidad | Cobro |
|---|---|---|
| 1 Lápiz | Q 10 | Q 10 |
| 2 Lápiz | Q 9 | Q 18 |
| 3 Lápiz | Q 8 | Q 24 |
| 4 Lápiz | Q 7 | Q 28 |
| 5 Lápiz | Q 6 | Q 30 |
| 6 Lápiz | Q 5 | Q 30 |
| 7 Lápiz | Q 4 | Q 28 |
| 8 Lápiz | Q 3 | Q 24 |
| 9 Lápiz | Q 2 | Q 18 |
| 10 Lápiz | Q 1 | Q 10 |

*¿Cuál es la mejor Oferta?*

Definitivamente La oferta que me deje más dinero y en este caso es la de:

$$5\ Lapices\ por\ {}^{Q6.00}\!/_{Cada\ Uno}$$

$$6\ lapices\ por\ {}^{Q5.00}\!/_{Cada\ Uno}$$

Ese análisis lo podemos ver gráficamente en la siguiente Hoja.

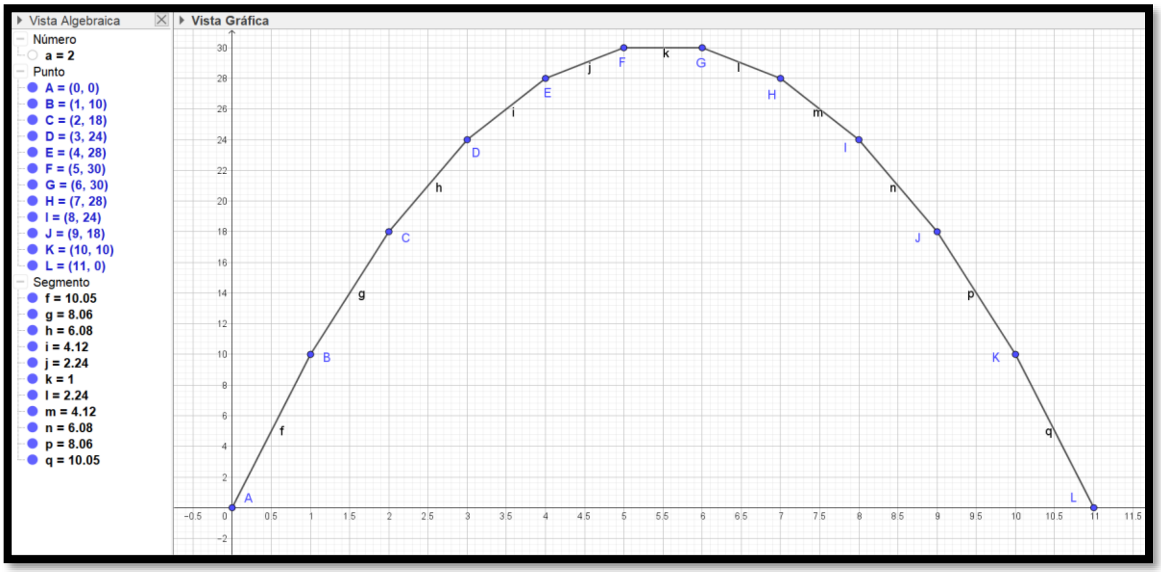



**Figura No. 33 Unión de puntos por segmentos (f, g, h…) se nota Gráficamente que el cobro máximo es el segmento k en los puntos F y G. Por tanto, es el que más beneficia**

$$\left[\boldsymbol{Eje\ x = Cantidad\ De\ lapices} \qquad \boldsymbol{Eje\ y = Cobro\ por\ la\ cantidad\ de\ lapices}\right]$$

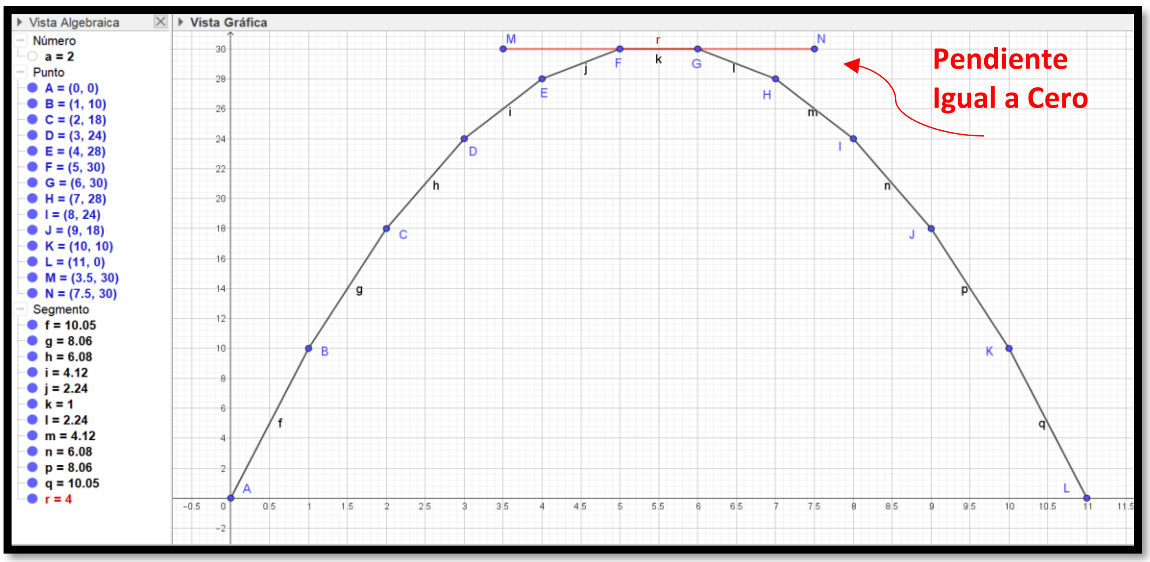



**Figura No. 34 Se puede Notar que la pendiente (Segmento MN) Es 0 entre los puntos Más altos. Esto es la Optimización, es encontrar una variable en términos de otra Para luego derivarla he igualarla a 0 (la pendiente igual a cero)**

Debe recordarse para la resolución de problemas de optimización los pasos para modelar una variable en términos de otra variable.

## Método de Newton

Existen muchos métodos para encontrar raíces, estos mismos métodos usted los podrá ver a profundidad en la matemática aplicada 3 (Mate 7)

Algunos de estos métodos numéricos son:

- Bisección
- Separación De raíces
- Iteración del punto Fijo
- Método de la Secante

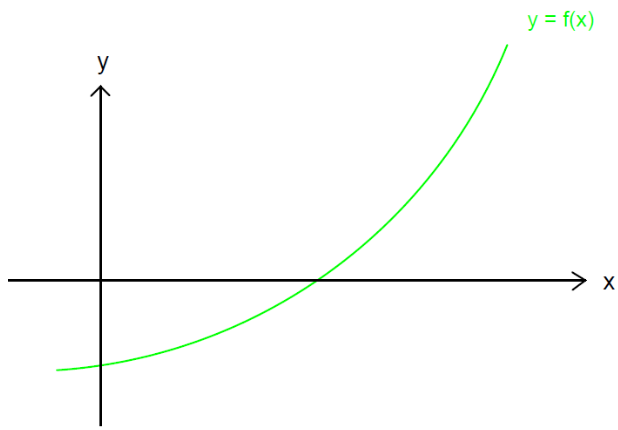
- Convergencia Acelerada
- Método de Horner (Muy Utilizado en Matemática Básica 1)

El método de Newton-Raphson lo que hace es encontrar Raíces (f(x)=0) de una función dada. Si se le da una ecuación se debe transformar esta ecuación a una función para seguir la fórmula.

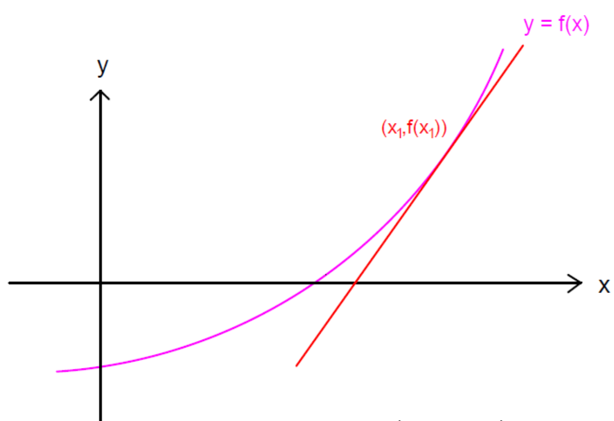
$$g(x) = h(x) \quad se\ debe\ pasar\ a \quad f(x) = g(x) - h(x) = 0$$

*¿De dónde sale el método?*

a) Suponga que tenemos la siguiente función y = f(x) y queremos encontrar su raíz (Intersección en el eje x)

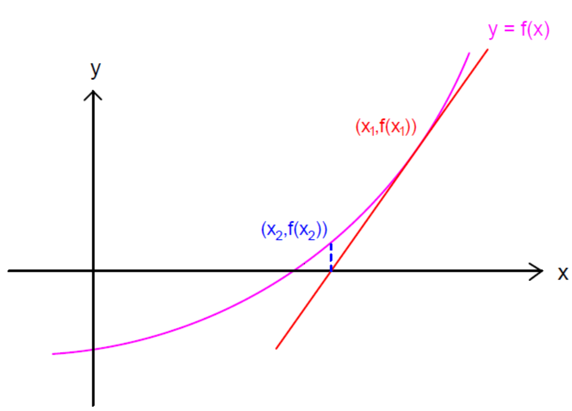



b) Lo que se hace entonces es introducir un punto cercano a la raíz con coordenadas $(x1, f(x1))$ que sea parte de la función y luego se introduce **Una recta tangente en el punto $(x1, f(x1))$.** Se busca la misma ecuación de la recta tangente




$$y - yo = m(x - xo)$$
$$y - f(x1) = f'(x1)(x - x1)$$

c) Luego se busca la Intersección de esa recta que tendrá coordenadas $(x2, f(x2))$



$$Viendo\ la\ gráfica\ de\ arriba\ la\ recta\ tangente\ (La\ roja)\ cuando:$$

$$x = x2 \quad y = 0 \quad entonces\ la\ sustituimos\ en\ la\ ecuación\ que\ ya\ teniamos$$

$$0 - f(x1) = f'(x1)(x2 - x1)$$

$$x2 = x1 - \frac{f(x1)}{f'(x1)}$$

Si se sigue haciendo ese análisis con $x1 = n \;\; y\, x2 = n + 1$ números se cumple la fórmula de Newton Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad Fórmula\ de\ Newton\ para\ ecuaciones$$

## EJERCICIOS RESUELTOS

**1.** Encuentre la derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función $sen(x + y) + x^2 - y^3 = xy - x^y$

$$\frac{d}{dx}[sen(x + y) + x^2 - y^3] = \frac{d}{dx}[xy - x^y]$$

$$\frac{d\ sen(x + y)}{dx} + \frac{d\ x^2}{dx} - \frac{d\ y^3}{dx} = \frac{d\ (xy)}{dx} - \frac{d\ x^y}{dx}$$

Por aparte

- $u = x + y \qquad \frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$

$$\frac{d\ sen(x + y)}{dx} = \frac{d\ sen(u)}{du} * \frac{du}{dx} = \cos(u)\,[1 + y'] = \cos(x + y)[1 + y']$$

- $x^y$

$$m = x^y$$
$$\ln(m) = y * \ln(x)$$
$$\frac{1}{m} * \frac{dm}{dx} = \frac{y}{x} + \ln(x) * \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dm}{dx} = x^y\left[\frac{y}{x} + \ln(x) * \frac{dy}{dx}\right]$$

Sustituyendo

$$\cos(x + y)\,[1 + y'] + 2x - \frac{d\ y^3}{dy} * \frac{dy}{dx} = y + x\frac{dy}{dx} - x^y\left[\frac{y}{x} + \ln(x) * \frac{dy}{dx}\right]$$

$$\cos(x + y) + y'\cos(x + y) + 2x - 3y^2y' = y + xy' - \frac{x^y * y}{x} + \ln(x) * x^y * y'$$

Ahora despejamos para $y' = \frac{dy}{dx}$

$$y'\cos(x + y) - 3y^2y' - Ln(x) * x^y * y' - xy' = y - \frac{x^y * y}{x} - 2x - \cos(x + y)$$

$$y' = \frac{y - \frac{x^y * y}{x} - 2x - \cos(x + y)}{\cos(x + y) - 3y^2 - Ln(x) * x^y - x}$$

**2.** Trace la Gráfica Real De la función $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

1. Dominio

$\sqrt{x^2 - 1} = 0 \quad entonces\ x \neq \pm 1$

$x^2 - 1 > 0 \qquad x^2 > 1 \qquad x > 1 \qquad x < -1$

$$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

2. Intersección

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad cuando\ x = 0 \quad y = \nexists$

$0 = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad Cuando\ x = 0 \quad pero\ eso\ no\ existe$

$Concluimos\ que\ f(x)\ no\ tiene\ puntos\ de\ intersección$

3. Simetría

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad entonces \quad f(-x) = -f(x) \quad función\ Impar$

4. Asíntotas

4.1 Verticales

$$En\ x = 1\ y\ x = -1$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \nexists$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \nexists \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \infty$$

4.2 Horizontales

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -1 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 1$$

5. Intervalos donde la función Es Creciente o Decreciente

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = x * (x^2 - 1)^{-1/2}$

$y' = (x^2 - 1)^{-1/2} - \frac{1}{2} x (x^2 - 1)^{-3/2} * 2x$

$y' = (x^2 - 1)^{-1/2} - x^2 (x^2 - 1)^{-3/2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$

$y' = \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} = -(x^2 - 1)^{-3/2}$

$y'' = \frac{3}{2}(x^2 - 1)^{-5/2} * 2x = \frac{3x}{\sqrt{(x^2 - 1)^5}}$

Entonces

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} > 0 \ \ (Creciente) \qquad\qquad -\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} < 0 \ \ (Decreciente)$$

$Puntos\ criticos$

$$\sqrt{(x^2-1)^3} = 0 \qquad\qquad x = -1 \quad x = 1$$

| | $(-\infty,-1)$ | $(-1,1)$ | $(1,\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $-\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$ | $-$ | $\nexists$ | $-$ |

$Decreciente\ en$: $(-\infty,-1)U(1,\infty)$

6. Valores Máximos Y Mínimos

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} = 0 \qquad\qquad no\ hay\ mínimos\ ní\ máximos$$

7. Concavidad

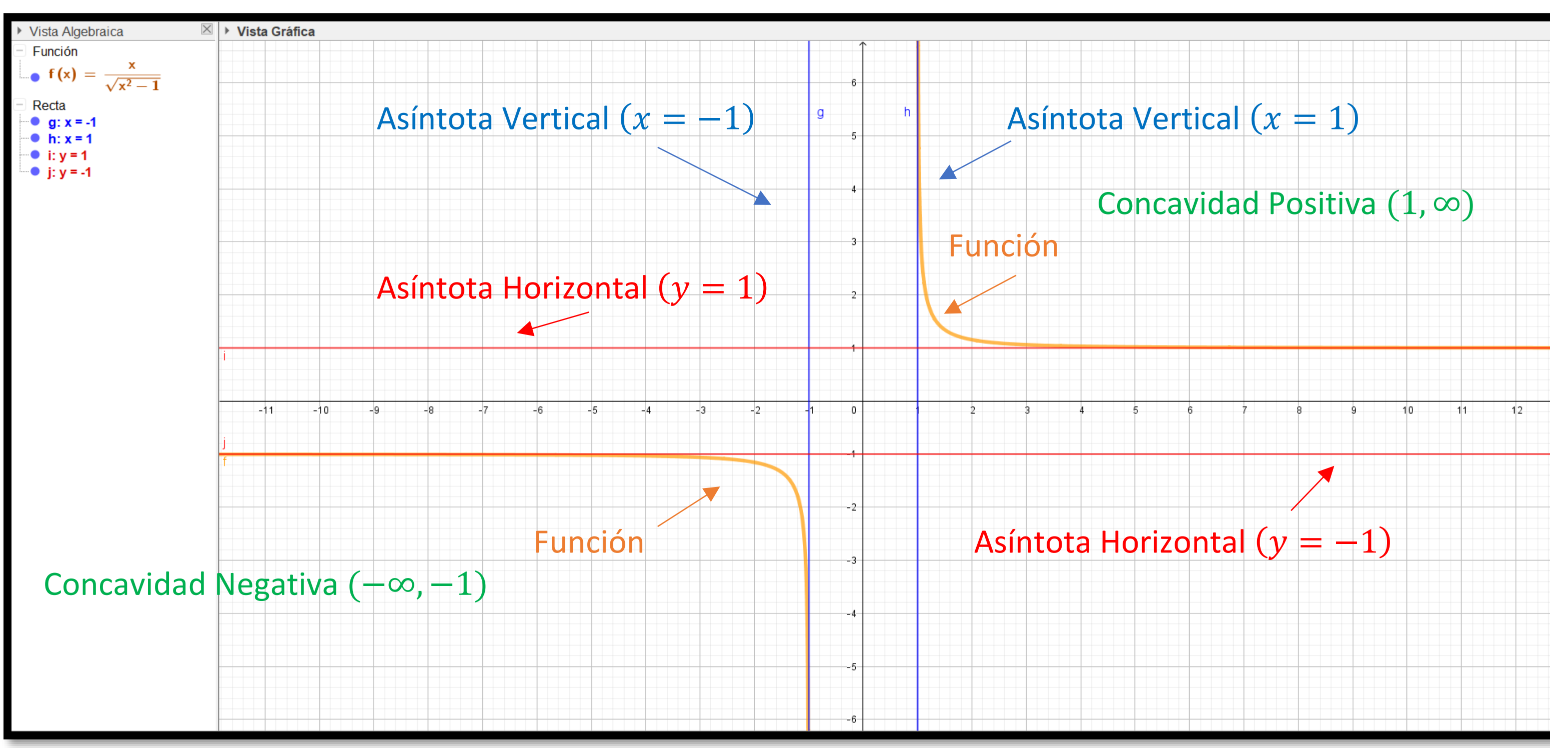
$$y'' = \frac{3x}{\sqrt{(x^2-1)^5}}$$

$$\frac{3x}{\sqrt{(x^2-1)^5}} > 0 \qquad Puntos\ críticos\ \ x = -1; \quad x = 0; \quad x = 1$$

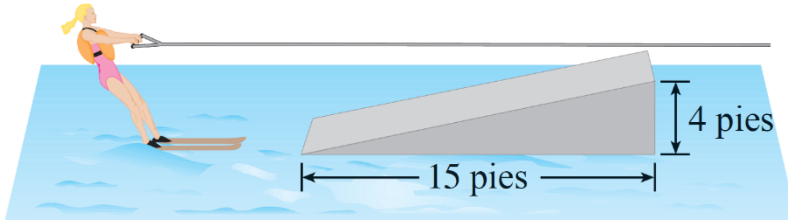
| | $(-\infty,-1)$ | $(-1,0)$ | $(0,1)$ | $(1,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{3x}{\sqrt{(x^2-1)^5}}$ | $-$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $+$ |

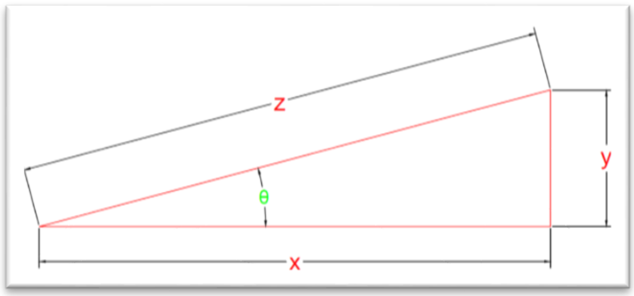
$De\ (-\infty,-1)\ concava\ negativa \qquad De\ (1,\infty) concava\ positiva$

8. Trazo de grafica



**3.** Una esquiadora pasa por la rampa, como la que se ilustra en la figura, con una rapidez de $30\ pies/s$ . ¿Qué tan rápido se eleva cuando abandona la rampa?




Siempre iniciamos con el análisis de que variables cambian y cuáles no.

$$\frac{dx}{dt} = ?? \qquad \frac{dy}{dt} = ?? \qquad \frac{dz}{dt} = 30\, {}^{ft}/_{s} \qquad \frac{d\theta}{dt} = 0\ (constante)$$

Por Pitágoras relacionamos $x, y$ y $z$

$$z^2 = x^2 + y^2 \qquad\qquad z = \sqrt{15^2 + 4^2} = \sqrt{241}$$

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \quad = \quad z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

Vea que acá se presenta un pequeño problema, tenemos una ecuación con 2 Incógnitas

$$\tan(\theta) = \frac{Cat.Opuesto}{Cat.Adyacente} = \frac{y}{x}$$

$$x * \tan(\theta) = y$$

$$\tan(\theta)\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\tan(\theta)} \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

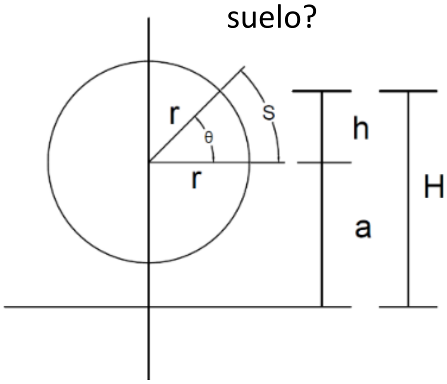
$$z\frac{dz}{dt} = x\frac{\frac{dy}{dt}}{\tan(\theta)} + y\frac{dy}{dt}$$

$$z\frac{dz}{dt} = x * \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{y}{x}} + y\frac{dy}{dt} = \frac{x^2}{y}\frac{dy}{dt} + y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{z * \frac{dz}{dt}}{\frac{x^2}{y} + y} = \frac{\sqrt{241} * 30}{\frac{15^2}{4} + 4}$$

$$\frac{dy}{dt} = 7.73 \ {}^{ft}/_{s}$$

**4.** Una rueda de la fortuna de 10 m de radio está girando a razón de una revolución cada 2 min. ¿Qué tan rápido se está elevando un pasajero cuando su silla está a 16 m del nivel del suelo?




$$\frac{da}{dt} = 0 \qquad \frac{dr}{dt} = 0; \qquad \frac{ds}{dt} = Variable; \qquad \frac{d\theta}{dt} = Variable \qquad \boldsymbol{\frac{dH}{dt} = Lo\ que\ me\ piden}$$

$$H = h + a \qquad\qquad r = 10\ m; \ \ h = 6\ m\ (16 - r)$$

$$\boldsymbol{\frac{dH}{dt} = \frac{dh}{dt}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1\ vuelta}{2\ min} = \frac{2\pi\ rad}{2\ min} = \pi\ {}^{rad}/_{min}$$

$$sen(\theta) = \frac{h}{r} \qquad\qquad Encontrando\ \theta$$

$$rsen(\theta) = h \qquad\qquad sen(\theta) = \frac{6\ m}{10\ m} = \frac{3}{5}$$

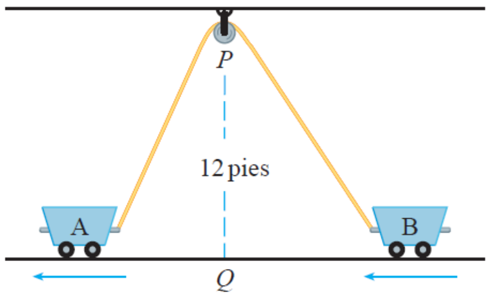
$$\frac{dh}{d\theta} = r\cos(\theta) \qquad\qquad y\ se\ sabe\ que: \ \ sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$$

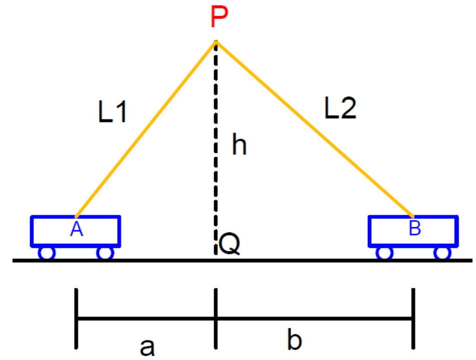
$$\frac{dh}{dt} = r\cos(\theta)\frac{d\theta}{dt} \qquad\qquad \frac{9}{25} + cos^2(\theta) = 1$$

$$\frac{dh}{dt} = 10 \times \frac{4}{5} \times \pi \qquad\qquad \cos(\theta) = \frac{4}{5}$$

$$\frac{dh}{dt} = 8\pi$$

**5.** Dos carros A y B están conectados por medio de una soga de 39 pies de Longitud que pasa por una polea P (véase la figura). El punto Q está en el suelo a 12 pies directamente debajo de P y entre los carros. El carro A es jalado a partir de Q a una rapidez de 2 ft/seg. ¿Qué tan rápido se mueve el carro B hacia Q en el instante en que el carro A está a 5 pies de Q?




1. Debemos asignar Variables.
2. Debemos ver que variables son cambiantes y cuáles no.

$$\frac{dL1}{dt} = variable\ ; \frac{dL2}{dt} = variable; \frac{db}{dt} = variable; \frac{da}{dt} = 2\ {}^{ft}/_{seg}\ ; \frac{dh}{dt} = 0$$

3. Relacionamos Variables.

$L1 + L2 = 39 \quad y\ si\ derivamos\ implicitamente\ \ tendremos:$

$$\frac{d}{dt}[L1 + L2] = \frac{d}{dt}[39] \quad quedando: \frac{dL1}{dt} + \frac{dL2}{dt} = 0 \quad entonces\ \frac{dL1}{dt} = -\frac{dL2}{dt}$$

Analizamos ambos triángulos, el de la izquierda y el de la derecha

**Triangulo de la Izquierda**

$$L1^2 = a^2 + h^2$$

$$\frac{d}{dt}[L1^2] = \frac{d}{dt}[a^2 + h^2]$$

$$2L1\frac{dL1}{dt} = 2a * \frac{da}{dt} + 2h\frac{dh}{dt}$$

$$L1\frac{dL1}{dt} = a * \frac{da}{dt}$$

$$\frac{dL1}{dt} = \frac{a * \frac{da}{dt}}{L1} \quad (1)$$

**Triangulo de la Derecha**

$$L2^2 = h^2 + b^2$$

$$\frac{d}{dt}[L2^2] = \frac{d}{dt}[h^2 + b^2]$$

$$2L2 * \frac{dL2}{dt} = 2h\frac{dh}{dt} + 2b * \frac{db}{dt}$$

$$L2 * \frac{dL2}{dt} = b * \frac{db}{dt}$$

$$\frac{dL2}{dt} = \frac{b * \frac{db}{dt}}{L2} \quad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) sabiendo que: $-\frac{dL1}{dt} = \frac{dL2}{dt}$

$$-\frac{a * \frac{da}{dt}}{L1} = \frac{b * \frac{db}{dt}}{L2} \quad despejando\ para\ \frac{db}{dt}\ ; \qquad \frac{db}{dt} = \frac{-L2 * a * \frac{da}{dt}}{L1 * b}$$

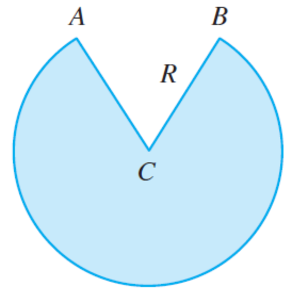
¿De dónde sacamos los valores?

Se obtienen de haciendo las relaciones correspondientes por Pitágoras en cada triangulo

$$L1 = 13\ ; \qquad L2 = 39 - 13 = 26\ ; \qquad a = 5\ ; \qquad b = 2\sqrt{133}; \qquad \frac{da}{dt} = 2$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{-26 * 5 * 2}{13 * 2\sqrt{133}} = -0.86711 \qquad entonces: \frac{db}{dt} = -0.86711\ {}^{ft}/_{seg}$$

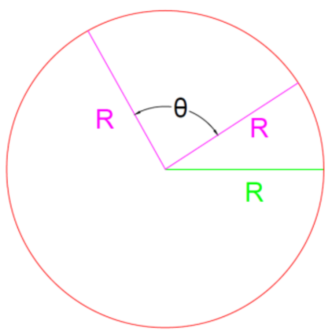
**6.** Un recipiente cónico para beber se hace de una pieza circular de papel de radio R, recortando un sector y uniendo los bordes *CA* y *CB*. Encuentre la capacidad máxima de dicho recipiente.

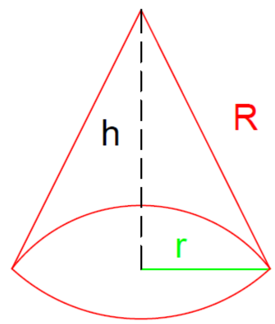



Primeramente, debemos identificar constantes y variables

$$r = variable \quad h = variable \quad \theta = ángulo\ de\ corte \quad R = constante$$

Estos mismos datos los podemos analizar viendo las figuras siguientes




$$V = \frac{1}{3} * \pi * r^2 * h \quad Debemos\ dejar\ el\ volumen\ en\ terminos\ de\ t\ o\ h\ para\ poder\ derivar$$

$Entonces\ hacemos\ el\ analisis\ de\ la\ fugura\ en\ 3\ dimensiones, pues\ analizamos\ con\ pitagoras\ como\ dejar\ r(h) = f(h)\ o\ h(r) = f(r)$

$$r^2 + h^2 = R^2 \qquad h = \sqrt{R^2 - r^2}$$

$Al\ sustituirlo\ nos\ queda:$

$$V = \frac{1}{3}\pi * r^2 * \sqrt{R^2 - r^2} \quad Teniendo\ esto\ Ya\ podemos\ derivar\ ya\ que\ lo\ que\ buscamos\ es\ \frac{dV}{dr} = 0$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{1}{3}\pi\left[2r\sqrt{R^2 - r^2} + \frac{r^2}{2\sqrt{R^2 - r^2}} * -2r\right]$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{1}{3}\pi\left[2r\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}}\right]$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{1}{3}\pi\left[\frac{2r(R^2 - r^2) - r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}}\right] = \frac{1}{3}\pi\left[\frac{2rR^2 - 2r^3 - r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}}\right] \quad y\ como\ se\ sabe\ que\ \frac{dV}{dr} = 0$$

$$0 * 3 * \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{\pi} = 2rR^2 - 3r^3$$

$$0 = 2rR^2 - 3r^3$$

$$2rR^2 = 3r^3$$

$2R^2 = 3r^2$ $\quad\quad$ *Entonces* $\boldsymbol{r = \sqrt{\frac{2}{3}}R}$

Como ya tenemos r ahora la sustituimos en $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{2}{3}R^2}$ $\quad$ $\boldsymbol{h = \sqrt{\frac{1}{3}}R}$

*Como ya encontramos r y h en terminos de R que es constante entonces decimos*

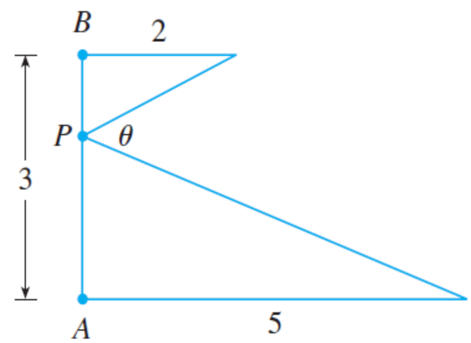
$$V = \frac{1}{3}\pi * r^2 * h = \frac{1}{3} * \pi * \frac{2}{3}R^2 * \sqrt{\frac{1}{3}}R$$

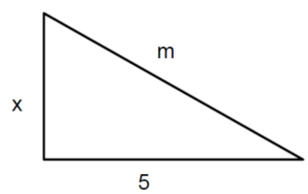
$$V = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}R$$

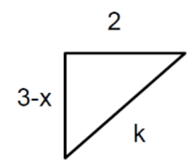
**7.** ¿Dónde debe elegirse el punto P sobre el segmento de recta AB a fin de maximizar el ángulo $\theta$?

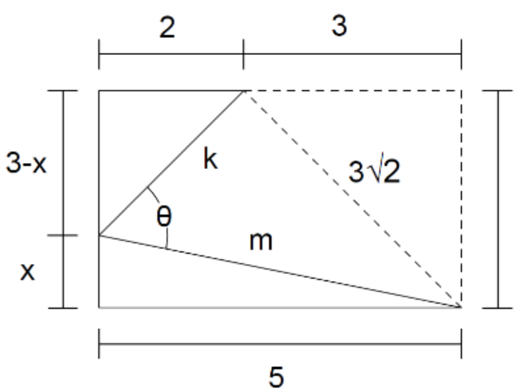
Resolviendo: Lo que busco es una función $\theta(x) = f(x)$ para utilizar Optimización

Resolviendo los triángulos presentes en la figura




$x^2 + 25 = m^2$

$m = \sqrt{x^2 + 25}$

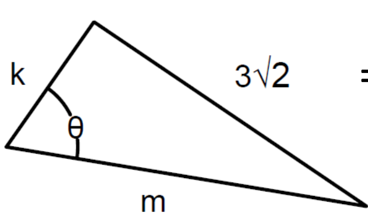
$(3 - x)^2 + 4 = k^2$

$9 - 6x + x^2 + 4 = k^2$

$x^2 - 6x + 13 = k^2$

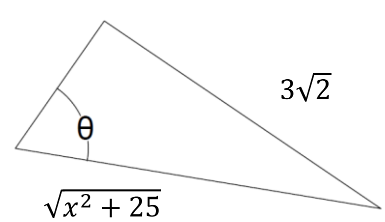
$k = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$

Los triángulos anteriores me sirvieron para RELACIONAR “K” y “m” con x, quedándome el siguiente triángulo.




=

$\sqrt{x^2 - 6x + 13}$




$3\sqrt{2}$

$\sqrt{x^2 + 25}$

En base al último triangulo relacionamos $\theta$ con $x$. Esto a través de ley de cosenos

$$\left(3\sqrt{2}\right)^2 = k^2 + m^2 - 2km * cos\theta$$

$$18 = x^2 - 6x + 13 + x^2 + 25 - 2\sqrt{x^2 - 6x + 13} * \sqrt{x^2 + 25} * cos\theta$$

$$-20 = 2x^2 - 6x - 2\sqrt{(x^2 - 6x + 13)(x^2 + 25)}\, cos\theta$$

$$\sqrt{(x^2 - 6x + 13)(x^2 + 25)} * cos\theta = x^2 - 3x + 10$$

$$cos\theta = \frac{x^2 - 3x + 10}{\sqrt{(x^2 - 6x + 13)(x^2 + 25)}}$$

Elevar ambos lados al cuadrado para simplificar.

$$cos^2(\theta) = \frac{(x^2 - 3x + 10)^2}{(x^2 - 6x + 13)(x^2 + 25)}$$

$$\frac{d}{dx}[cos^2(\theta)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{(x^2 - 3x + 10)^2}{(x^2 - 6x + 13)(x^2 + 25)}\right]$$

$$-2\cos(\theta) * sen(\theta) * \frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{(x^2 - 3x + 10)^2}{(x^2 - 6x + 13)(x^2 + 25)}\right] \qquad y\ se\ sabe\ que:\ \frac{d\theta}{dx} = 0$$

$$0 = \frac{d}{dx}\left[\frac{(x^2 - 3x + 10)^2}{(x^2 - 6x + 13)(x^2 + 25)}\right] \qquad Para\ derivar\ esta\ parte\ se\ utiliza\ regla\ del\ producto$$

$$0 = \frac{d}{dx}\{(x^2 - 3x + 10)^2 * [(x^2 - 6x + 13)(x^2 + 25)]^{-1}\}$$

$$0 = \frac{2(x^2 - 3x + 10)(2x - 3)}{(x^2 - 6x + 13)(x^2 + 25)} - \frac{(x^2 - 3x + 10)^2}{[(x^2 - 6x + 13)(x^2 + 25)]^2}[(2x - 6)(x^2 + 25) + 2x(x^2 - 6x + 13)]$$

$$0 = 2\cancel{(x^2 - 3x + 10)}(2x - 3)(x^2 - 6x + 13)\,(x^2 + 25) - \cancel{(x^2 - 3x + 10)}^2[(2x - 6)(x^2 + 25) + 2x(x^2 - 6x + 13)]$$

$$0 = 2(2x - 3)(x^2 - 6x + 13)\,(x^2 + 25) - (x^2 - 3x + 10)[(2x - 6)(x^2 + 25) + 2x(x^2 - 6x + 13)]$$

$$0 = 2(2x - 3)(x^2 - 6x + 13)\,(x^2 + 25) - (2x - 6)(x^2 - 3x + 10)(x^2 + 25) - 2x(x^2 - 3x + 10)(x^2 - 6x + 13)$$

$$0 = (x^2 - 6x + 13)[(2x - 3)(x^2 + 25) - x(x^2 - 3x + 10)] - (x - 3)(x^2 - 3x + 10)(x^2 + 25)$$

$$0 = (x^2 - 6x + 13)[2x^3 + 50x - \cancel{3x^2} - 75 - x^3 + \cancel{3x^2} - 10x] - (x - 3)(x^2 - 3x + 10)(x^2 + 25)$$

$$0 = (x^2 - 6x + 13)[x^3 + 40x - 75] - (x - 3)(x^2 - 3x + 10)(x^2 + 25)$$

Operando los productos Notables

$$0 = x^5 + 40x^3 - 75x^2 - 6x^4 - 240x^2 + 450x + 13x^3 + 520x - 975 - (x^3 - 3x^2 + 10x - 3x^2 + 9x - 30)\,(x^2 + 25)$$

$$0 = x^5 + 40x^3 - 75x^2 - 6x^4 - 240x^2 + 450x + 13x^3 + 520x - 975 - (x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 3x^4 + 9x^3 - 30x^2 + 25x^3 - 75x^2 + 250x - 75x^2 + 225x - 750)$$

$$0 = x^5 + 53x^3 - 6x^4 - 315x^2 + 970x - 975 - (x^5 - 6x^4 + 44x^3 - 180x^2 + 475x - 750)$$

$$0 = \cancel{x^5} + 53x^3 - \cancel{6x^4} - 315x^2 + 970x - 975 - \cancel{x^5} + \cancel{6x^4} - 44x^3 + 180x^2 - 475x + 750)$$

$$0 = 9x^3 - 135x^2 + 495x - 225 = 0$$

Existen Calculadoras que tienen predeterminada la fórmula para encontrar raíces de 3er Grado.

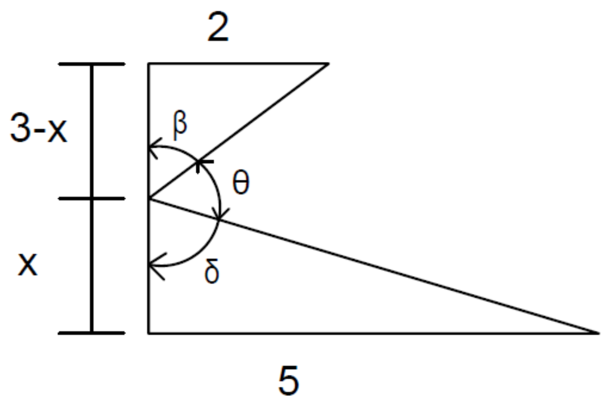
$x1 = 5 + 2\sqrt{5}$ (9.4721) ✗ Respuesta fuera del rango

$x2 = 5$ Respuesta fuera del rango

$x3 = 5 - 2\sqrt{5}$ (0.52786) ✓ Respuesta Creíble

$x = 5 - 2\sqrt{5}\ (0.52786) \qquad \theta = 57.05310°\ (\acute{A}ngulo\ m\acute{a}ximo)$

## Otra forma de resolver el problema




Por ángulos diríamos:

$$\beta + \delta + \theta = 180°$$

$$tan(\beta) = \frac{2}{3-x} \quad entonces\ \beta = tan^{-1}\left(\frac{2}{3-x}\right)$$

$$tan(\delta) = \frac{5}{x} \quad entonces\ \delta = tan^{-1}\left(\frac{5}{x}\right)$$

Sustituyendo:

$$tan^{-1}\left(\frac{2}{3-x}\right) + tan^{-1}\left(\frac{5}{x}\right) + \theta = 180°$$

$$\frac{d}{dx}\left[tan^{-1}\left(\frac{2}{3-x}\right) + tan^{-1}\left(\frac{5}{x}\right) + \theta = 180°\right] = \frac{d}{dx}tan^{-1}\left(\frac{2}{3-x}\right) + \frac{d}{dx}tan^{-1}\left(\frac{5}{x}\right) + \frac{d\theta}{dx} = \frac{d180°}{dx}$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{2}{3-x}\right)^2} * \frac{2}{(3-x)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{5}{x}\right)^2} * \frac{-5}{x^2} + \frac{d\theta}{dx} = 0 \quad sabiendo\ que: \frac{d\theta}{dx} = 0 \quad nos\ queda:$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{2}{3-x}\right)^2} * \frac{2}{(3-x)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{5}{x}\right)^2} * \frac{-5}{x^2} = 0$$

$$\frac{5}{x^2} * \frac{1}{1+\left(\frac{5}{x}\right)^2} = \frac{2}{(3-x)^2} * \frac{1}{1+\left(\frac{2}{3-x}\right)^2}$$

$$5 * (3-x)^2 * \left[1 + \left(\frac{2}{3-x}\right)^2\right] = 2x^2\left[1 + \left(\frac{5}{x}\right)^2\right] \quad ac\acute{a}\ se\ resuelven\ los\ productos\ notables$$

$$5(3-x)^2 + 20 = 2x^2 + 50$$

$$45 - 30x + 5x^2 = 2x^2 + 30$$

$$3x^2 - 30x + 15 = 0$$

$x1 = 5 + 2\sqrt{5}$ (9.4721)

$x2 = 5 - 2\sqrt{5}$ (0.52786)

Entonces la respuesta sería:

$x = 5 - 2\sqrt{5}$ (0.52786)

**8.** Solucione la siguiente ecuación $\frac{x}{x^2+1} = \sqrt{1-x}$

- Primeramente, llevamos todo a 0

$$\frac{x}{x^2+1} - \sqrt{1-x} = 0$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} - \sqrt{1-x} = x(x^2+1)^{-1} - (1-x)^{1/2} = 0$$

- Luego Obtenemos la derivada

$$f'(x) = (x^2+1)^{-1} - x(x^2+1)^{-1} - x(x^2+1)^{-2} * 2x - \frac{1}{2}(1-x)^{-1/2} * -1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \qquad f(x) = \frac{x}{x^2+1} - \sqrt{1-x}$$

- Introducimos el primer valor de x $(x_1)$ Pero es evidente que $x \leq 1$

$$f(0) = -1 \qquad f(0.5) = -0.507106$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \qquad f(0.8) = 0.0405913$$

En las evaluaciones anteriores vemos que el valor más útil es $x_1 = 0.8$

- Sustituimos el primer valor de X1 en la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad entonces \quad x_2 = 0.8 - \frac{f(0.8)}{f'(0.8)}$$

$$x_2 = 0.8 - \frac{0.040591}{1.251883} \qquad x_2 = 0.767576$$

- Al tener el $x_2$ volvemos a hacer lo mismo tomando en cuenta que ahora $x_2$ pasa a ser $x_1$ en la fórmula. Esto para encontrar un nuevo valor $x_3$

$$x_3 = 0.767576 - \frac{f(0.767576)}{f'(0.767576)} = 0.767576 - \frac{0.000899726}{1.1997947}$$

$$x_3 = 0.7668261$$

- Nueva Iteración

$$x_4 = 0.7668261 - \frac{f(0.7668261)}{f'(0.7668261)} = 0.7668261 - \frac{0.000000367}{1.198819937}$$

$$x_4 = 0.7668258$$

- Última Iteración

$$x_5 = 0.766825 - \frac{f(0.766825)}{f'(0.766825)} = 0.766825 - \frac{-0.000000952}{1.198816311}$$

$$x_5 = 0.76682579$$

Se podían haber hecho más iteraciones, pero con la quinta nos podría bastar, pero claro, depende mucho de la exactitud que se quiera en el cálculo.

$$x = 0.76682579$$

# INTEGRALES

Si usted se recuerda, en la parte de la aritmética nos encontrábamos con las operaciones aritméticas Ahí veíamos que:

| Operaciones Directas | Operaciones Inversas |
| --- | --- |
| SUMA | RESTA |
| MULTIPLICACIÓN | DIVISIÓN |
| POTENCIACIÓN | RADICACIÓN |
| | LOGARITMIZACIÓN |

¿por qué vemos nuevamente esto?

Esto lo vemos por qué **ACÁ HAREMOS LA OPERACIÓN INVERSA A LA DERIVADA** Llamándola:

## ANTIDERIVADA

Si teníamos antes:

$y = f(x)$ y le aplicábamos la derivada teníamos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = F(x)$$

La derivada de la función $f\ es\ F$

Entonces

$$df(x) = F(x) * dx$$

Para resolver los problemas de antiderivada que es la INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO INTEGRAL es necesario conocer **las identidades de Derivación,** o sea que:

- Si tenemos F(x) y queremos encontrar f(x) es Importante comprender qué tipo de función es F(x) ya que podría ser: Polinomial, Logarítmica, Exponencial, Trigonométrica o compuesta
- Lo único que se hará luego de identificar el tipo de función que es F(x) se acomoda o se simplifica un poco

  Ejemplo: $\frac{1+t+t^2}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{t}{\sqrt{t}} + \frac{t^2}{\sqrt{t}} = t^{-1/2} + t^{1/2} + t^{3/2}$
- Por último, se utiliza la identidad De Derivación para encontrar la antiderivada

  Ejemplo: $F(x) = x^2 \quad es\ evidente\ que\ \ f(x) = \frac{x^3}{3}\ ya\ que\ si\ deriva\ f(x)\ Cumple$

*EJEMPLO: Encuentre la antiderivada de la función* $2\sqrt{x} + 6\cos(x)$

1. Tenemos una función compuesta
2. $2\sqrt{x} + 6\cos(x) = 2x^{1/2} + 6\cos(x)$
3. $sabemos\ que: \frac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\ \ pero\ debo\ buscar\ como\ eliminar\ que\ sería$

   $multiplicando\ por\ \frac{2}{3}\ \ entonces\ \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}x^{3/2} = x^{1/2}\right)$

   $Tambien\ que: \frac{d}{dx}sen(x) = \cos(x)$

Entonces el resultado sería $= \frac{2}{3}x^{1/2} + 6\,\text{sen}(x)$

En la siguiente tabla podemos tener un resumen de algunas Identidades de Integración

| | Identidades | |
|---|---|---|
| | Antiderivada F(x) | Función f(x) |
| 1 | $cf(x)$ | $cF(x)$ |
| 2 | $f(x) + g(x)$ | $F(x) + G(x)$ |
| 3 | $x^n \quad (n \neq 1)$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ |
| 4 | $\frac{1}{x}$ | $\ln(x)$ |
| 5 | $e^x$ | $e^x$ |
| 6 | $\cos(x)$ | $\text{sen}(x)$ |
| 7 | $\text{sen}\,(x)$ | $-\cos(x)$ |

| | Identidades | |
|---|---|---|
| | Antiderivada F(x) | Función f(x) |
| 1 | $sec^2(x)$ | $\tan(x)$ |
| 2 | $\sec(x) * \tan(x)$ | $\sec(x)$ |
| 3 | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $sen^{-1}x$ |
| 4 | $\frac{1}{1+x^2}$ | $tan^{-1}x$ |
| 5 | $\cosh(x)$ | $senh\,(x)$ |
| 6 | $senh\,(x)$ | $-\cosh(x)$ |
| 7 | $\ln(x)$ | $xln(x) - x$ |

**Tabla No. 2 Identidades Sobre Antiderivadas para la Resolución de los ejercicios.**

Para la resolución de los ejercicios es vital conocer estas identidades y el ejercicio que sea acomodarlo a esta parte.

**NOTA: Para resolver problemas de antiderivada es necesario conocer identidades de derivación ya que simplemente es hacer el proceso inverso. Es importante conocer eso para el tema teorema fundamental de cálculo parte 1.**

## El Problema Del Área

El problema que nos presenta el cálculo es encontrar áreas de figuras encerradas por funciones como la siguiente:

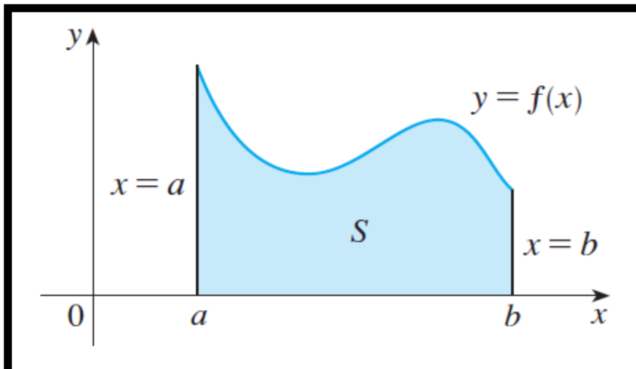



**FIGURA 1**

$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

**Figura No. 35 El área (en azul) encerrada entre a y b por una función f(x)**

El análisis que se realiza inicialmente es para encontrar el área encerrada bajo la función $y = x^2$ entre el punto $P(0,0)$ y el punto $Q(1,1)$. Similar al análisis que se hizo con los límites

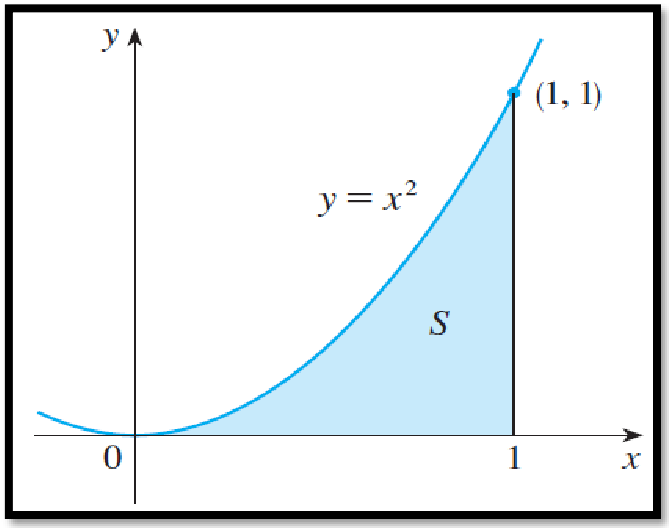



**Figura No. 36 La gráfica $y = x^2$ *entre o y* 1**

Se puede encontrar un área Aproximada de esa función de 3 formas

- Rectángulos donde toque la altura por el lado izquierdo
- Rectángulos donde toque la altura por el lado derecho
- Rectángulos donde toque la altura por el centro (La más aproximada)

**1.** Metiendo RECTANGULOS Donde toque la altura por el lado izquierdo

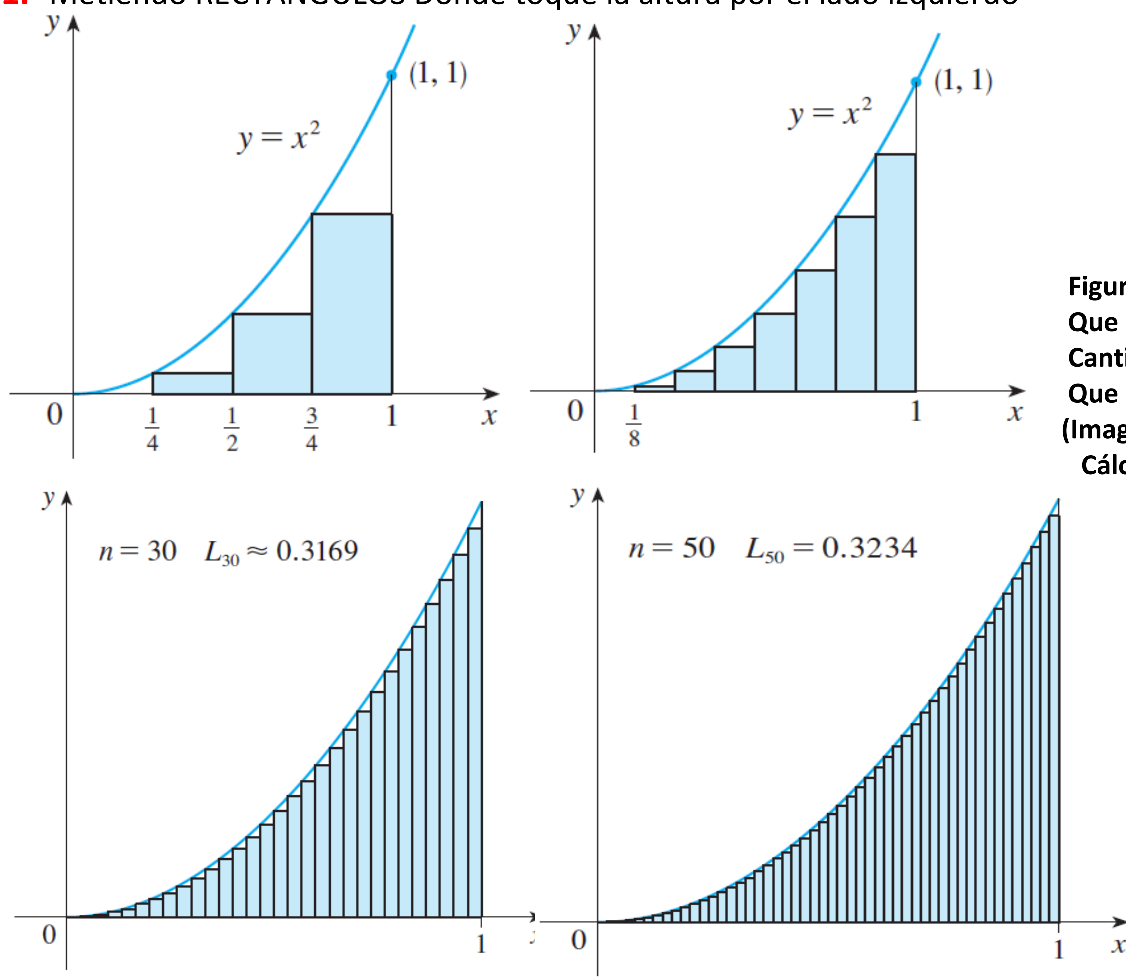



**Figura No. 37 Se puede ver Que se pueden ingresar la Cantidad de Rectángulos Que se desee. (Imagen Obtenida del Cálculo de Stewart)**

***Ejemplo:*** *Introduciendo 7 Rectángulos que toquen por la izquierda la función, encuentre el área aproximada de la función $y = x^2$ entre 0 y 1*

$$A = Suma\ De\ las\ Área\ De\ los\ Rectángulos$$

$$Base = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{7} = \frac{1}{7}$$

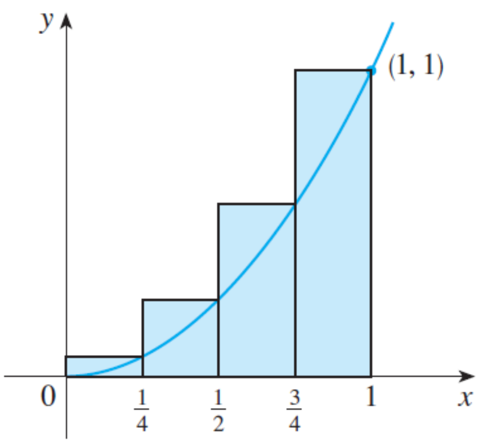
$$A = \underbrace{\frac{1}{7} * f\left(\frac{0}{7}\right)}_{1} + \underbrace{\frac{1}{7} * f\left(\frac{1}{7}\right)}_{2} + \underbrace{\frac{1}{7} * f\left(\frac{2}{7}\right)}_{3} + \underbrace{\frac{1}{7} * f\left(\frac{3}{7}\right)}_{4} + \underbrace{\frac{1}{7} * f\left(\frac{4}{7}\right)}_{5} + \underbrace{\frac{1}{7} * f\left(\frac{5}{7}\right)}_{6} + \underbrace{\frac{1}{7} * f\left(\frac{6}{7}\right)}_{7}$$

$$A = \frac{1}{7} * 0 + \frac{1}{7} * \frac{1}{49} + \frac{1}{7} * \frac{4}{49} + \frac{1}{7} * \frac{9}{49} + \frac{1}{7} * \frac{16}{49} + \frac{1}{7} * \frac{25}{49} + \frac{1}{7} * \frac{36}{49}$$

$$A = \frac{1}{7 * 49}(0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = \frac{91}{343} = \frac{13}{49}$$

$$A = 0.2653 \qquad A \approx Area_{función} = 0.2653$$

**2.** Metiendo RECTANGULOS Donde toque la altura por el lado derecho



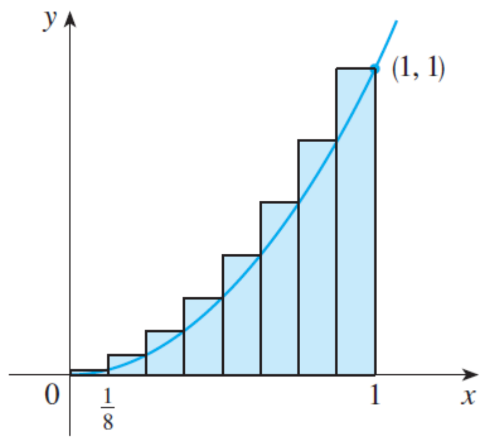
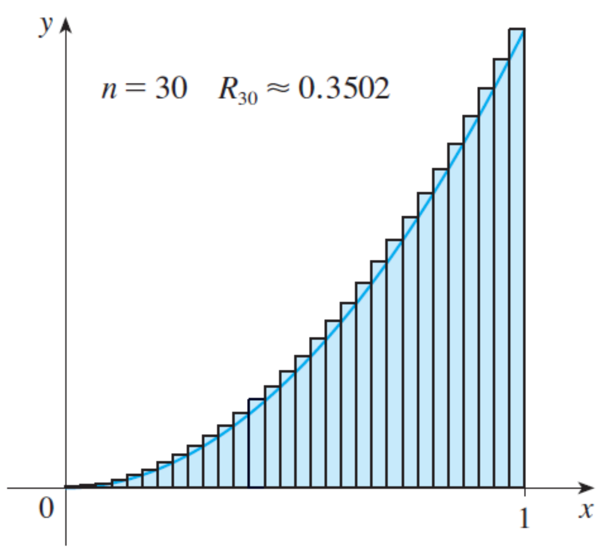
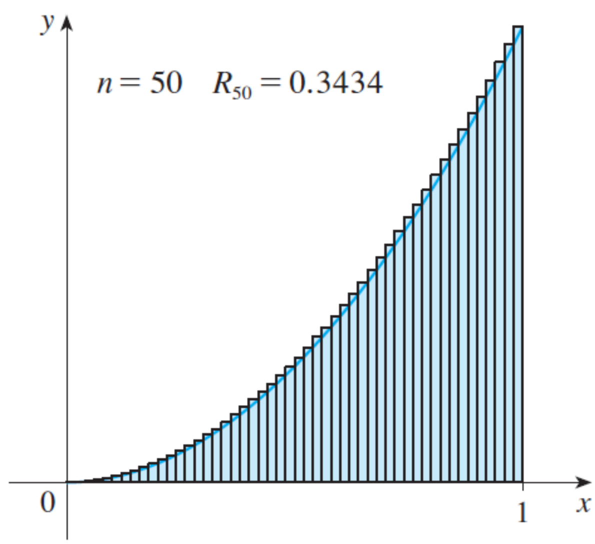




**Figura No. 38 Se puede ver Que se pueden ingresar la Cantidad de Rectángulos Que se desee. (Imagen Obtenida del Cálculo de Stewart)**




***Ejemplo:*** *Introduciendo 7 Rectángulos que toquen por la derecha la función, encuentre el área aproximada de la función $y = x^2$ entre 0 y 1*

$$A = Suma\ De\ las\ Área\ De\ los\ Rectángulos$$

$$Base = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{7} = \frac{1}{7}$$

$$A = \underbrace{\frac{1}{7} * f\left(\frac{1}{7}\right)}_{1} + \underbrace{\frac{1}{7} * f\left(\frac{2}{7}\right)}_{2} + \underbrace{\frac{1}{7} * f\left(\frac{3}{7}\right)}_{3} + \underbrace{\frac{1}{7} * f\left(\frac{4}{7}\right)}_{4} + \underbrace{\frac{1}{7} * f\left(\frac{5}{7}\right)}_{5} + \underbrace{\frac{1}{7} * f\left(\frac{6}{7}\right)}_{6} + \underbrace{\frac{1}{7} * f\left(\frac{7}{7}\right)}_{7}$$

$$A = \frac{1}{7} * \frac{1}{49} + \frac{1}{7} * \frac{4}{49} + \frac{1}{7} * \frac{9}{49} + \frac{1}{7} * \frac{16}{49} + \frac{1}{7} * \frac{25}{49} + \frac{1}{7} * \frac{36}{49} + \frac{1}{7} * \frac{1}{1}$$

$$A = \frac{1}{7 * 49}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49) = \frac{140}{343} = \frac{20}{49}$$

$$A = 0.408163 \qquad A \approx Area_{función} = 0.408163$$

**3.** Metiendo RECTANGULOS Donde toque la altura por el Centro de la misma altura.

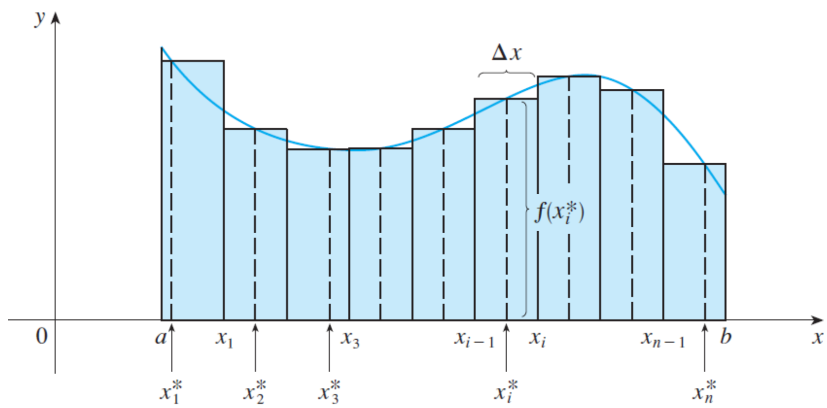



**Figura No. 39 De esta manera se ingresan los Rectángulos Haciendo que las alturas estén en función de la mitad del rectángulo**

Este es el más importante, por qué toma el promedio de las áreas calculadas anteriormente.

***Ejemplo:*** *Introduciendo 7 Rectángulos que toquen por el centro la función, encuentre el área aproximada de la función $y = x^2$ entre 0 y 1*

$$Base = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{7} = \frac{1}{7}$$

$$A = \frac{1}{7} * f\left(\frac{\frac{1}{7}}{2}\right) + \frac{1}{7} * f\left(\frac{1}{7} + \frac{\frac{1}{7}}{2}\right) + \frac{1}{7} * f\left(\frac{2}{7} + \frac{\frac{1}{7}}{2}\right) + \frac{1}{7} * f\left(\frac{3}{7} + \frac{\frac{1}{7}}{2}\right) + \frac{1}{7} * f\left(\frac{4}{7} + \frac{\frac{1}{7}}{2}\right) +$$
$$\frac{1}{7} * f\left(\frac{5}{7} + \frac{\frac{1}{7}}{2}\right) + \frac{1}{7} * f\left(\frac{6}{7} + \frac{\frac{1}{7}}{2}\right)$$

$$A = \frac{1}{7} * \frac{1}{196} + \frac{1}{7} * \frac{9}{196} + \frac{1}{7} * \frac{25}{196} + \frac{1}{7} * \frac{1}{4} + \frac{1}{7} * \frac{81}{196} + \frac{1}{7} * \frac{121}{196} + \frac{1}{7} * \frac{169}{196}$$

$$A = \frac{1}{7 * 196}(1 + 9 + 25 + 49 + 81 + 121 + 169) = \frac{455}{1372} = \frac{65}{196}$$

$$A = 0.331632 \qquad A \approx Area_{función} = 0.33163265$$

¿Por qué utilizamos Rectángulos y no alguna otra Figura Geométrica?
Utilizamos Rectángulos y no otra Figura geométrica debido que el área del rectángulo mantiene su base Constante y esto para todos los rectángulos, ya solo se deja la altura en términos de la función
$Area_{\ Rectangulo} = Base * Altura$

$$Base = \frac{Valor\ final - Valor\ inicial}{cantidad\ de\ Rectangulos\ a\ introducir} = \frac{b-a}{n} \quad donde\ n = cantidad\ de\ Rectangulos$$

Ahora bien, como pudo notar el lector, el método más aproximado es el de meter Rectángulos en donde su altura este en función del centro de la base. Existe un modelo de suma conocido como La Suma De Riemann en honor del matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866) que nos da el ingreso a las integrales definidas para posteriormente pasar a las integrales indefinidas. El concepto de la suma de Riemann es importante para comprender que una integral es un límite de sumas

## La Suma De Riemann

El señor Riemann lo que proponía era colocar en una función encerrada entre a y b, Rectángulos que tocarán a la función dependiendo de la mitad de las bases

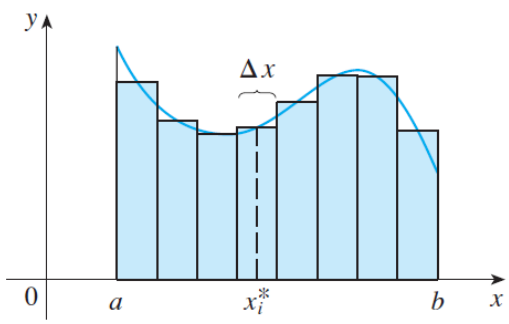



**FIGURA 1**
Si $f(x) \geqslant 0$, la suma de Riemann $\Sigma\ f(x_i^*)\ \Delta x$ es la suma de las áreas de los rectángulos.

Entonces, ese rectángulo iba a estar colocado en un punto medio $(xi^*)$ por lo tanto el área de ese rectángulo medio será de:

$$Área = Altura * Base = f(xi^*) * \Delta x \quad donde\ \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Pero se sabe que el área total es la **Suma** De todas las áreas de los rectángulos entonces:

$$Área_{De\ La\ Función} = \sum_{i=1}^{n} f(xi^*) * \Delta x \quad donde\ \ \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad y\ \ xi^* = a + i * \Delta x$$
$$i = Desde\ que\ valor\ voy\ a\ iniciar \qquad n = Cantidad\ de\ Rectangulos$$

Pero, en resumen, lo que hace la suma de Riemann es Encontrar el Área en función en términos de la cantidad de Rectángulos que se ingresen de “a” a “b” $A(n) = f(n)$ que yo valla a querer ingresar, o sea que depende del nivel de exactitud.

Ahora, como lo que se desea es encontrar el área exacta se sabe que eso se alcanza si solo se ingresan infinitos rectángulos $n \to \infty$ quedando la ecuación final como:

$$\boldsymbol{A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(xi^*) * \Delta x \quad donde}$$

$$\boldsymbol{\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad xi^* = a + i\Delta x}$$

**Algunas propiedades de Series que necesita saber para resolver los problemas:**

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn \quad donde\ c\ es\ una\ constante \qquad\qquad \sum_{i=1}^{n} c * ai = c\sum_{i=1}^{n} ai$$

$$\sum_{i=1}^{n} ai \pm bi = \sum_{i=1}^{n} ai \pm \sum_{i=1}^{n} bi$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n+1)}{30} \qquad \boldsymbol{est\acute{a}s\ propiedades\ nos\ sirven\ para\ dejar\ el\ \acute{a}rea}$$

$$\boldsymbol{de\ la\ funci\acute{o}n\ en\ terminos\ de\ n, osea\ dejar\ i(n)}$$

**Demostración de una de todas las Sucesiones**

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+4+5+6+7+8+\cdots+n$$

$La\ suma\ en\ terminos\ de\ cantidad\ será$:

$1, (1+2), (1+2+3), (1+2+3+4), (1+2+3+4+5), (1+2+3+4+5+6) \ldots (1+2+\cdots n)$

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots \frac{n(n+1)}{2} \qquad Es\ por\ eso\ que \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

***Ejemplo*** *Utilizando la suma de Riemann encuentre el área exacta de la función $y = x^2$ entre 0 y 1*

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$xi^* = a + i\Delta x = 0 + i * \Delta x = xi^* = \frac{i}{n}$$

$$f(x) = x^2 \qquad f(xi^*) = (xi^{*2}) = \left(\frac{i}{n}\right)^2$$

$$Entonces$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(xi^*) * \Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{i}{n}\right)^2 * \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} * \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} i^2 =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3} * \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{6n^2} + \frac{3n}{6n^2} + \frac{1}{6n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} = \frac{1}{3} \qquad A = \frac{1}{3} \qquad A = Área_{funcion} = \frac{1}{3}\ (0.33333333)$$

## El Problema De La Distancia

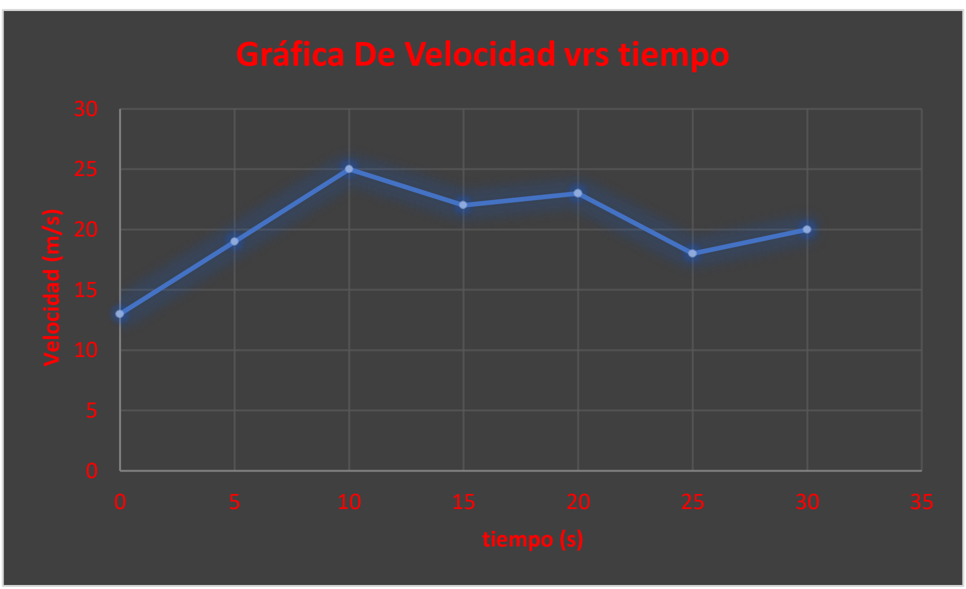
Ahora consideramos una partícula que viaja de en un tiempo $t$ y con una velocidad $v$ que se va conociendo en todo momento y en base a ello se debe encontrar una distancia. Se puede decir que este problema es inverso al problema de la velocidad instantánea.

Generalmente la fórmula que se utiliza es: $Distancia = Velocidad\ \text{X}\ Tiempo$

*Suponga que le piden encontrar la Distancia recorrida por un automóvil en un intervalo de tiempo de 30 segundos tomando 7 lecturas en el mismo experimento. Se hacen las lecturas de las siguientes velocidades*

| **Tiempo (s)** | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Velocidad (m/s)** | 13 | 19 | 25 | 22 | 23 | 18 | 20 |

- Se debe cuidar el lector de trabajar bajo las mismas dimensionales tomando en cuenta el tiempo, si trabaja segundos en el tiempo, también partido segundos deberá ser la velocidad
- En Resumen, lo que se hace es nuevamente el análisis del área, sumar las áreas que va generando la siguiente gráfica




- Sumamos las áreas aproximadas como aprendimos anteriormente o siguiendo la fórmula de: $Distancia = Velocidad\ \text{X}\ Tiempo$

$$D = (0 * 13) + (5 * 19) + (10 * 25) + (15 * 22) + (20 * 23) + (25 * 18) + (30 * 20)$$

$$D = 2{,}185\ metros\ (2.185\ Km)$$

Ahora, lo que hacemos en esta parte es una aproximación numérica de la velocidad, no la conocemos realmente. Para ello podemos establecer un teorema
Para encontrar una Distancia más exacta se hubiera tomado tiempos más cortos al momento de tomar la lectura de datos.

Asimiento que nos hubieran dado una función $f(t)$ lo que se tendría que hacer es lo mismo que en el problema del área, introducir la mayor cantidad de rectángulos posibles para una mayor exactitud.
Para hacer el análisis de la sumatoria tendríamos que decir que:

$$d = f(t_0) * \Delta t + f(t_1) * \Delta t + f(t_2) * \Delta t + \cdots + f(t_n) * \Delta t \ = \sum_{i=1}^{n} f(t_i * \Delta t) \quad donde\ \Delta t \to 0$$

$$\boldsymbol{d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i) * \Delta t}$$

$$\boldsymbol{Donde\ f(t) = Función\ Velocidad\ en\ terminos\ del\ tiempo}$$

## *La Integral Definida (El símbolo de integral como tal)*

El **símbolo** ∫ **se** usa para denotar una **integral** en matemáticas. La notación fue introducida por el matemático y filósofo alemán Gottfried Leibniz a finales del siglo XVII. El **símbolo se** basó en el carácter **ſ** (**S larga**), y **se** escogió debido a que **una integral es** el **límite de una suma**.

*Al inicio teníamos la función:*

$y = f(x)$ y le aplicábamos la derivada teníamos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = F(x)$$

La derivada de la función $f\ es\ F$
Entonces

$$df(x) = F(x) * dx$$

$$ACÁ\ INGRESAMOS\ A\ LA\ SIMBOLOGIA\ DE\ INTEGRAL \int dx$$

La suma de muchos diferenciales de f(x) será la función f(x) al final

$$\int df(x) = \int F(x)dx + C$$

$$Sabiendo\ que\ f(x) = \int df(x)$$

$$\boldsymbol{f(x) = \int F(x)dx + C}$$

**Y habíamos visto que** $\boldsymbol{la\ suma\ del\ área\ de\ f(x)\ era}$: $\boldsymbol{A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(xi^*) * \Delta x}$

Entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(xi^*) * \Delta x \quad donde \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}}$$

Eso es una integral, es la Suma de muchos Diferenciales (El proceso inverso de la derivación)

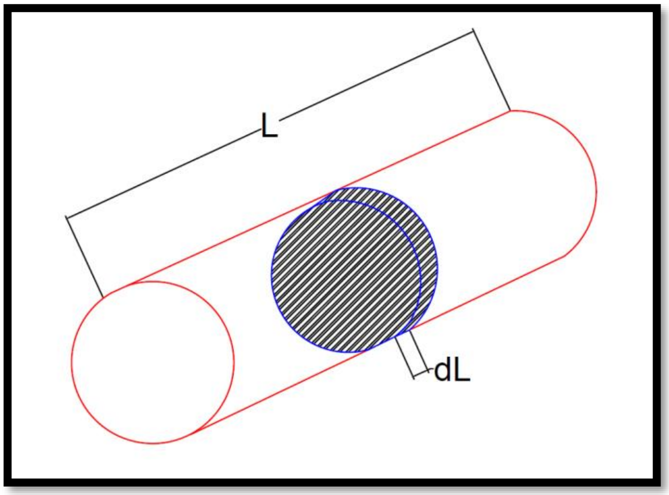



**Figura No. 40 Comprensión de Lo que es la integral $\int dL = L$**

*Ejemplo: Volviendo a nuestro análisis del problema de área Utilizando la Integral definida encuentre el área de la función $y = x^2$ entre 0 y 1*

$$A = \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{1}{3}$$

Como puede ver el lector, con la integral definida todo es más sencillo al momento de resolver problemas de diferenciales.

**Cuidado:** Debe saber usted en este punto que la integral definida no siempre la utilizamos para encontrar áreas bajo curvas, sino también para encontrar de $a$ a $b$ valores de:

- Volúmenes
- Campo Magnético
- Presión Hidrostática
- Trabajo
- Área Superficial
- Entre otras cosas

## El Teorema Fundamental Del Cálculo

Este teorema se divide en dos partes:

**Teorema fundamental del cálculo, parte 1** Si $f$ es continua sobre $[a, b]$, entonces la función $g$ definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

es continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre $(a, b)$, y $g'(x) = f(x)$.

Lo que nos indica el teorema fundamental de cálculo parte 1 es que la Derivada Es el Proceso Inverso de la Integral. La derivada de g(x) es igual que f(x)
También, si integramos f(x) nos quedará otra función, no un valor.

**Teorema fundamental del cálculo, parte 2** Si $f$ es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde $F$ es una antiderivada de $f$; es decir, una función tal que $F' = f$.

Lo que nos indica el Teorema De Cálculo Parte 2 es que la integral definida es un número exacto, al resolver la integral evaluamos en b y en a y la operación de resultado es una constante.

## Integrales Indefinidas

Una integral Indefinida es aquella que **No tiene Límites de Integración,** Si lo quiere ver así, es la parte del teorema fundamental del cálculo parte 1

Para la resolución de las mismas debemos saber que:

1. Conocer bien la tabla de las Antiderivadas o conocer las identidades de Derivadas
2. Comprender que, lo que usted está haciendo es encontrar Otra función
3. Al integrar colocarle una constante al resultado, ya que al volver a derivar esa derivada de la constante será 0
4. La derivada del resultado que le quede debe ser igual a la función que integro inicialmente

*Ejemplo 1: Resuelva la integral*

$$\int \sqrt[3]{x}dx \qquad Para\ resolver\ está\ tegral\ es\ importante\ modificarla\ un\ poco.$$

$$Sabiamos\ que: \frac{d\,x^n}{dx} = nx^{n-1} \quad entonces\ la\ nueva\ identidad\ será: \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int x^{1/3}dx = \frac{x^{\left(\frac{1}{3}\right)+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}x^{4/3} \qquad Entonces: \quad \int x^{1/3}dx = \frac{3}{4}x^{4/3} + C$$

*Prueba:*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{4}x^{4/3} + c\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{4}x^{4/3}\right) + \frac{d}{dx}(C) = \frac{3}{4} * \frac{4}{3} * x^{\left(\frac{4}{3}\right)-1} = x^{1/3}$$

Se vuelve a decir que es importante conocer las derivadas para encontrar la antiderivada o la integral indefinida

*Ejemplo 2 Resuelva la Siguiente integral*

$$\int Sen(x) + \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\int Sen(x) + \frac{1}{1+x^2}dx = \int sen(x)dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$Sabemos\ que: \frac{d}{dx}\cos(x) = -sen(x) \qquad \frac{d}{dx}tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2} \qquad Entonces:$$

$$\int sen(x)dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx = -\cos(x) + tan^{-1}x + c$$

$$\int Sen(x) + \frac{1}{1+x^2}dx = tan^{-1}x - \cos(x) + c$$

**1 Tabla de integrales indefinidas**

| | |
|---|---|
| $\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$ | $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ |
| $\int k\,dx = kx + C$ | |
| $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$ | $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$ |
| $\int e^x\,dx = e^x + C$ | $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ |
| $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$ | $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$ |
| $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$ | $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$ |
| $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$ | $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$ |
| $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + C$ | $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$ |
| $\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$ | $\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$ |

**Figura No. 41 Tabla De Integrales (Figura Tomada del cálculo De Stewart 7E)**

## Regla De La Sustitución

Esta parte es fundamental en el cálculo Integral, pues es el concepto de la regla de la cadena, que era llevar una función con sustituciones a una forma donde se pudiera derivar con nuestras identidades. Es lo mismo, es llevar la integral por medio de sustituciones a una parte donde se pueda integrar con nuestras identidades.

Suponga que nos piden encontrar la integral de la siguiente función:

$$\int sen(2x)dx$$

$$Como\ sabiamos\ que: \int sen(x)dx = -\cos(x) \quad Entonces$$

$$¿Será\ Que: \int sen(2x)dx = -\cos(2x) + C\ ?$$

Si usted realiza la derivada para comprobar, verá que no es esa la solución

$$\int sen(2x)dx = C - \frac{\cos(2x)}{2}$$

Entonces, ¿cómo se resuelven esas integrales?

1. Se Observa que es lo más complicado que se tiene de la integral
$$\int e^{2x-4}\ dx$$
2. Se realiza la sustitución, con cualquier variable ya sea $u, t, m, p, q$ ...
$$podríamos\ decir\ que: u = 2x - 4$$
3. Se deriva la sustitución realizada respecto a la variable inicial.
$$\frac{du}{dx} = 2 \quad entonces\ \frac{du}{2} = dx$$
4. Se realiza la sustitución
$$\frac{1}{2}\int e^u du \quad y\ se\ sabe\ que \int e^x dx = e^x + c$$
$$Entonces\ \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}\ e^u + C$$
$$Se\ regresa\ a\ la\ variable\ inicial$$
$$\frac{1}{2}e^u = \frac{1}{2}e^{2x-4} + c$$

$$\int e^{2x-4}\ dx = \frac{1}{2}e^{2x-4} + c$$

## Aplicaciones De La Integral

En esta parte Usted ya debe saber integrar a la perfección, ya sea conociendo las identidades o por sustitución. Es necesario por qué, lo que se hará es resolver ejercicios encontrados en la vida diaria como los son:

1. Área encerrada entre curvas
2. Volúmenes
3. Trabajo
4. Valor Promedio De Una Función

Lo que usted hará es encontrar un diferencial de cualquiera de esos temas para luego integrarlos (Sumar los diferenciales).

### Área Encerrada Entre Curvas

En esta parte se estudia las áreas encerradas por una o más funciones justo como el siguiente ejemplo.

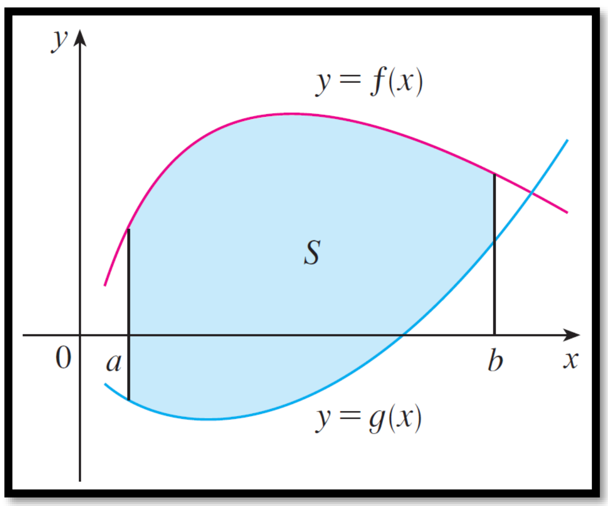



**Figura No. 42 área encerrada por dos funciones entre a y b**

**Se presentan dos casos, cuando integramos respecto a x (dx) y respecto a y (dy)**

veamos cuando integramos respecto a x (dx)

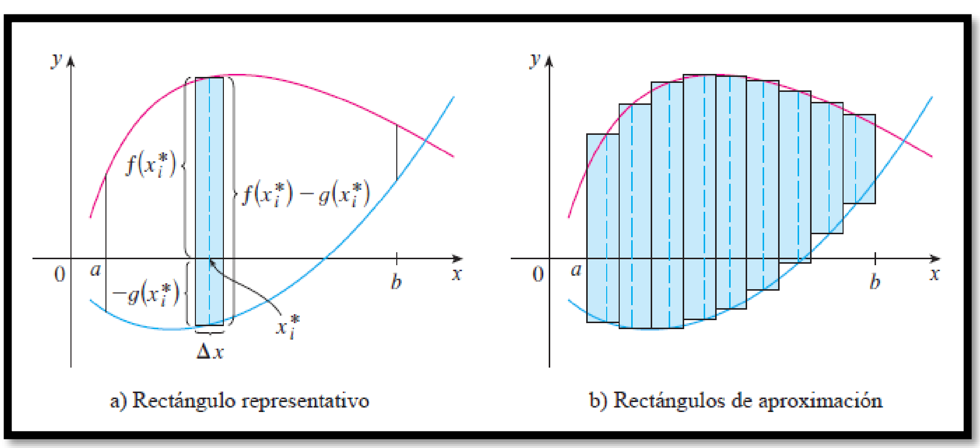



**Figura No. 43**
**Como vemos en la figura, se ingresan Rectángulos donde su base será $dx$ y Su altura será $f(x)$**

$Área\ encerrada\ por\ dos\ funciones\ entre\ los\ puntos\ a\ y\ b = A$

$$A = A_{arriba} - A_{abajo} = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx$$

$Es\ importante\ comprender\ que\ pueden\ existir\ áreas\ negativas, está\ misma\ lo\ que\ nos\ indicaria\ es\ la\ posición\ de\ la\ función, que\ se\ encontraría\ en\ el\ eje$ "y negativo".

$$\boxed{\boldsymbol{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx}}$$

- **Recomendación:** para la resolución de estos problemas es importante realizar una Excelente Gráfica

veamos cuando integramos respecto a y (dy)

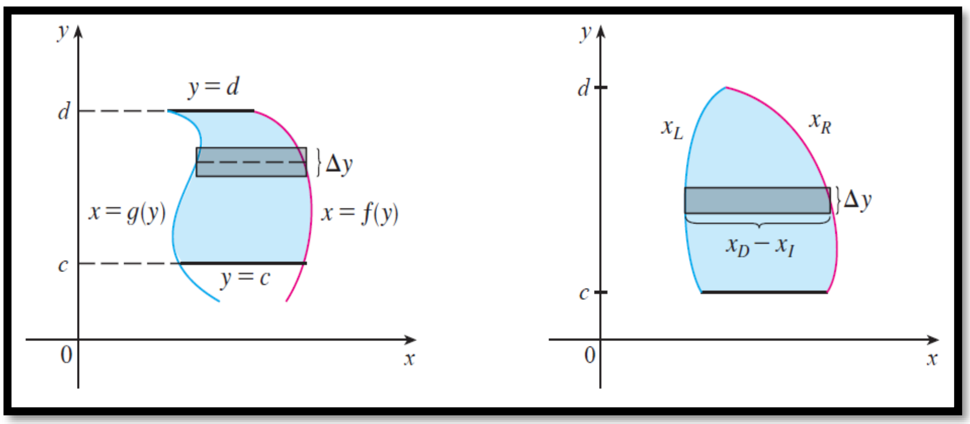



**Figura No. 43**
**Como vemos en la figura, se ingresan Rectángulos donde su base será $dy$ y Su altura será $f(y)$**

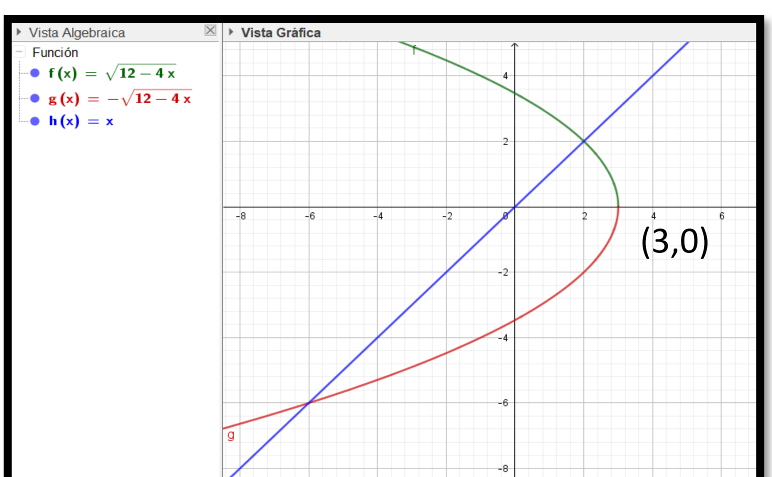
$$A = A_{derecha} - A_{izquierda} = \int_c^d f(y)\, dy - \int_c^d g(y)\, dy = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$$

$$\boxed{\boldsymbol{A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy}}$$

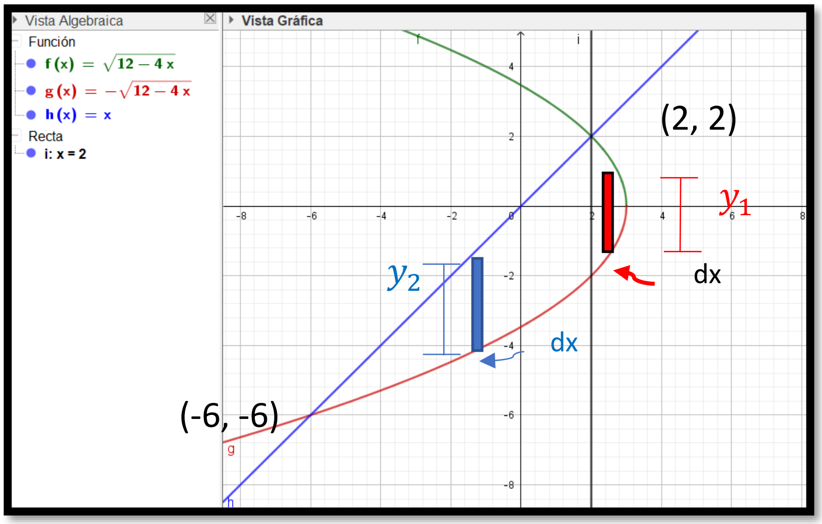
*Ejemplo: Encuentre el área encerrada por las funciones* $4x + y^2 = 12$ ; $\quad x = y$

1. *Realizamos una gráfica*
   $4x + y^2 = 12$
   $y = \pm\sqrt{12 - 4x}$

   $y = \sqrt{12 - 4x}$
   $y = -\sqrt{12 - 4x}$
   $y = x$



2. Ingresamos un diferencial




Viendo la gráfica podemos ver que se tiene que integrar por partes, ya que en algunos intervalos cambian las alturas

3. Puntos de Intersección

$$x = -\sqrt{12 - 4x} \quad \textit{Elevamos ambas expresiónes para } x$$

$$x^2 = 12 - 4x$$

$$x^2 + 4x + 12 = 0$$

$$(x + 6)(x - 2) = 0 \qquad x = -6 \qquad x = 2$$

4. Planteando la integral Y Resolviéndola

$$A = A1 + A2$$

$$A = \int_{-6}^{2} y_2 dx + \int_{2}^{3} y_1 dx \;=\; \int_{-6}^{2} -\sqrt{12 - 4x} - x\, dx + \int_{2}^{3} \sqrt{12 - 4x} - \left(-\sqrt{12 - 4x}\right) dx$$

$$A = \left(\frac{\sqrt{(12 - 4x)^3}}{6} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-6}^{2} + 2\left(\frac{\sqrt{(12 - 4x)^3}}{6}\right)\Bigg|_{2}^{3}$$

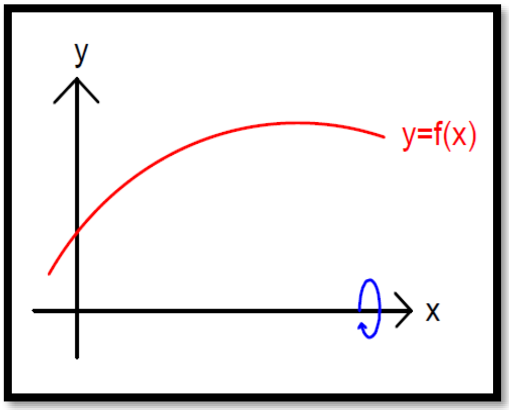
$$A = \frac{-56}{3} + \frac{8}{3} = \frac{-48}{3} = -16$$

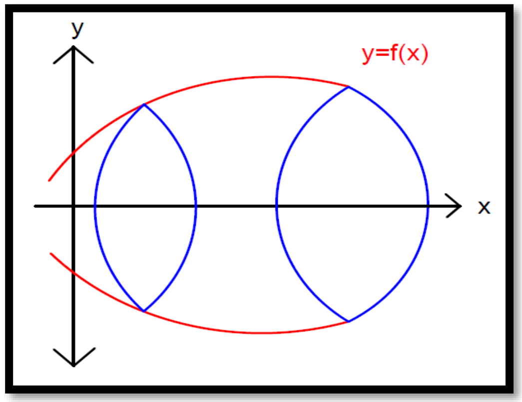
$$A = -16\, u^2 \; (\textit{Unidades Cuadradas})$$

Nótese que el área quedo negativa, pero en la vida real no existen áreas negativas, esto sucede debido a que la mayor cantidad de área se encuentra en el eje y negativo (-y)

## Volúmenes

En matemática básica 2 vemos dos tipos de Volúmenes, los Sólidos de Revolución (Cuando giramos una función respecto a un eje) y volúmenes establecidos en 3 Dimensiones y cuyo trabajo suyo es introducir un diferencial de volumen he integrarlo respecto a una sola variable.



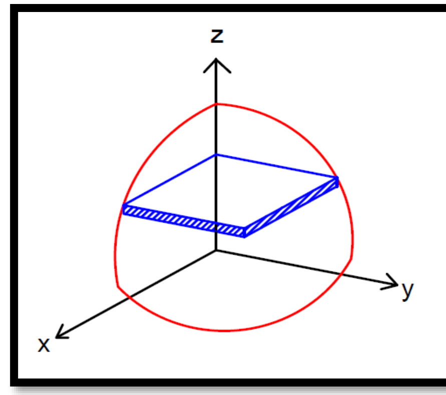




**Figura No. 44 Primer Caso Al rotar la función Respecto a un Eje**

**Figura No. 45 De esta manera quedan las Funciones Al Rotarla.**

**Figura No. 46 Integración respecto A una variable de una figura ya Establecida.**

### En el primer Caso. (Rotación de una función respecto a un eje)

En este primer caso vemos lo que nos aparece en la Figura **No. 44** y **No. 45**
Rotamos una función y = f(x) respecto a un eje (Puede ser el eje x, eje y o una función $y = h(x)$ o incluso $x = i(y)$)

Acá se necesita mucha imaginación, pues lo ideal es poder imaginarse como queda la figura al momento de rotar la función.

Existen dos métodos para la realización de estos problemas, el método de discos y el método de cascarones cilíndricos.

### Método De Discos

Se le llama así debido a que, lo que se hace es introducir rectángulos (Como los que se introducían en el cálculo de áreas) y al rotar la función misma con el eje indicado, los rectángulos lo que harán será formar discos al momento de ser rotados como se muestra en la figura.

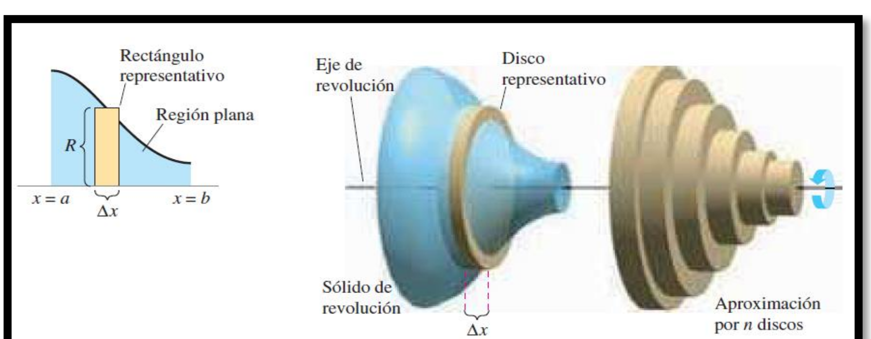
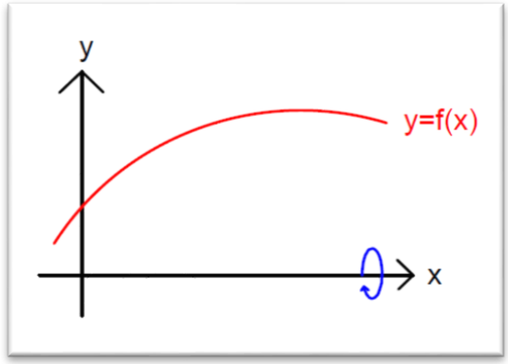
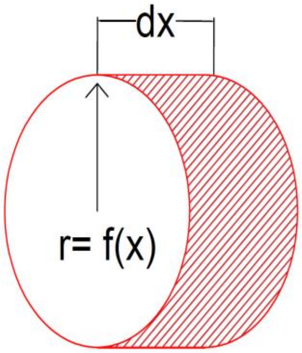



**Figura No. 47 Introducción de Rectángulos Y Suma de varios de ellos**

## ROTACIÓN RESPECTO O PARALELO AL EJE X




Hacemos el análisis con un disco individual, similar a cuando
Encontrábamos las áreas pues solo hacíamos el análisis con un
Solo rectángulo.
Por suma de Riemann se sabe que se debe introducir *n* rectángulos y
Luego se debe hacer que $n \to \infty$

Y como se sabe que el volumen de un Cilindro $= \pi * Radio^2 * Altura$

$$Volumen = V = \pi * r^2 * dx$$

$$\Delta V = \pi * [R(xi^*)]^2 * \ \Delta x \quad donde \ \ \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

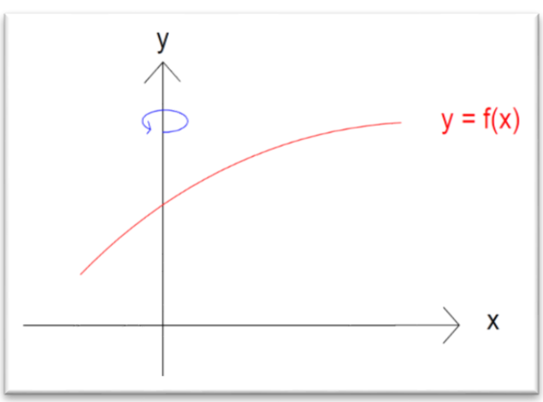
Si nosotros hacemos el análisis de rotación de una función respecto al eje x diríamos que:

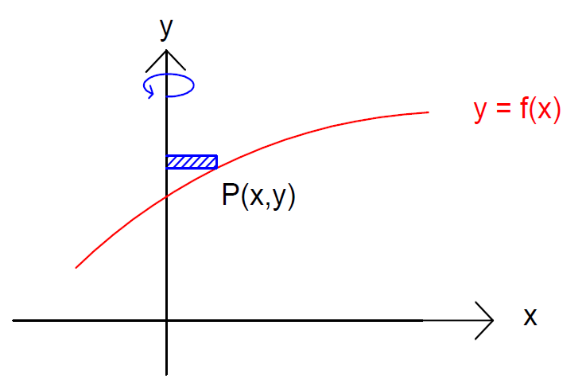
$$R(x) = r = f(x)$$

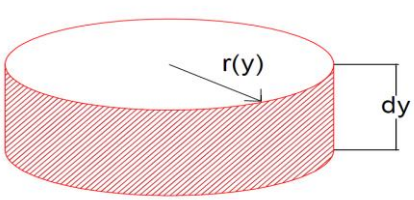
Viendo ese diferencial, sabemos que: $V = \int dV$
Entonces:

$$\boldsymbol{V} = \int_a^b dV = \boldsymbol{\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx} \quad \boldsymbol{respecto\ o\ paralelo\ a\ x}$$

## ROTACIÓN RESPECTO AL EJE Y




Se introduce un rectángulo de igual manera en el punto $\mathrm{P}(x, y)$
Y al rotar la función respecto al eje $y$
Se forma la figura como la que se encuentra en la izquierda.
(cilindro)

$$dV = \pi * r^2 dy$$
$$viendo\ la\ gráfica\ de\ la\ función\ y = f(x) vemos\ que\ r = x$$
$$dV = \pi x^2 dy$$
$$y\ como\ inicialmente\ nos\ darán\ y = f(x)\ despejamos\ para\ x$$
$$dV = \pi * f(y)\ dy$$

Si decimos que: $x = R(y)$

$$\boldsymbol{V = \pi \int_a^b (R(y))^2\, dy} \quad \textbf{respecto o paralelo a y}$$

## Método de arandelas (Anillos)

Este método nos sirve para encontrar volúmenes de áreas que están encerradas por dos o más funciones.

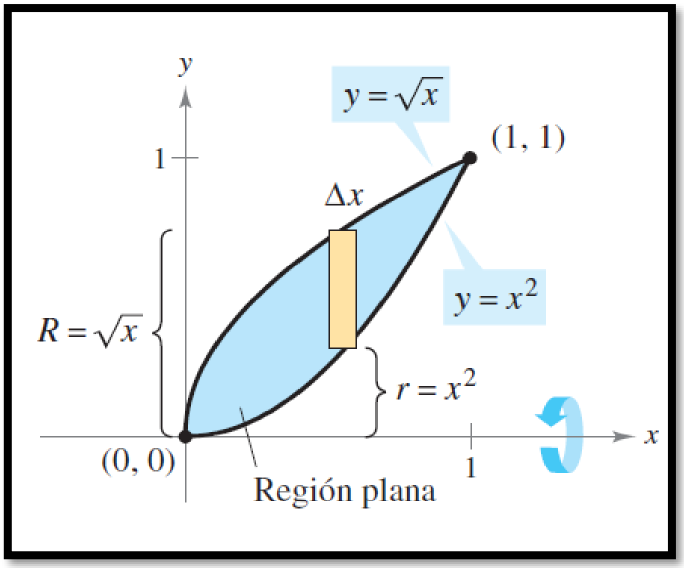
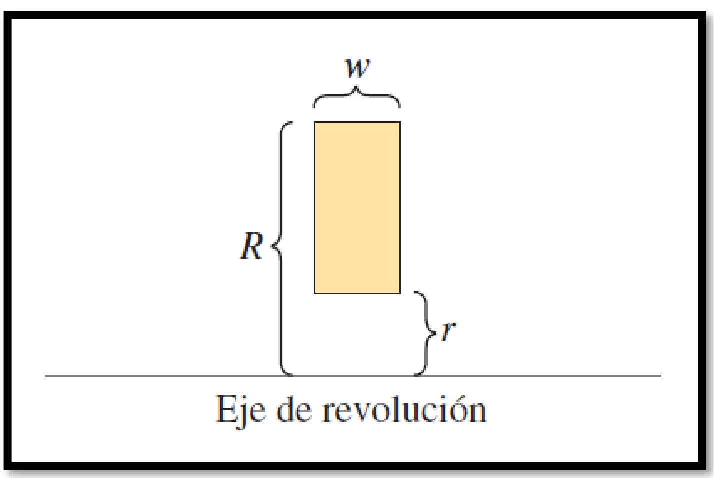



**Figura No. 48 Ejemplo de una región compuesta por dos funciones que rota respecto a un eje. Nótese como se introduce el diferencial (la parte en amarillo).**

En este caso $f(x) = \sqrt{x}\quad g(x) = x^2$



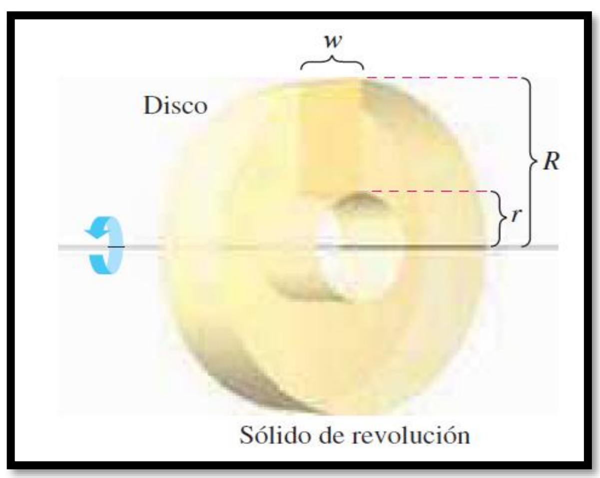




**Figura No. 49 Forma del diferencial**

**Figura No. 50 Forma del diferencial luego de haber rotado**

Como se puede notar, se crea un anillo o una arandela, por eso lleva ese nombre.

Su fórmula sería: $Diferencial\ de\ Voluemen = Area_{transversal}\,(x) * Altura$

$$dV = A(x) * dx$$

$$dV = \left(\acute{A}rea\ de\ arriba - \acute{A}rea\ de\ abajo\right) * dx$$

$$dV = (\pi R^2 - \pi r^2)dx$$

$$Si\ se\ nota\ la\ graf\acute{\imath}ca\ \boldsymbol{No.48}\quad R = f(x)\ \ y\ \ r = g(x)$$

$$dV = \pi(f(x)^2 - g(x)^2)dx$$

$$\boldsymbol{V = \pi \int_a^b \left[\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right] dx}$$

***rotacion de dos funciones o más respecto a x o paralelo a x***

Para la rotación de dos funciones respecto a el eje y será:

$$\boldsymbol{V = \pi \int_c^d [R(y)^2 - r(y)^2]dy}$$

***rotacion de dos funciones o más respecto a y o paralelo a y***

***Ejemplo:*** *Encuentre el volumen de la función* $y = \frac{1}{1+x}, y = 0, x = 0, x = 3$ *alrededor de la recta* $y = 4$

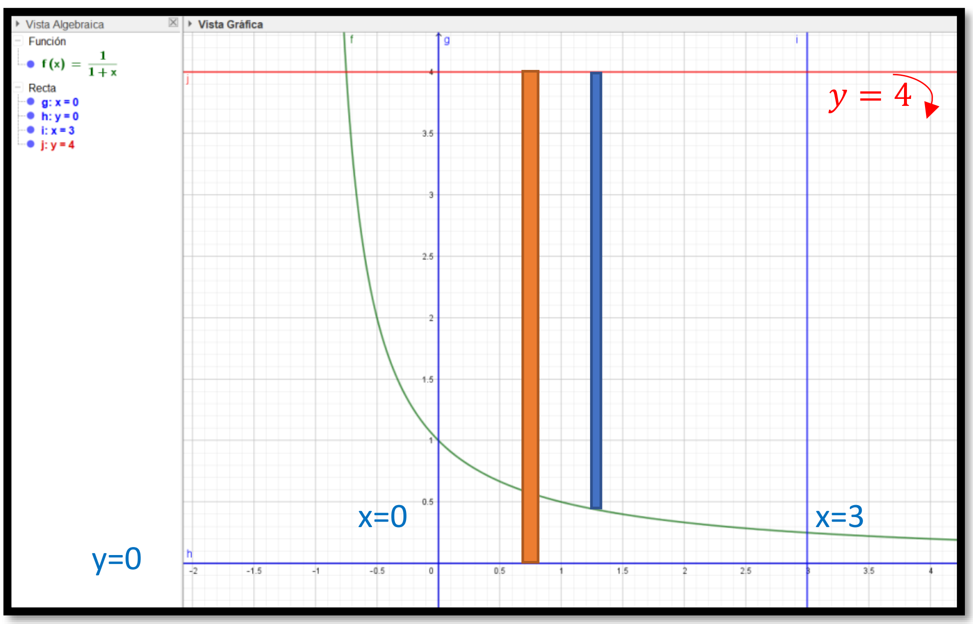
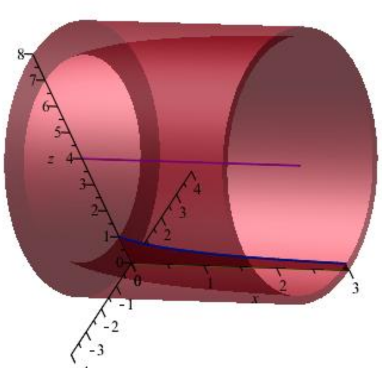



**Figura No. 51 trazo de la gráfica con su diferencial respectivo**

Lo que acá sucede es que se le debe restar al volumen de afuera el volumen de adentro

Está sería la figura que se mostraría en 3 dimensiones al rotar.



$$dV = A(x) * dx \ = \ (\pi R^2 - \pi r^2)dx$$

$$dV = \pi(4^2 - (4-y)^2)dx$$

$$V = \pi \int_0^3 (16 - \left(4 - \tfrac{1}{1+x}\right)^2)dx = \pi \int_0^3 16\, dx - \pi \int_0^3 \left(4 - \tfrac{1}{1+x}\right)^2 dx$$

$$V = \pi\,(16x)\,\Big|_0^3 - \pi\left(16x - \tfrac{1}{1+x} - 8\ln(x+1)\right)\Big|_0^3$$

$$V = \pi(16 * 3) - \pi(36.65964511 - (-1))$$
$$dV = 48\pi - 37.65964511\pi$$
$$V = 32.48518296\, u^3 (Unidades\ Cubicas)$$

Acá aplicamos para la resolución de las integrales formuladas, el método de la sustitución, para resolver la integral como la que tuvimos anteriormente.

## Método Con Secciones Transversales Conocidas

Existen algunos volúmenes en los que no se rota y se nos pide calcular su volumen, esto mismo es válido pues como se sabe que a estas alturas ya conocemos la integración con respecto a una variable, entonces nuestro trabajo es buscar un diferencial de volumen con respecto a una variable e integrar.
Las secciones transversales a ingresar en una figura pueden variar y pueden llegar a ser:

- Secciones Triangulares (Triangulo rectángulo, Triángulos Equiláteros, Triángulos Escalenos)
- Secciones Circulares
- Secciones Rectangulares
- Secciones Trapezoidales
- Secciones Cuadradas
- Entre Otras

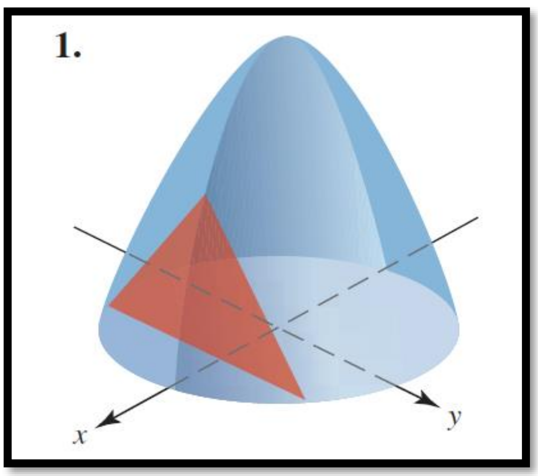



**Figura No. 52 Las secciones transversales son Triángulos Equiláteros**

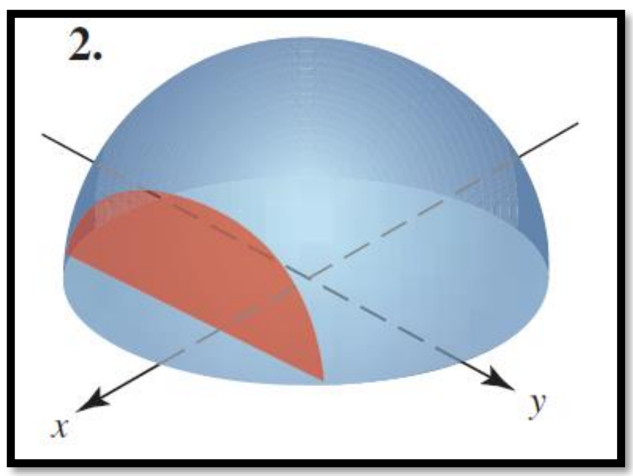
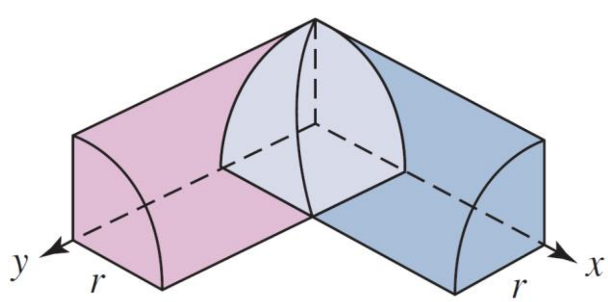
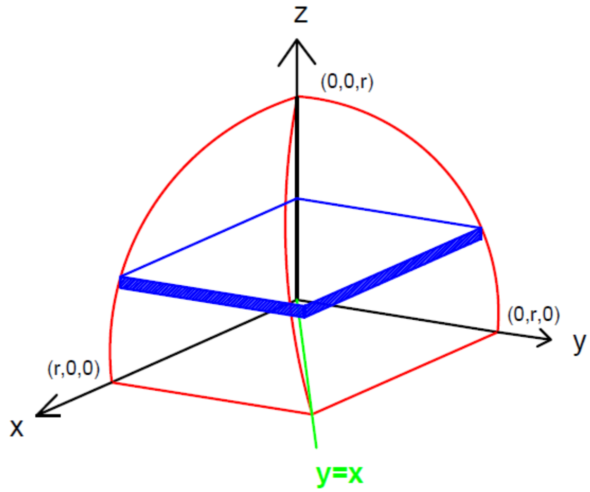



**Figura No. 53 Las secciones transversales son Semi Círculos**

Este es un ejemplo de cómo se ingresan los diferenciales de volumen en donde su trabajo es encontrar ese diferencial en términos de 1 variable

*Ejemplo: Sólidos de Steinmetz El sólido formado por dos cilindros circulares de radio r cuyos ejes se cortan formando un ángulo recto se denomina bicilindro y es un caso especial de los sólidos de Steinmetz. Por razones de claridad se muestra la octava parte del sólido en la FIGURA*
*Encuentre el volumen total del bicilindro ilustrado en la figura.*






Inicialmente hacemos un gráfico como ese, luego introducimos un diferencial viendo que será cuadrado por:

$$dV = base * Ancho * ALtura$$

$$dV = x * y * dz$$

La ecuación que describe cada circunferencia es:

$$z^2 + x^2 = r^2 \qquad z^2 + y^2 = r^2$$

$$1 \qquad\qquad 2$$

$$z^2 = r^2 - x^2 \qquad sustituyendo\ en\ 2$$

$$r^2 - x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 = y^2 \qquad entonces\ x = y$$

$$dV = x * y * dz$$

$$dV = x^2 dz \qquad pero\ como\ se\ sabe\ que: x^2 = r^2 - z^2$$

$$dV = (r^2 - z^2)dz$$

$$V = \int_0^r r^2 - z^2\, dz$$

$$V = r^2 z - \frac{z^3}{3}\Big|_0^r$$

$$V = \frac{2}{3}r^3$$

## Método De  Cascarones Cilíndricos

Suponga que le piden el volumen de la función $y = 2x^2 - x^3$ respecto al eje y encerrada con la función $y = 0$

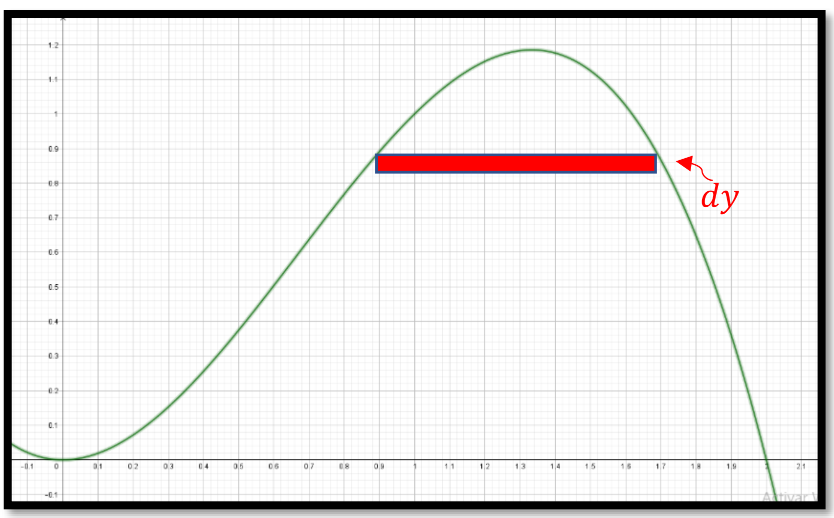
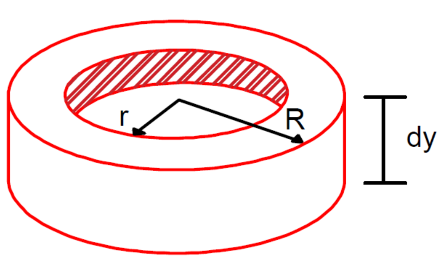



**Figura No. 54 Trazo de la gráfica con su respectivo diferencial**

Vea que al rotar la función el diferencial quedará:



La ecuación del diferencial de volumen será:

$$dV = \pi(R^2 - r^2)\, dy$$

$$Si\ usted\ ve\ la\ \boldsymbol{Figura\ No.54}\ notará\ que\ R = x\ \ asi\ como\ r = x$$
$$pero\ el\ problema\ es\ que\ esas\ x\ de\ R\ y\ r\ pertenecen\ a\ la\ misma\ función$$
$$dV = \pi(x^2 - x^2)\, dy$$
$$dV = 0$$

Pero el volumen no debe ser 0 ya que gráficamente lo podemos ver

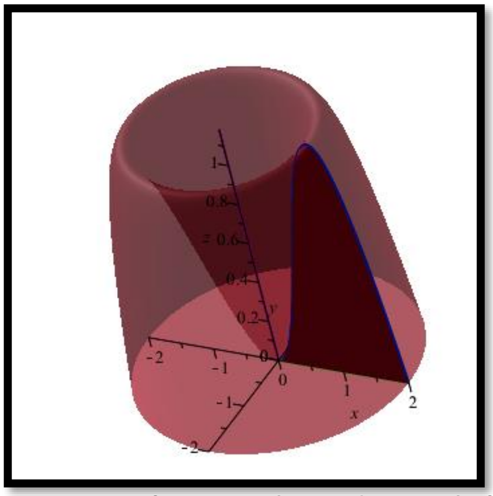


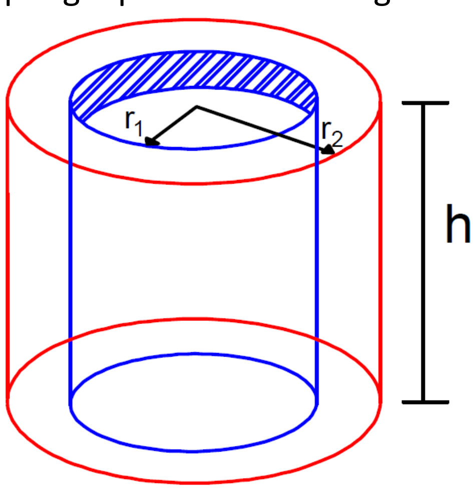

**Figura No. 55 Grafica en 3D luego de rotar la función**

Por este mismo problema Nace el método de volúmenes mediante cascarones cilíndricos para encontrar un volumen en donde no se cancelen sus radios.

Este es el método más seguro de utilizar

¿De dónde nace su fórmula?

Suponga que tenemos el siguiente cilindro




$$dV = \pi({r_2}^2 - {r_1}^2)h \quad por\ diferencia\ de\ cuadrados$$
$$dV = \pi(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)\, h$$

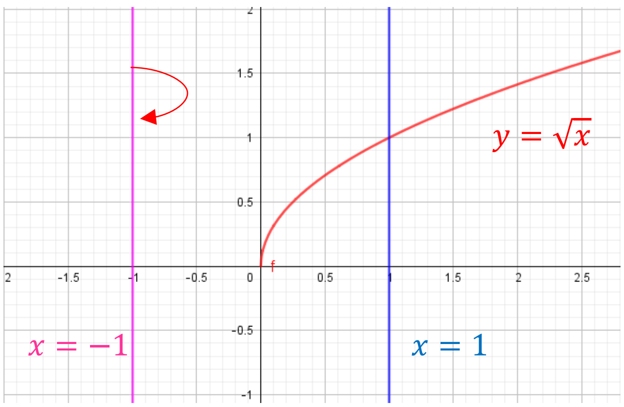
$$Como\ sabemos\ que\ r_1 \to r_2\ \ entonces\ r_2 - r_1 = dr$$
$$r = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad radio\ promedio$$
$$2r = r_1 + r_2$$
$$sustituimos:$$

$$dV = 2\pi * r * h * dr$$
$$dV = 2\pi xydx$$

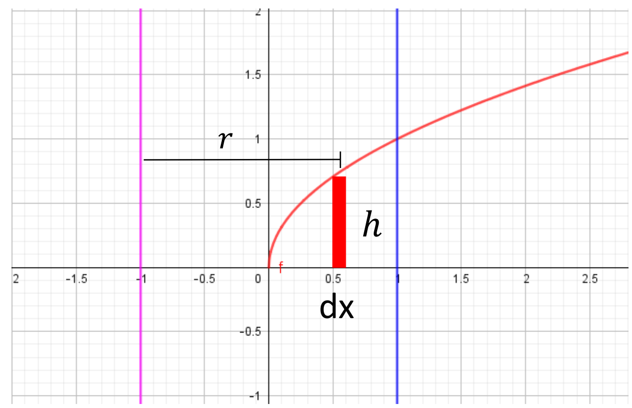
$$V = 2\pi \int_a^b x\, f(x) dx$$

Rotación de la función f(x) respecto a y o paralelo a y

*Ejemplo:* *Encuentre el volumen de las funciones:* $y = \sqrt{x}\ ;\ x = 1; x = 0; y = 0$ *que rotan respecto a* $x = -1$




$x = 0$




$$dV = 2\pi\, rh * dr$$
$$dV = 2\pi(x+1)\sqrt{x}\, dx$$

$r = x - (-1)$ $\qquad$ $h = y - 0$

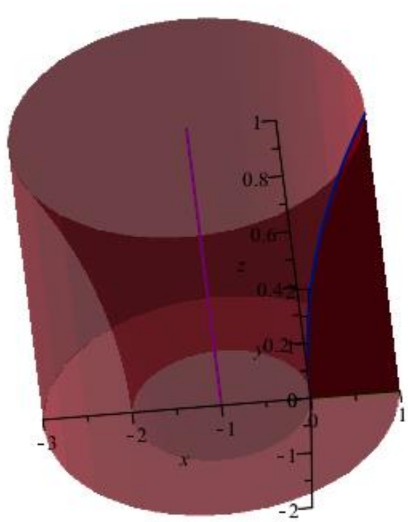
$r = x + 1$ $\qquad$ $h = \sqrt{x}$

$$V = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x}(x+1)\, dx$$

$$V = 2\pi * \left(\frac{2}{15} x^{\frac{3}{2}}(3x+5)\right) \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$$

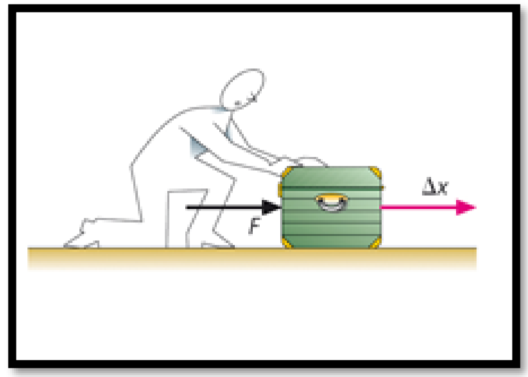
$$V = 2\pi * \left(\frac{16}{15}\right) = \frac{32}{15}\pi$$

$$V = \frac{32}{15}\pi = 6.70206433)$$



# Trabajo

Suponga que tiene que empujar una caja de un punto A a un punto B como se muestra en la siguiente imagen.

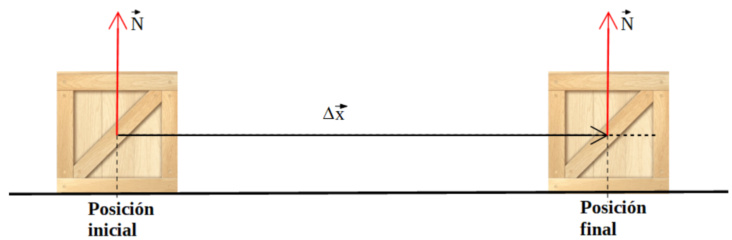



Al mover un objeto de masa "m" usted lo que hace es Agotar **Energía** *Y esta energía que usted agotaría seria proporcional a:*
*la distancia* $(\Delta x)$ *que movería usted la caja así como*
*La fuerza ejercida hacia la caja*

*¿Que es fuerza?*
*Fuerza la define Newton como la interacción que ejercen Dos o más cuerpos para realizar un cambio de velocidad Sobre una masa*

$$F = masa * \frac{cambio\ de\ velocidad}{tiempo}$$

$$F = m * \frac{dv}{dt} = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$




*La aceleración es la segunda derivada de la posición*

Entonces la fórmula de trabajo la definimos como:

$$\boldsymbol{Trabajo = w = F * \Delta x}$$

**¿Qué es el trabajo entonces?**
El trabajo es la cantidad de energía necesaria para realizar una acción
Por eso es que a muchas personas les da pereza trabajar porque al realizar esas acciones deben gastar energía.
Viendo esta definición podemos decir que para cada acción: hablar, comer, dormir, caminar, jugar, pestañar, etc… Necesitamos energía, está energía la sacamos de la comida, vegetales, carnes, frutas, hojas verdes.

**NOTA: El Trabajo que vemos en matemática Básica 2 Es debido a Fuerzas Variables, no constantes, como aprendemos a calcular en física básica.**

En básica dos vemos 4 tipos de acciones a analizar:

1. Trabajo al Bombear agua de un recipiente
2. Trabajo al mover un Resorte (La ley de Hooke)
3. Trabajo al levantar un objeto con peso variado
4. Trabajo cuando se nos da la función posición y se debe integrar

Estos cuatro casos de acciones que se realizan son los que vemos en nuestro curso de matemática

Su trabajo es encontrar el diferencial de trabajo, ya sea para cada acción y luego comprender

$$w = \int dw$$

## 1. Trabajo Al Bombear Agua De Un Recipiente

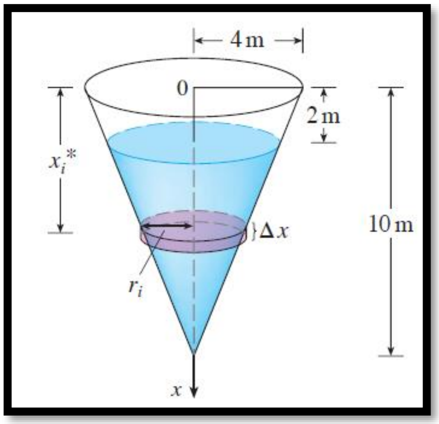



**Figura No. 56 Ejemplo del bombeo de un Fluido hacia afuera de un sólido especifico**

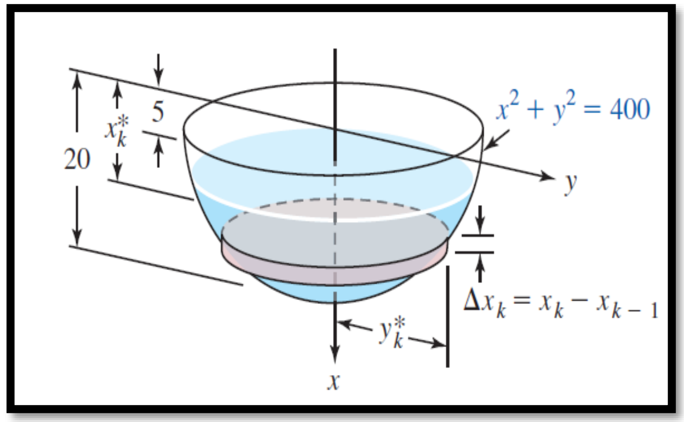



**Figura No. 57 Ejemplo del bombeo de un fluido hacia afuera de un solido formado al rotar una cierta función**

En ambas figuras No. 56 y No. 57 Podemos notar como se encontrarán esos fluidos al momento de bombear el agua hacia afuera
¿Cómo se resuelven?

La entrada para la resolución de estos problemas es la densidad del fluido a querer Sacar $(\boldsymbol{\rho})$
La densidad es la relación entre la masa y volumen $\rho = \frac{masa}{volumen}$

| Sistemas de medidas | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Sistema** | **Distancia** | **Tiempo** | **Masa** | **Volumen** | **Densidad** | **Gravedad** | **Peso** | **Peso Especifico** |
| **Internacional (S.I)** | metro | Segundo (seg) | Kilogramo (Kg) | metro cubico (m^3) | Kg/m^3 | 9.81 m/seg^2 | Newton (N) | N/m^3 |
| **Sistema cegesimal CGS** | centímetro | Segundo (seg) | gramo (gr) | centímetro cubico (cm^3) | gr/cm^3 | 981 cm/seg^2 | Dina | Dina/cm^3 |
| **Ingles** | Pie (Ft) | Segundo (seg) | slug | Pie Cubico (Ft^3) | Slug/Ft^3 | 32.2 ft/seg^2 | Libra (Lb) | Lb/Ft^3 |

**Cuidado:** Algunos ejercicios vienen con datos distintos en cuanto a sistemas de unidades, vea que está trabajando con las dimensionales correctas

Algunas veces nos dan el peso específico como dato ($\gamma = g\rho = Gravedad * Densidad$)

$$Trabajo = \frac{masa}{volumen} * Volumen * Gravedad * distancia$$

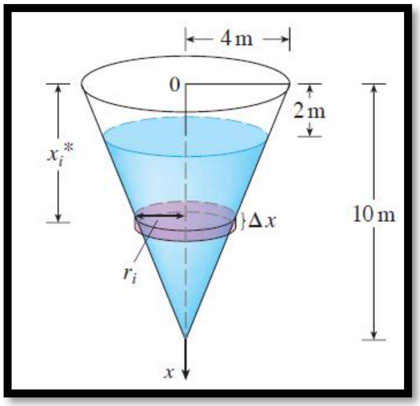
$$Trabajo = \frac{Kilogramo}{\cancel{m}^3} * \cancel{m}^3 * \frac{m}{seg^2} * m$$

$$Fuerza = Kilogramo * \frac{m}{seg^2} = Newton$$

$$Trabajo = Newton * m \; (Joule)$$

$$Trabajo = Libras * Pie$$

Esto es para saber de dónde sale la ecuación:



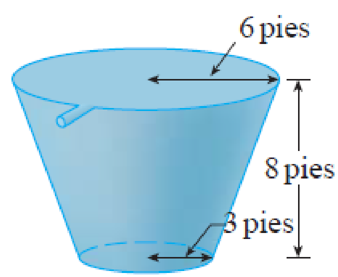

$$dw = \rho * g * dV * xi^*$$

$$xi^* \; Distancia \; a \; la \; que \; se \; debe \; sacar \; el \; diferencial$$

$$\boxed{w = \rho g \int_a^b xi^*(y) dV}$$

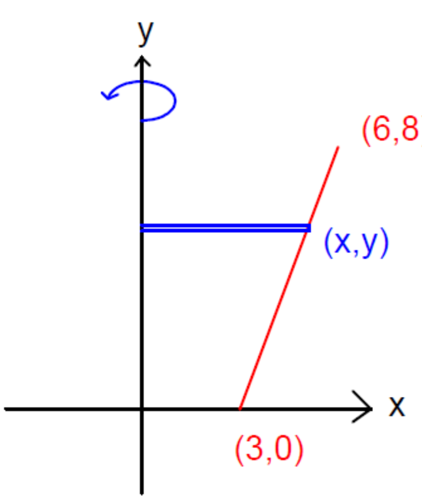
***Se debe dejar dV en terminos del eje y, sobre todo del diferncial dy***

*Ejemplo: El siguiente tanque está lleno con agua. Determine el trabajo necesario para que, mediante bombeo, el agua salga por el tubo de descarga*




Cono truncado

Resolviendo




El análisis que se hará es sobre la recta (en rojo) y se rotará formando Coordenando los puntos con los radios R (6 ft), r (3 ft) y h (8 ft) Entonces se **Rota** la recta para formar el cono truncado

**Vea que:** Como se está trabajando con el sistema Ingles utilizamos la Directamente el peso específico de: 62.5 $^{Lb}/_{ft^3}$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8}{3} \qquad m = Pendiente\ de\ la\ recta\ que\ rota\ respecto\ al\ eje\ y$$

$$y - 0 = \frac{8}{3}(x - 3)$$

$$y = \frac{8}{3}x - 8 \qquad despejando\ x\ en\ terminos\ de\ y \qquad x = \frac{3}{8}y + 3$$

$$dw = 62.5\frac{Lb}{ft^3} * dV * a \quad donde\ a = distancia\ a\ sacar\ el\ diferncial$$

$$dw = \underbrace{62.5}_{\rho} * \underbrace{\pi x^2 * dy}_{dV} * \underbrace{(8 - y)}_{xi}$$

$$el\ radio\ del\ diferncial\ del\ volumen\ es\ x$$

Nota: También se pudo relacionar variables por relación de triángulos

$$w = 62.5\pi \int_0^8 (8 - y)\left(\frac{3}{8}y + 3\right)^2 dy$$

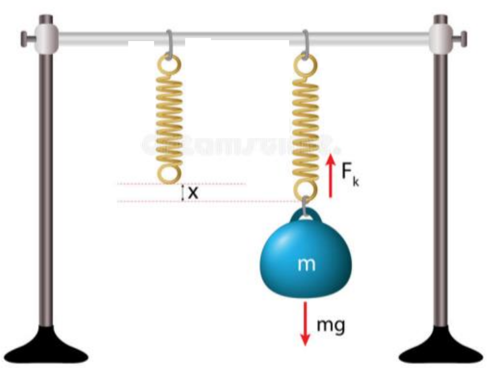
$$w = 62.5\pi * \left(72y - \frac{9}{256}y^4 - \frac{3}{8}y^3 + \frac{9}{2}y^2\right)\Big|_0^8$$

$$w = 62.5\pi * 528 = 33{,}000\pi\ Lb - Ft$$

$$w = 103{,}672.56\ Lb - Ft$$

$$w = 1.04 * 10^5\ Lb - Ft$$

## 2. Trabajo Al Mover Un Resorte (Ley De Hooke)




Lo que describe la ley de Hooke es que al tener inicialmente un Resorte cualquiera y aplicarle una carga de masa m el resorte Mismo opondrá una fuerza $F_k$ de oposición. Esta misma fuerza Es proporcional a la elongación y a la constante propia del resorte

$$F_k = K * \Delta x$$

$$F_k = f(x) = kx$$

Donde: $K = Constante\ propia\ del\ resorte$

$\Delta x = Elongación$

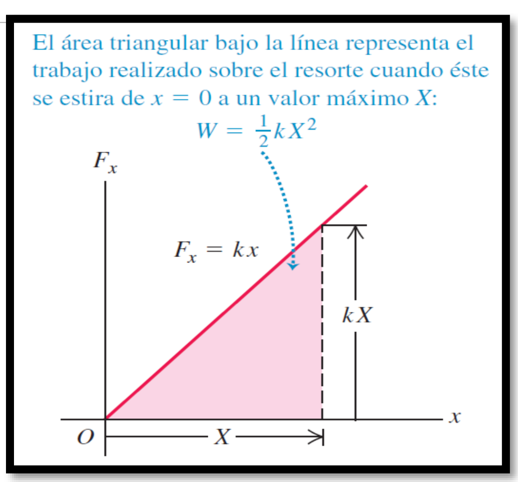



Figura No. 58 obtenida de la física de Zemansky

$$w = Trabajo = Fuerza * Distancia$$

$$dw = F_k * \Delta x = kxdx$$

$$w = \int_{x_1}^{x_2} kxdx = k\frac{x^2}{2}\Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$w = k\frac{x_2^{\ 2}}{2} - k\frac{x_1^{\ 2}}{2}$$

**Esto es lo que se conoce como energía Elástica**

$x_2 = distancia\ de\ punto\ a\ calcular\ menos\ el\ tamaño\ del\ resorte$

$x_1 = distancia\ de\ punto\ a\ calcular\ menos\ el\ tamaño\ del\ resorte$

*Ejemplo: Suponga que se necesitan 2 Joule de trabajo para estirar un resorte desde su longitud natural de 30 cm hasta una longitud de 42 cm.*

*a) ¿Cuánto trabajo se requiere para estirarlo desde 35 hasta 40 cm?*

*b) ¿Cuánto más allá de su longitud natural, una fuerza de 30 N mantendrá el resorte estirado?*

## Resolviendo el inciso a)

$$w = \frac{1}{2}kx^2$$

$$el\ dato\ dice\ que\ se\ estira\ de\ 30\ cm\ a\ 42\ cm\ entonces\ la\ elongación = 12cm$$

$$2\ Nm = \frac{1}{2} * k\left(12cm * \frac{1m}{100\ cm}\right)^2 \qquad Despejando\ para\ K$$

$$\frac{4\ N\ m}{\frac{9}{625}m^2} = k \qquad entonces\ k = \frac{2500}{9}\ {}^{N}/_{m}\ (277.78\ N/m)$$

$$w = k\frac{{x_2}^2}{2} - k\frac{{x_1}^2}{2}$$

$$w = \frac{1}{2}k({x_2}^2 - {x_1}^2) = \frac{1}{2} * \frac{2500}{9}((40cm - 30cm)^2 - (35cm - 30cm)^2)$$

$$pasar\ las\ elongaciones\ a\ metro$$

$$w = \frac{1250}{9}\left[\left(\frac{1}{10}\right)^2 - \left(\frac{1}{20}\right)^2\right]$$

$$w = \frac{25}{24} = 1.042\ J$$

$$w = 1.042\ J$$

## Resolviendo el inciso b)

En teoría solo se nos pide encontrar la elongación del resorte al aplicar una fuerza de 30 N

$$F = K * x$$

$$\frac{F}{K} = x$$

$$\frac{30\ N}{\frac{2500}{9}\frac{N}{m}} = x$$

$$0.108\ m = x$$

$$10.8\ cm = x$$

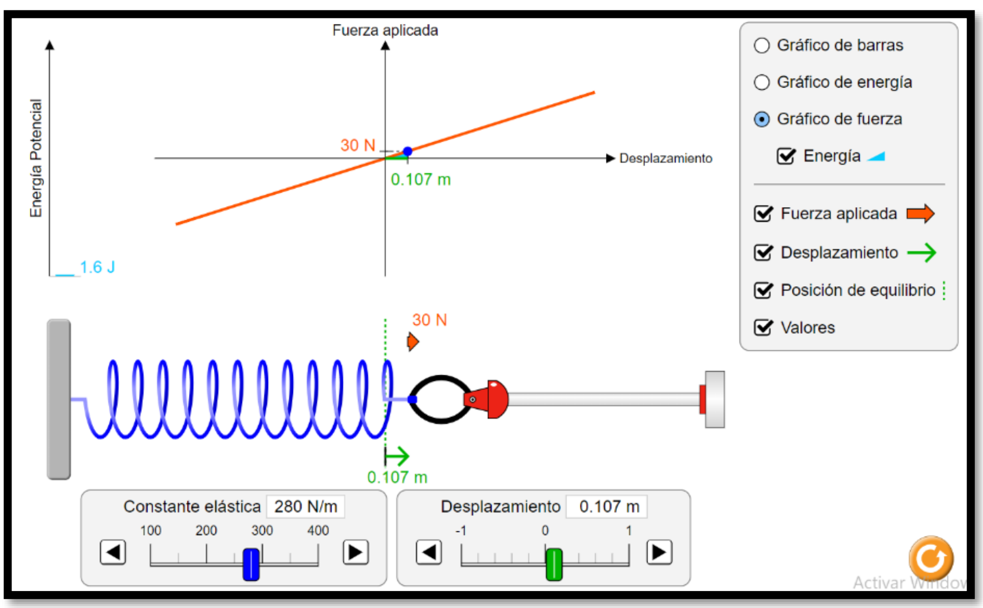



**Figura No. 59 Comprobando datos con el Software PHET**

### 3. Trabajo al levantar un objeto con peso variado

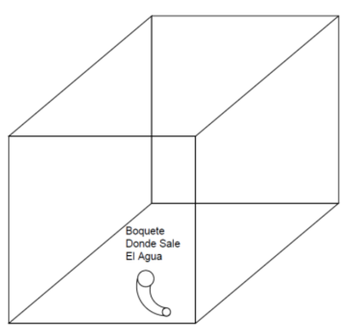
Imagínese que está sacando agua de un pozo con una cubeta y una cuerda, a medida que usted comienza a subir esa cubeta notará que cada vez que usted da un tirón el peso que está elevando disminuye. Cada vez que el peso disminuye el trabajo también lo hace, pero como la fuerza es variable el mismo trabajo es variable.

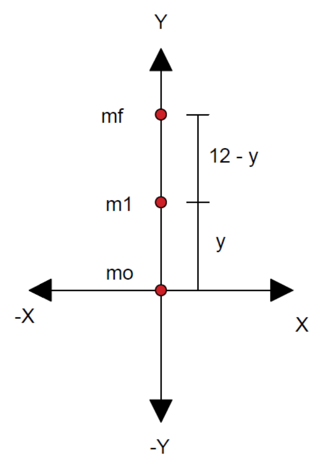
Como el Trabajo varía a medida que usted sube la cuerda con el peso de la cubeta su función es encontrar el trabajo total para subir todo eso de un punto “a” a un punto “b”

- En algunas ocasiones el peso de la cuerda varia
- En algunas ocasiones el peso de la cubeta u otro objeto que se esté levantando también varia

Su análisis matemático lo tendrá que utilizar muchísimo acá saber cómo encontrar las funciones que dejen todo en función del eje y (eje vertical), sobre todo el peso, lo complicado es encontrar una función ($Fuerza\ en\ función\ del\ eje\ y = f(y)$).

***Ejemplo:*** *Un cubo de 10 Kg, con un agujero, se sube desde el suelo hasta una altura de 12 m con rapidez constante por medio de una soga que pesa 0.8 kg/m. Al principio, el cubo contiene 36 Kg de agua, pero el agua se sale con rapidez constante y termina de salirse justo cuando el cubo llega a los 12 m de altura. ¿Cuánto trabajo se realizó?*




Acá el reto está en dejar la fuerza (gravedad * masa) en términos del eje y

$w = fuerza * Distancia$

$$masa\ inicial = masa\ cubo + masa\ agua\ inicial$$
$$masa\ inicial = 10\ kg + 36\ kg$$

$m(y) = masa\ inicial + masa\ de\ la\ soga - masa\ del\ agua\ que\ sale\ del\ boquete$
$m(y) = 46 + 0.8(12 - y) - Py$
Aquí necesitamos encontrar P, para ello vemos el dato que dice que en la parte final el agua ha terminado de salirse $[\mathrm{m}(12) = 10]$

$10 = 46 + 0.8(12 - 12) - P(12)$

$$P = \frac{-36}{-12} = 3$$

Entonces la función masa será:

$$m(y) = 46 + 0.8(12) - 0.8y - 3y$$

$$m(y) = 55.6 - 3.8y$$

Ahora analizando el trabajo diremos que:
La distancia será un $dy$ (pequeño diferencial de y)
$dw = g * m(y) * dy$
$dw = 9.81 * (55.6 - 3.8y) * dy$
$w = 9.81 \int_0^{12} (55.6 - 3.8y)dy$
$w = 9.81 * \frac{1968}{5}$ $\quad$ $w = 3861.216\ Joules\ (J)$

4. **Trabajo cuando se nos da la función posición y se debe integrar**

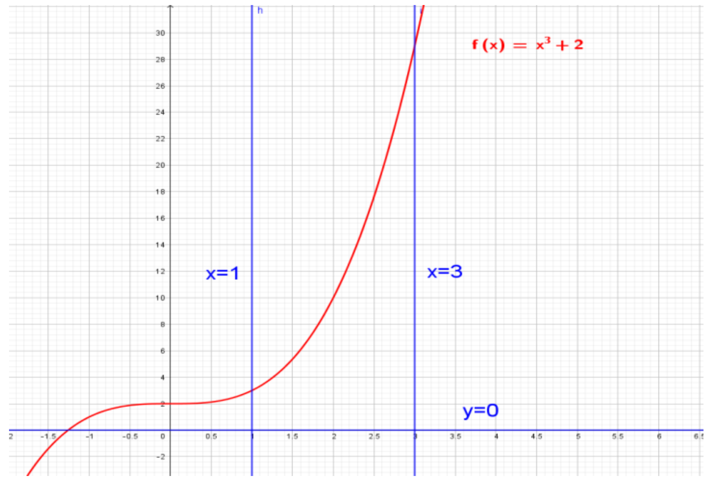
Esta parte del trabajo es la más fácil, ya que generalmente se da la función $(y = f(x) = función\ fuerza\ en\ terminos\ de\ la\ posición)$ y lo único que se debe hacer es integrarla con respecto a un diferencial de posición (dx)

*Ejemplo: Cuando una partícula se encuentra a una distancia x metros del origen, una fuerza de $x^3 + 3x$ Newton actúa sobre ella. ¿Cuánto trabajo se efectúa al moverla desde $x = 2$ hasta $x = 5$?*

$$w = Fuerza * Distancia$$
$$Como\ la\ fuerza\ está\ en\ terminos\ de\ x\ podemos\ decir:$$
$$dw = (x^3 + 3x)\ dx$$
$$w = \int_2^5 (x^3 + 3x)\ dx = \frac{735}{4}\ N * m$$
$$w = 183.75\ J$$

## Ejercicios Resueltos

**1.** Encuentre el área encerrada por las funciones: $y = x^3 + 2$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 3$ por suma de Riemann




$a = 1 \qquad b = 3$

$f(x_i^*) = x_i^{*3} + 2 \qquad \Delta x = \dfrac{3-1}{n} = \dfrac{2}{n}$

$x_i^* = a + i\Delta x = 1 + \dfrac{2i}{n} = \dfrac{n+2i}{n}$

$x_i^* = \dfrac{n+2i}{n}$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^{*3} + 2) * \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{n+2i}{n}\right)^3 + 2\right) * \frac{2}{n}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3n^3 + 6n^2 i + 12ni^2 + 8i^3}{n^3}\right) \textit{Debemos utilizar propiedades de series}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^4} \sum_{i=1}^{n} 3n^3 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^4} \sum_{i=1}^{n} 6n^2 i + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^4} \sum_{i=1}^{n} 12ni^2 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^4} \sum_{i=1}^{n} 8i^3$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} 3 + \lim_{n\to\infty} \frac{12}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i + \lim_{n\to\infty} \frac{24}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 + \lim_{n\to\infty} \frac{16}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} * 3n + \lim_{n\to\infty} \frac{12}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{24}{n^3} * \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \lim_{n\to\infty} \frac{16}{n^4} \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} 6 + \lim_{n\to\infty} \frac{6(n+1)}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)(2n+1)}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)^2}{n^2}$$

$$A = 6 + \lim_{n\to\infty} \frac{6n+6}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{8n^2 + 12n + 4}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + 8n + 4}{n^2}$$

$A = 6 + 6 + 8 + 4$

$A = 24\, u^2\ (\textit{Unidades Cuadradas})$

**2.** Resuelva la siguiente integral $\int \frac{1-cos(x)}{1+cos(x)} dx$

$$\int \frac{1-cos(x)}{1+cos(x)} dx \;=\; \int \frac{1-cos(x)}{1+cos(x)} * \frac{1-cos(x)}{1-cos(x)} dx \;=\; \int \frac{\left(1-cos(x)\right)^2}{1-cos^2(x)} dx \;=$$

$$\int \frac{1-2cos(x)+cos^2(x)}{sen^2(x)} dx \;=\; \int \frac{1+cos^2(x)}{sen^2(x)} dx - 2\int \frac{cos(x)}{sen^2(x)} dx$$

$$\int \frac{sen^2(x)+cos^2(x)+cos^2(x)}{sen^2(x)} dx - 2\int \frac{cos(x)}{sen^2(x)} dx =$$

$$\int \frac{sen^2(x)+2cos^2(x)}{sen^2(x)} dx - 2\int \frac{cos(x)}{sen^2(x)} dx = \int 1 + \frac{2cos^2(x)}{sen^2(x)} dx - 2\int \frac{\cos(x)}{sen^2(x)} dx$$

*Resolviendo por aparte:*

Sabiendo que: $1 + cot^2(x) = csc^2(x)$ y que $\frac{d(cotx)}{dx} = -csc^2(x)$

$$\int 1 + \frac{2\cos^2(\mathrm{x})}{\mathrm{sen}^2(\mathrm{x})} \mathrm{dx} = \mathrm{x} + 2\int \cot^2(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \mathrm{x} + 2\int \csc^2(\mathrm{x}) - 1$$

$$\mathrm{x} + 2(-cotx - x) = -2cotx - x$$

*Resolviendo por aparte:*

$$2\int \frac{\cos(x)}{sen^2(x)} dx \quad sustituyendo \quad u = sen(x) \quad entonces \quad \frac{du}{dx} = cos(x)$$

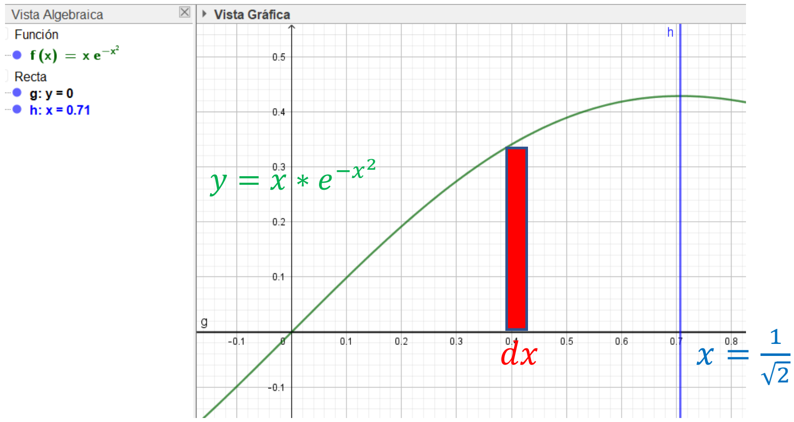
$$2\int \frac{cos(x)}{u^2} * \frac{du}{cos(x)} = 2\int \frac{du}{u^2} = \frac{-2}{u} = \frac{-2}{sen(x)}$$

*Uniendo ambas integrales*

$$\int \frac{1-cos(x)}{1+cos(x)} dx \;=\; -\,2cotx - x - \frac{2}{sen(x)} + C$$

**3.** Encuentre el área encerrada por la curva: $y = x * e^{-x^2}$; $y = 0$ ;
$x = valor\ crítico\ del\ primer\ cuadrante$

$$y = x * e^{-x^2}$$
$$y' = e^{-x^2} + x * -2xe^{-x^2}$$
$$y' = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(1-2x^2) \qquad y' = 0\ para\ puntos\ críticos$$
$$e^{-x^2}(1-2x^2) = 0$$
$$\frac{1}{2} = x^2 \quad entonces \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad pero\ es\ el\ primer\ cuadrante, entonces \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$




$$A = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x * e^{-x^2}\,dx$$

*Resolviendo por aparte*:

$$\int x * e^{-x^2}\,dx \qquad u = -x^2 \qquad \frac{du}{dx} = -2x \qquad entonces \quad \frac{du}{-2x} = dx$$

*Sustituyendo*

$$\int x * e^{u}\frac{du}{-2x} = \frac{-1}{2}\int e^{u}du = -\frac{1}{2}e^{u} = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

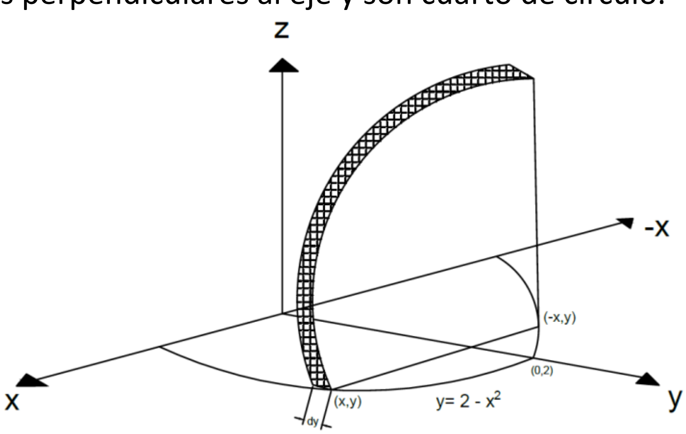
Entonces:

$$A = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x * e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$A = -\frac{1}{2}\left[e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - e^{-0^2}\right] = -\frac{1}{2}\left[e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - e^{-0^2}\right] = -\frac{1}{2}\left[e^{-\frac{1}{2}} - 1\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} - 1\right]$$

$$A = 0.196734\,u^2\ (Unidades\ Cuadradas)$$

**4.** La base de S es la región encerrada por la parábola $y = 2 - x^2$ y el eje x. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son cuarto de circulo.




$$r = x + x = 2x \qquad dv = Area\ Transversal * Altura = \frac{\pi r^2}{4}dy$$

$$r = 2\sqrt{2-y} \qquad dv = \frac{\pi\left(2\sqrt{2-y}\right)^2}{4}dy = \frac{4\pi(2-y)}{4}\,dy$$

$$dv = \pi(2-y)dy$$

$$v = \int dv$$

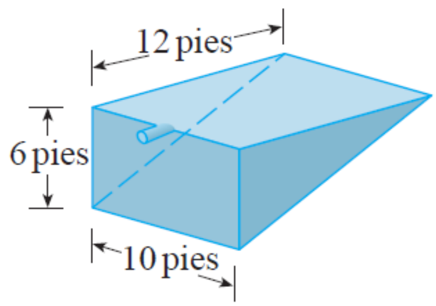
$$v = \pi \int_0^2 (2-y)dy$$

$$v = \pi\left(2y - \frac{y^2}{2}\right)\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}$$

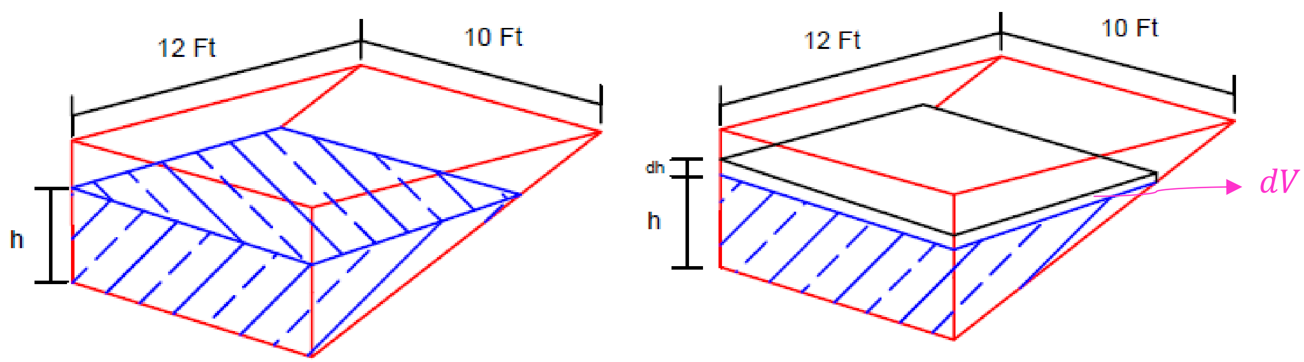
$$v = \pi\left[2(2) - \frac{2^2}{2}\right]$$

$$v = 2\pi$$

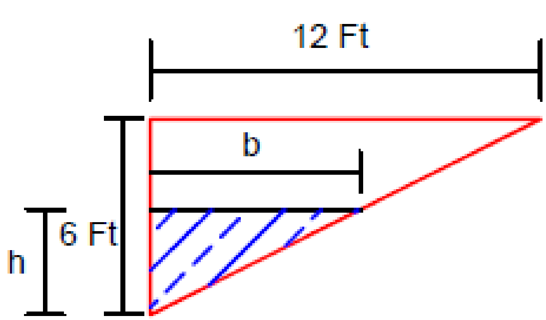
**5.** El siguiente tanque contiene agua en su totalidad. Determine el trabajo necesario para que, mediante bombero, el agua salga por el tubo de descarga.




Resolviendo




Una vez ingresado el diferencial de volumen (lo de rosado) procedemos a relacionar el ancho con la altura $b(h) = f(h)$ $\;$ *esto en la parte del área transversal*




Por relación de triángulos decimos:

$$\frac{b}{12} = \frac{h}{6} \quad entonces \;\; b = 2h$$

$$dV = largo * ancho * alto$$

$$dV = b * 10 * dh$$

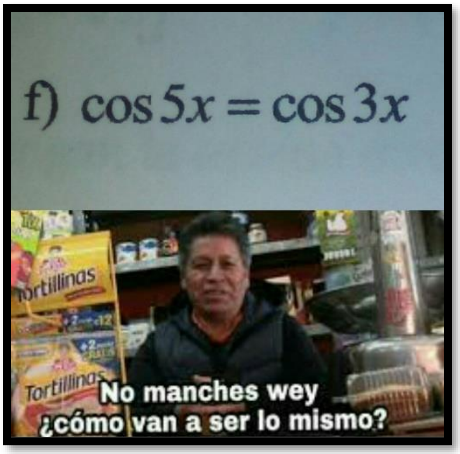
$$dV = 20h\, dh$$

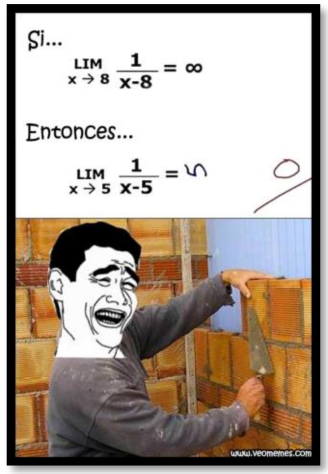
$$dw = \rho * g * dV * a \quad donde\ a = distancia\ del\ diferencial\ a\ la\ salida$$
$$dw = \rho g * 20h\ dh * (6 - h)$$
$$dw = 20\rho g * h(6 - h)\ dh$$

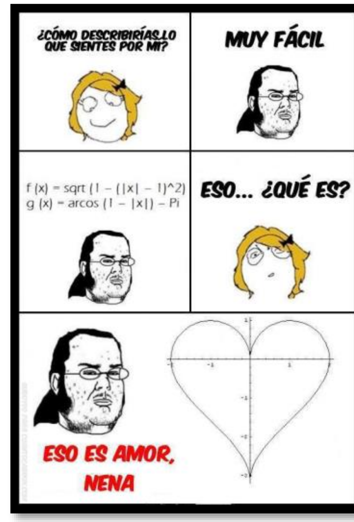
Como estamos trabajando con el sistema ingles debe recordar que: $\rho g = 62.5\ Lb/Ft^3$

$$w = 20\rho g \int_0^6 h(6 - h)\ dh = 20\rho g * 36 = 720\rho g = 720 * 62.5$$
$$w = 45{,}000\ Lb - Ft$$

# Reflexiones De La Matemática




Recuerde que la matemática debe tener lógica

No siempre es lo que parece

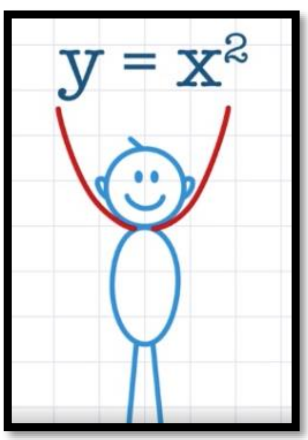
La matemática Puede Ser Romántica



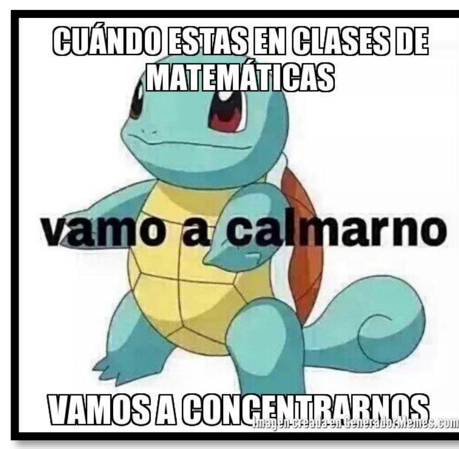

Debe Leer antes de cada clase para comprender mejor

Con ella nos facilitamos la vida

La teoría Es Fundamental Acá







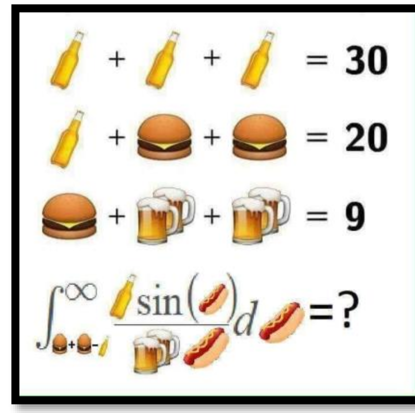

Se encuentran Presentes Siempre

Nos acerca a nuestros Seres queridos

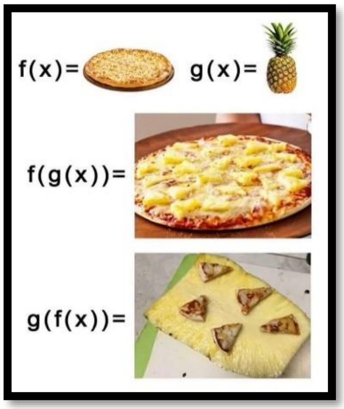
Siempre Guarde la calma y concéntrese

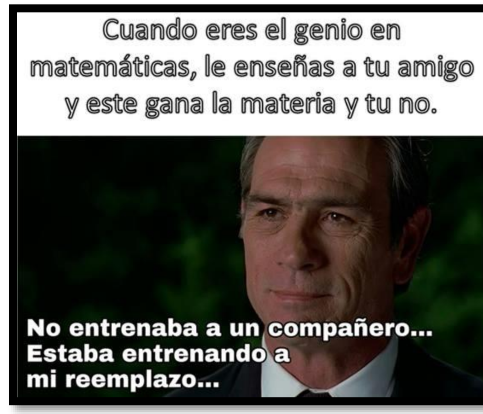

Lea bien el Enunciado antes de trabajar


No se atenga con lo poco que se ve en clase

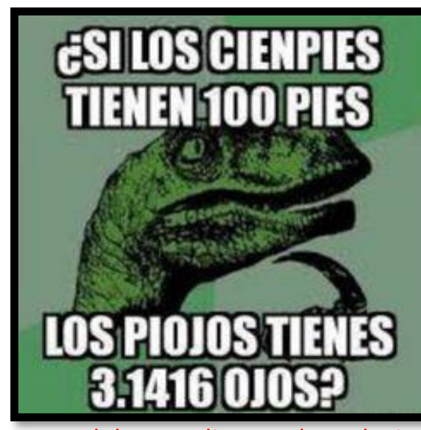



La Matemática Es Un lenguaje que Rige las ciencias La Seguridad En Los Cálculos Se puede enseñar de muchas formas

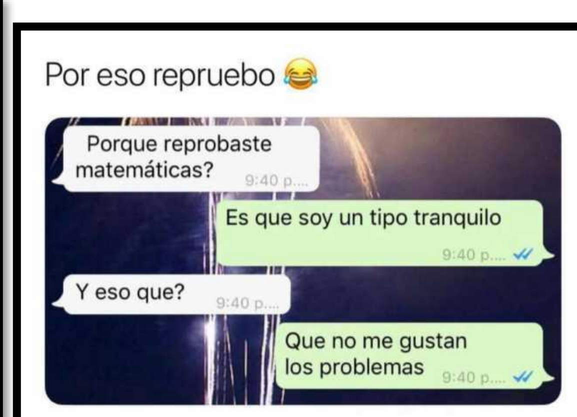





La Aplicamos incluso en la comida Debe ir un paso a la vez Debemos apoyar a quien lo necesite




A veces No se obtiene lo que se espera Con la matemática hacemos amistades No se deben realizar malas relaciones




La humildad vale mucho en la matemática y el compartir el conocimiento. Debemos afrontar los problemas. No huir de ellos

## Introducción

El estudiante cuando lleva un curso de matemática no comprende exactamente como poder reflejar lo aprendido en la vida real o como es que se aplica en un momento dado, esto mismo es debido a la falta de experimentación y ejecución de simulaciones en un software.

Por eso el interés en el laboratorio de la matemática básica 2 es hacer que comprenda bien la parte de la **aplicación** y para ello en este documento se deja establecido las practicas a realizar en el Laboratorio en el transcurso del semestre, dejando establecidas fechas y descripciones para que el estudiante esté preparado y pueda tener tiempo de alistar sus materiales.

## Link De Descarga para GeoGebra

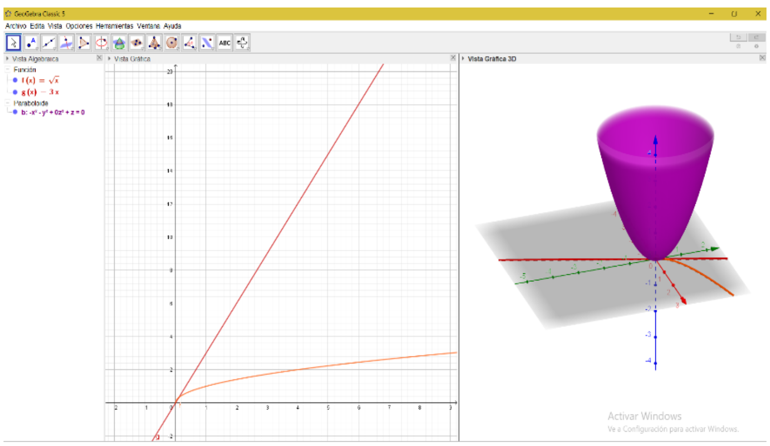
https://www.geogebra.org/download?lang=es

## Tabla De Prácticas A Realizar

| Prácticas Por Computadora | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **No.** | **Tema** | **Sub Tema** | **Práctica** | **Descripción** | **Fecha** |
| 1 | Límites | Repaso matemática básica 1, Introducción al cálculo a través de Límites y Aplicaciones de los límites | Gráfica de polígonos, ecuaciones, Desigualdades, gráfica de funciones, límite de una función, límites trigonométricos, continuidad, límites infinitos, límites al infinito, La derivada como límite y reglas de derivación. | Con los programas Microsoft Mathematics, GeoGebra y Maple 18 se hará el análisis de cada tema y resolución de ejercicios | Martes 14/08/2018 |
| 2 | Derivadas | Aplicaciones | Derivadas Generales (regla de la cadena, derivación implícita, derivadas logarítmicas), razones de cambio, optimización, trazo de gráficas. | Con los programas Microsoft Mathematics, GeoGebra y Maple 18 se hará el análisis de cada tema y resolución de ejercicios | Jueves 20/09/2018 |

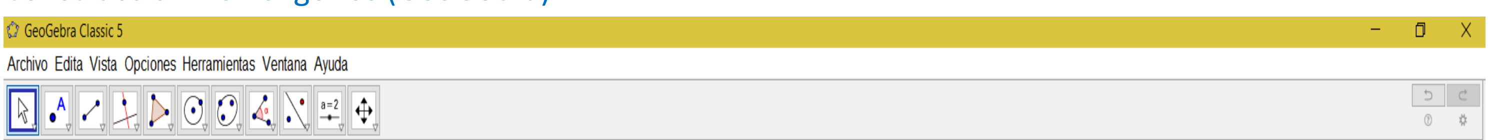
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | Integrales | Teoremas y Aplicaciones | La suma de Riemann, integrales definidas, integrales indefinidas, regla de la sustitución, área entre curvas, volúmenes y trabajo | Con el programa Maple_18 se generarán series para la resolución de los problemas de área, se resolverán paso a paso integrales indefinidas, se generarán volúmenes al momento de rotar una función respecto a un eje, se plantearán integrales definidas de área y trabajo para resolver | Martes 15/10/2018 |

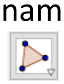
## Repaso



**Gráfica en 2 Dimensiones** **Gráfica en 3 Dimensiones** **Dibujo de Polígonos irregulares a través de Puntos coordenados y de segmentos**

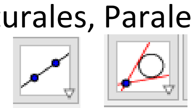
## Construcción De Polígonos (GeoGebra)

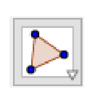


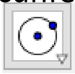
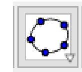
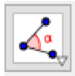

1. Primero ingresamos o coordenamos los puntos en el espacio.
2. Luego nos vamos a Polígono 
3. Se arma el Polígono de punto a punto a través de segmentos, como es polígono cerrado se debe dar click incluso en el punto de inicio de donde inicio.
4. El programa nos entre áreas y también nos da distancias de segmentos

### ¿Qué Podemos Hacer en GeoGebra?

- Líneas (Naturales, Paralelas, Perpendiculares, Mediatriz, Bisectriz, Tangentes y Ajuste Lineales.)



- Polígonos (Polígono, Polígono Regular, Polígono Rígido y Polígono vectorial) 

- Circunferencias (Circunferencia, Circunferencia (Centro, Punto), Compás, Circunferencia por Tres Puntos, Semicircunferencia, Arco de Circunferencia, Arco de tres puntos, Sector Circular, Sector de Tres Puntos) 
- Elipse (Elipse, Hipérbola, Parábola, Cónica por cinco puntos (Crea hipérbolas con 5 puntos)) 
- Ángulo (Ángulo, Ángulo dada su amplitud, Distancia o longitud, Área, Pendiente, Lista, Relación, Inspección de funciones) 
- Texto
- Hoja De Cálculo (Trabajar como Excel)

## Ecuaciones

1. No me interesa la vista Algebraica y la Vista gráfica
2. Nos vamos a vista + Cálculo simbólico
3. En la barra de entrada ingresamos la ecuación, recuerde activar el teclado ahí mismo en vista
4. Luego que hemos ingresado la ecuación le damos click en conservar la entrada ✓
(Nos sirve para ver que ingresamos correctamente la ecuación)
5. Le damos Click sobre la ecuación obtenida al conservarla y nos vamos a Resuelve x=
6. Inmediatamente en la sección 2 o la siguiente nos tira el valor de x (También se puede con otras variables)

*Ejemplo:*

Cálculo Simbólico (CAS)

| | |
|---|---|
| 1 | ((x+3)(2x^2+11x-10)/(x^2))-((2x^3+2x^2-10x)/(x^2+4x))=0 <br> ✓ $(x+3)\cdot\frac{2x^2+11x-10}{x^2}-\frac{2x^3+2x^2-10x}{x^2+4x}=0$ |
| 2 | (x + 3) (2x² + 11x - 10) / x² - (2x³ + 2x² - 10x) / (x² + 4x) = 0 <br> Resuelve: $\{x = 0.78\}$ |

### Sistema de ecuaciones

1. Se debe trabajar con las llaves para que el programa nos reconozca el lenguaje como sistema de ecuaciones
2. Se habilita el teclado virtual, luego se va a la tecla Ship+ la tecla {
3. Nuevamente click en conservar la entrada ✓
4. Click sobre la ecuación obtenida al conservarla y nos vamos a resuelve =x
5. De inmediato aparecerán las soluciones del sistema.

*Ejemplo:*

**Resolver el sistema de ecuaciones y compruebe su solución.**

$$2x-3y=2$$
$$2x+3y-z=14$$
$$x+4y-3z=7$$

| | |
|---|---|
| 3 | {2x - 3y = 2, 2x + 3y - z = 14, x + 4y - 3z = 7} <br> ✓ $\{2x-3y=2, 2x+3y-z=14, x+4y-3z=7\}$ |
| 4 | {2x - 3y = 2, 2x + 3y - z = 14, x + 4y - 3z = 7} <br> Resuelve: $\left\{\left\{x=\frac{23}{5}, y=\frac{12}{5}, z=\frac{12}{5}\right\}\right\}$ |

### Ecuación con Radicales

1. Se puede ingresar el signo del radical de dos maneras, o por la calculadora virtual o por el comando sqrt (raíces cuadradas)

2. Se introduce la ecuación indicada, donde los valores dentro del radical van en paréntesis.
3. Se conserva la entrada
4. Click en resuelve

*Ejemplo:*

**Resolver la siguiente ecuación con radicales.**

$$\sqrt{22x} + \sqrt{13x - 7} = 10$$

2 sqrt(22x)+sqrt(13x-7)=10

$\checkmark \quad \sqrt{22\,x} + \sqrt{13\,x - 7} = 10$

3 sqrt(22x) + sqrt(13x - 7) = 10

Resuelve: $\left\{ x = \frac{-20\,\sqrt{27214} + 3437}{81} \right\}$

NOTA: Si necesita una ecuación con un índice de raíz distinto, lo que debe hacer es introducirlo con paréntesis

1 (2x+1)^(1/3)-sqrt(x)=0

$\checkmark \quad (2\,x + 1)^{\frac{1}{3}} - \sqrt{x} = 0$

2 (2x + 1)^(1 / 3) - sqrt(x) = 0

Resuelve: $\{x = 4.86\}$

## Valor Absoluto

1. Cuando trabajamos con valor absoluto ingresamos el comando abs(la ecuación)
2. Los mismos pasos, al ingresar la ecuación se le da click en conserva la entrada
3. Click en la ecuación conservada
4. Click en resuelve

*Ejemplo:*

1 abs(3x^2+18x-5)=17

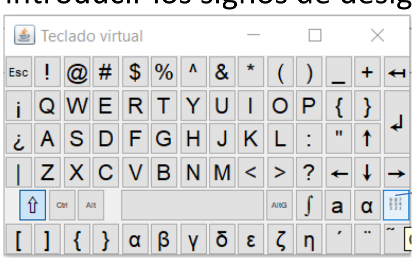
$\checkmark \quad \left|3\,x^2 + 18\,x - 5\right| = 17$

2 abs(3x² + 18x - 5) = 17

Resuelve: $\left\{ x = \frac{-7\,\sqrt{3} - 9}{3}, x = -\sqrt{5} - 3, x = \sqrt{5} - 3, x = \frac{7\,\sqrt{3} - 9}{3} \right\}$

## Desigualdades

1. Si es racional se debe ingresar por paréntesis el numerador y el denominador
2. Para introducir los signos de desigualdad se debe ir a la tabla virtual




Acá se busca los signos de desigualdad

3. Si es menor < no hay problema al igual que mayor >. Pero si es mayor igual ≥ o menor igual ≤ lo ingresamos de esta manera:
(menor igual <=) (mayor igual >=)
4. Se ingresa la desigualdad
5. Se conserva la entrada
6. Se resuelve

*Ejemplo:*

**Resuelva la siguiente inecuación y compruebe su solución:**

$$\frac{12x - 17}{12x + 16} \leq -11$$

1 (12x-17)/(12x+16)<=-11

$\checkmark \quad \frac{12\,x - 17}{12\,x + 16} \leq -11$

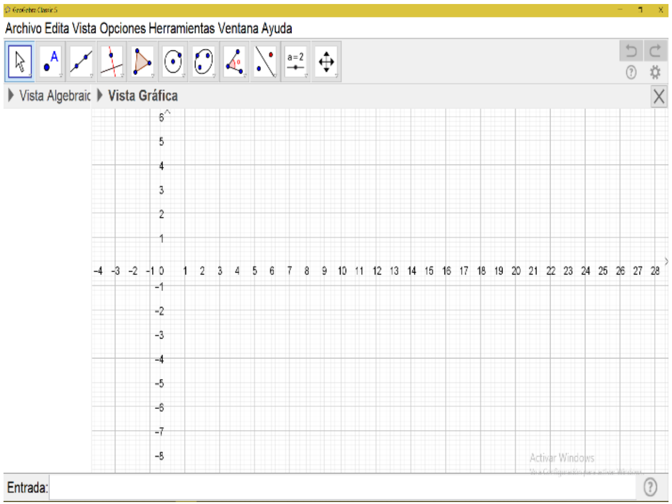
2 (12x - 17) / (12x + 16) ≤ -11

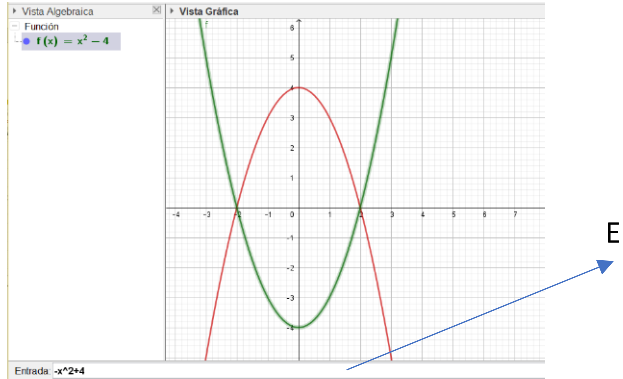
Resuelve: $\left\{ -\frac{4}{3} < x \leq -\frac{53}{48} \right\}$

## Funciones

Para el trazo de las gráficas solo debemos ingresar las funciones en el punto de entrada con su respectiva variable.

Nos auxiliamos bastante del teclado virtual

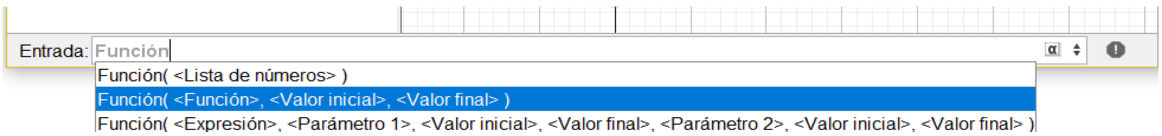



Entrada

### Función Por Partes

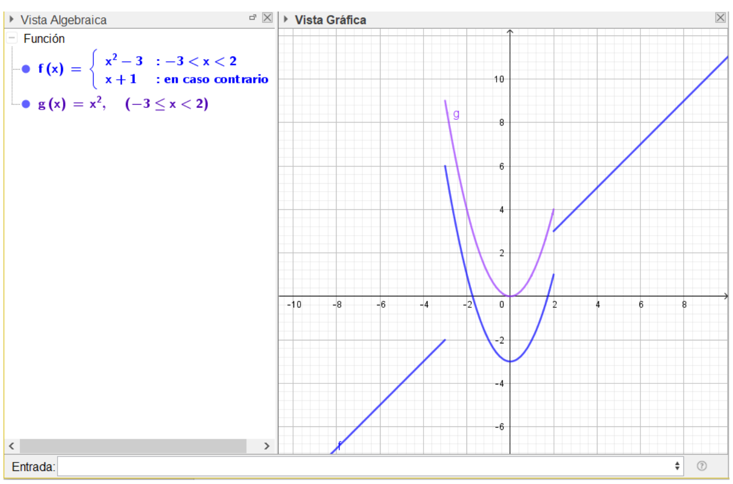
Se puede hacer de varias maneras. La primera manera es:




La segunda manera es la más exacta para las gráficas por partes:

Utilizando el comando “Si” que va a aceptar 3 argumentos.

1. La primera es una condición
2. El comportamiento si la condición se cumple
3. Como se comporta la función en caso de que no se cumpla la condición (Opcional)

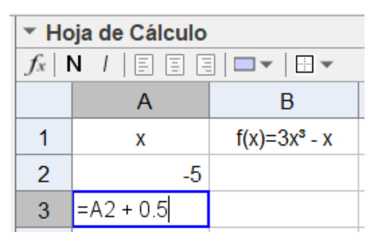



La gráfica morada es con las dos condiciones

La gráfica azul es con las 3 condiciones

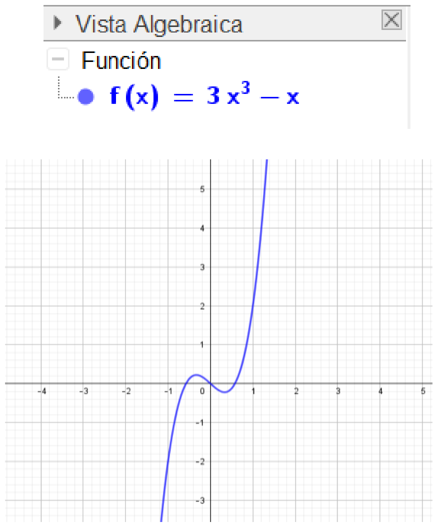
### Tabla De Valores Numéricos A Través De Una Función

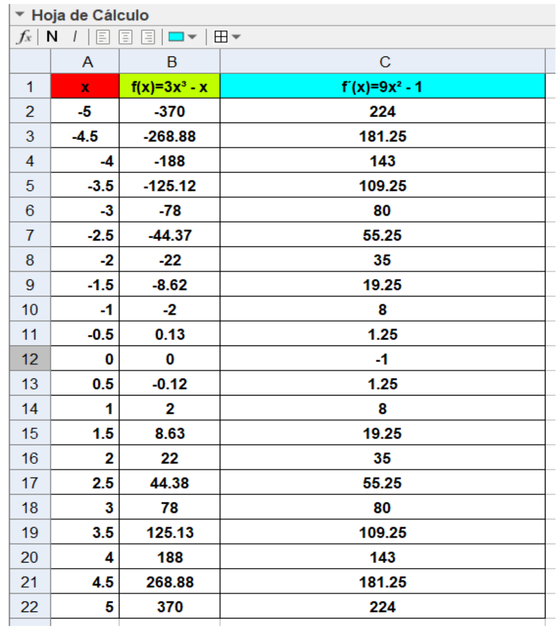
1. En la entrada ingresamos la función
2. Activamos la hoja de cálculo (Parecida a excel)
3. En la fila A se ingresa x, pero de la forma “x”
4. En la parte del Rango se ingresa "f(x)=" + f
5. Si se quisiera la derivada se ingresa “f´(x)=”+(Derivada(f))
6. Dependiendo del salto de ploteo colóquelo como si estuviera programando



7. Luego arrastre toda la fila hasta donde quiera plotear
8. Para el rango solo ingresa =f(A2) y lo arrastra hasta donde quiera el ploteo
9. Para la derivada se coloca =f’(A2)

*Ejemplo:*



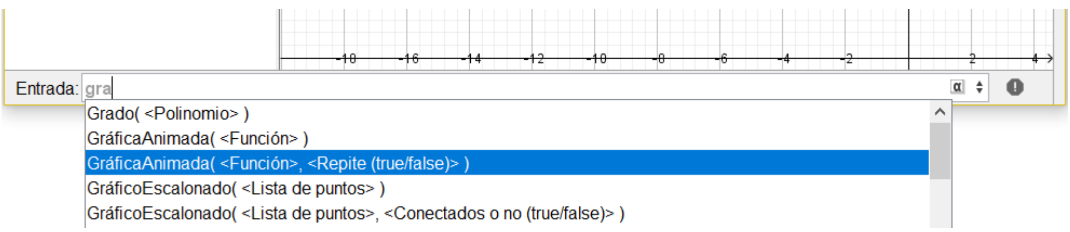




| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | x | f(x)=3x³ - x | f'(x)=9x² - 1 |
| 2 | -5 | -370 | 224 |
| 3 | -4.5 | -268.88 | 181.25 |
| 4 | -4 | -188 | 143 |
| 5 | -3.5 | -125.12 | 109.25 |
| 6 | -3 | -78 | 80 |
| 7 | -2.5 | -44.37 | 55.25 |
| 8 | -2 | -22 | 35 |
| 9 | -1.5 | -8.62 | 19.25 |
| 10 | -1 | -2 | 8 |
| 11 | -0.5 | 0.13 | 1.25 |
| 12 | 0 | 0 | -1 |
| 13 | 0.5 | -0.12 | 1.25 |
| 14 | 1 | 2 | 8 |
| 15 | 1.5 | 8.63 | 19.25 |
| 16 | 2 | 22 | 35 |
| 17 | 2.5 | 44.38 | 55.25 |
| 18 | 3 | 78 | 80 |
| 19 | 3.5 | 125.13 | 109.25 |
| 20 | 4 | 188 | 143 |
| 21 | 4.5 | 268.88 | 181.25 |
| 22 | 5 | 370 | 224 |

## Gráficas Animadas

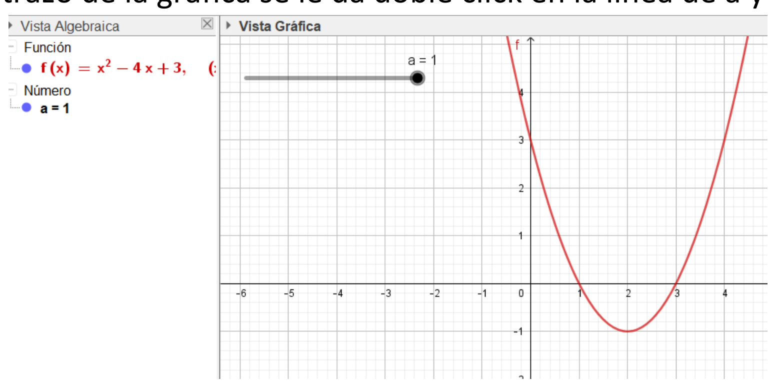
Se pueden crear gráficas en donde se vea el trazo animado de las funciones

- Gráficas que se repita el trazo de la función




En repite solo se coloca true para que se repisa y false si se quiere que se trace 1 sola ves

- Para modificar la velocidad del trazo de la gráfica se le da doble click en la línea de a y se modifica lo que sea necesario.




## Gráfica Mediante La Tabla De Valores

1. Abrimos la hoja de cálculo
2. En la fila donde estarán los valores de x escribimos en la celda A2 “x” y en la B2 “y”
3. Ingresamos los valores o coordenadas tanto en x como en y
4. Marcamos todos los valores ingresados con click izquierdo y luego presionamos click derecho y buscamos crea. Luego en Lista de puntos (Esto para que se coordenen directamente en la gráfica) → la

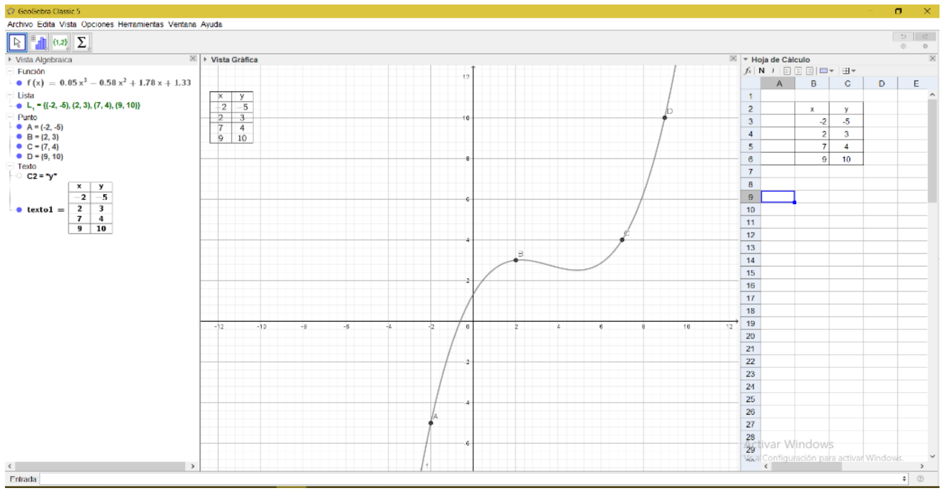
ventaja de esto es que: al modificar el punto en la hoja de cálculo inmediatamente se le modificará en la gráfica

5. Para unir esos puntos por gráfica podemos hacer:

- En la entrada escribir   Entrada: Polinomio( <Lista de puntos> )   Entrada: Polinomio(A,B,C,D)

  De esta manera se irán uniendo los puntos con aproximaciones

*Ejemplo:*




La segunda forma sirve para obtener un polinomio de determinado grado deseado

1. Luego de tener los puntos coordenados en la gráfica mediante a la hoja de cálculo, en la entrada ingresar

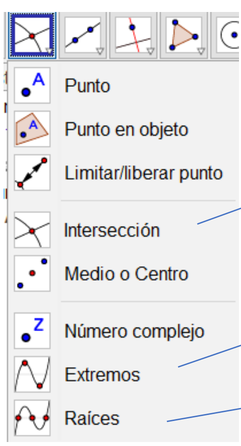
2. En lista de puntos se ingresan los puntos:   Entrada: AjustePolinómico(A,B,C,D, 2)

Entrada: AjustePolinómico( <Lista de puntos>, <Grado del polinomio> )

Nota: Acá no necesariamente coincidirán los puntos con la función)

## Intersección De Dos Funciones, Extremos Y Raíces.

Nos sirve para la intersección de dos funciones, ya sea entre ellas o la intersección con los ejes x/y

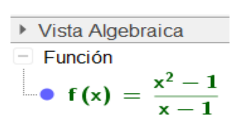



Lo que nos sirve. Solo click en la función y click en donde se hará el análisis

Para encontrar máximos y mínimos

Intersección de la función con el eje x

## Límites




1. Debe ingresar primero la forma algebraica de la función, como f(x)= …

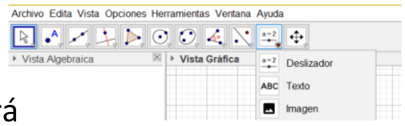
2. Una vez ingresada la función se coloca:   Entrada: LímiteDerecha(f(x), 1)

Eso se hace para no estar ingresando la función

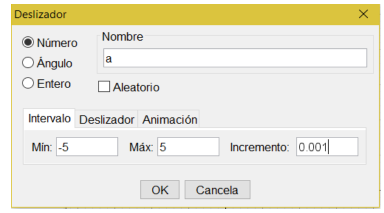
3. Se puede evaluar por la izquierda, por la derecha o directamente el límite

## Continuidad

Se pueden ingresar funciones por partes para que el programa encuentre si es continua en algun punto.




1. Primero se ingresa un deslizador
(mínimo y máximo es de donde a donde oscilará
El valor de a)
Incremento es que tan sensible será el valor de incremento

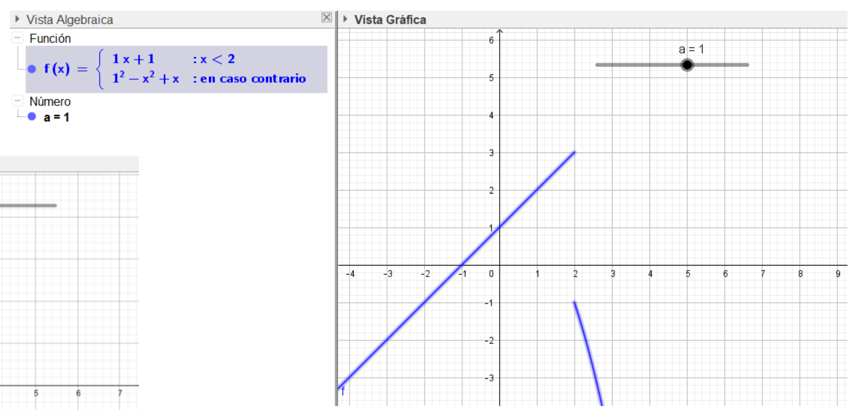


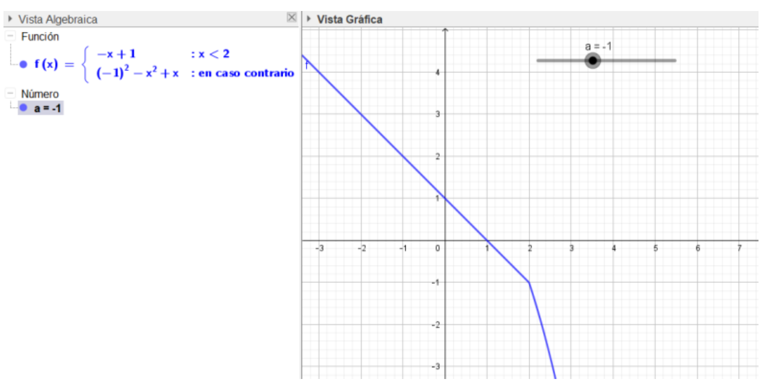

2. Generalmente se deja de esta menera el deslizador o lo puede cambiar

3. Ingresa la función de ambas partes separadas por una coma haciendo que se unan

*Ejemplo: Determine el valor de a de tal manera que la función sea continua en 2*

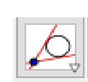
$$f(x) = \begin{cases} ax + 1 & si\ x < 2 \\ a^2 - x^2 + x & si\ x \geq 2 \end{cases}$$


Esto consiste en mover el deslizador a modo que se toquen (en el ejemplo a= -1)

## Rectas tangentes a una función

1. Introduzca la función
2. Introduzca las coordenadas del punto donde pasa la recta tangente
(Si el punto pertenece a la función, introduzca las mismas coordenadas del punto)
3. Busque la 4ta pestaña donde se encuentran rectas a una curva. Buscamos la recta tangente 
4. Click en el punto + Click en la función
5. De una vez le dará la ecuación de la recta tangente

# Formulario Matemática Básica 2

## Límites

### Límites

$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad si\ y\ sólo\ si \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+}$

### Límites Al Infinito (Asíntotas Horizontales)

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \ o \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

### Límites Infinitos (Asíntotas Verticales)

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

### Continuidad

Una función f es continua

en un número x=a si

$a\ es\ parte\ del\ Dominio$

$\lim_{x\to a} f(x) = Existe$

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

### Definición Precisa

sea **f** una función definida sobre

un Intervalo $(a, \infty)$. Entonces

$\lim_{x\to a} f(x) = L$

significa que para toda $\in > 0$

existe un correspondiente número N tal que

Si $x > N$, entonces $|f(x) - L| < \in$

### Límites Trigonométricos

$\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{senx} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$

### Otras Identidades

$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{\ln(x)} = 1$

## Derivadas

Definición La recta tangente a la curva y = f(x) en el punto P(a, f(a)) es la recta que pasa por P con pendiente

$m = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ Para la exactitud hacemos que $x - a = h\ y\ como\ x \to a\ entonces\ h \to 0$

$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

### Identidades De Derivación

**1.** $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$

**2.** $\frac{d}{dx} sen(x) = \cos(x)$

**3.** $\frac{d}{dx} \cos(x) = -sen(x)$

**4.** $\frac{d}{dx} sen^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

**5.** $\frac{d}{dx} cot^{-1}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

**6.** $\frac{d}{dx} \tan(x) = sec^2(x)$

**7.** $\frac{d}{dx} \csc(x) = -\csc(x) * \cot(x)$

**8.** $\frac{d}{dx} sec(x) = sec(x) * tan(x)$

**9.** $\frac{d}{dx} cos^{-1}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

**10.** $\frac{d}{dx} sec^{-1}(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

**11.** $\frac{d}{dx} \cot(x) = -csc^2(x)$

**12.** $\frac{d}{dx} a^x = a^x Ln(a)$

**13.** $\frac{d}{dx} log_a(x) = \frac{1}{xLn(a)}$

**14.** $\frac{d}{dx} tan^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$

**15.** $\frac{d}{dx} Ln(x) = \frac{1}{x}$

**16.** $\frac{d}{dx} C = 0$

**17.** $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

### Regla Del Producto

$$\frac{d}{dx}[f(x) * g(x)] = g(x) * \frac{d}{dx} f(x) + f(x) * \frac{d}{dx} g(x)$$

### Regla Del Cociente

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x) * \frac{d}{dx} f(x) - f(x)\frac{d}{dx} g(x)}{[g(x)]^2}$$

### Regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

### Optimización

$y = f(x)$

$\frac{dy}{dx} = 0\ para\ encontrar\ x$

$que\ haga\ el\ valor\ máximo\ o\ minimo$

### Método De Newton Raphson

$y = f(x) = 0$

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{df(x_n)}{dx}} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

### Pasos Para El Trazo de Gráficas

1- Dominio
2- Intersección
3- Simetría
4- Asíntotas
5- Intervalos donde es Creciente/Decreciente
6- Valores Máximos/Mínimos
7- Concavidad
8- Trazar la gráfica

# Integrales

## Antiderivadas

| | Identidades | |
|---|---|---|
| | Antiderivada F(x) | Función f(x) |
| 1 | $cf(x)$ | $cF(x)$ |
| 2 | $f(x)+g(x)$ | $F(x)+G(x)$ |
| 3 | $x^n \quad (n \neq 1)$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ |
| 4 | $\frac{1}{x}$ | $\ln(x)$ |
| 5 | $e^x$ | $e^x$ |
| 6 | $\cos(x)$ | $\text{sen}(x)$ |
| 7 | $\text{sen}\,(x)$ | $-\cos(x)$ |

| | Identidades | |
|---|---|---|
| | Antiderivada F(x) | Función f(x) |
| 1 | $sec^2(x)$ | $\tan(x)$ |
| 2 | $\sec(x) * \tan(x)$ | $\sec(x)$ |
| 3 | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $sen^{-1}x$ |
| 4 | $\frac{1}{1+x^2}$ | $tan^{-1}x$ |
| 5 | $\cosh(x)$ | $senh\ (x)$ |
| 6 | $senh\ (x)$ | $-\cosh(x)$ |
| 7 | $\ln(x)$ | $x\ln(x)-x$ |

## El Problema De la Distancia

$$d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(ti^*)\Delta t\,;\ f(t) = función\ velocidad$$

## La Suma De Riemann

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(xi^*)\Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad xi^* = a + i\Delta x$$

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn \quad donde\ c\ es\ una\ constante \qquad \sum_{i=1}^{n} c * ai = c\sum_{i=1}^{n} ai$$

$$\sum_{i=1}^{n} ai \pm bi = \sum_{i=1}^{n} ai \pm \sum_{i=1}^{n} bi$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n+1)}{30}$$

## Teorema Fundamental Del Cálculo

**Teorema fundamental del cálculo, parte 1** Si $f$ es continua sobre $[a, b]$, entonces la función $g$ definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

es continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre $(a, b)$, y $g'(x) = f(x)$.

**Teorema fundamental del cálculo, parte 2** Si $f$ es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde $F$ es una antiderivada de $f$; es decir, una función tal que $F' = f$.

## Tabla Integrales Indefinidas

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \text{sen}\,x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \text{sen}\,x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{sen}^{-1} x + C$$

$$\int \text{senh}\,x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \text{senh}\,x + C$$

## Área Entre Curvas

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$$

## Volúmenes

### Método de discos

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \qquad V = \pi \int_a^b (R(y))^2\,dy$$

$$V = \pi \int_a^b \left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right] dx \qquad V = \pi \int_c^d [R(y)^2 - r(y)^2]dy$$

### Método de Cascarones Cilíndricos

$$dV = 2\pi r h\,dr \qquad V = 2\pi \int_a^b x\,f(x)dx$$

## Trabajo

$$w = fuerza * Distancia$$

### Bombeo de Agua

$$w = \rho g \int_a^b xi^* dV \quad donde\ xi^*(y);\ dV(y)$$

$xi^*(y) = distancia\ a\ sacar\ el\ diferencial$

### Ley De Hooke

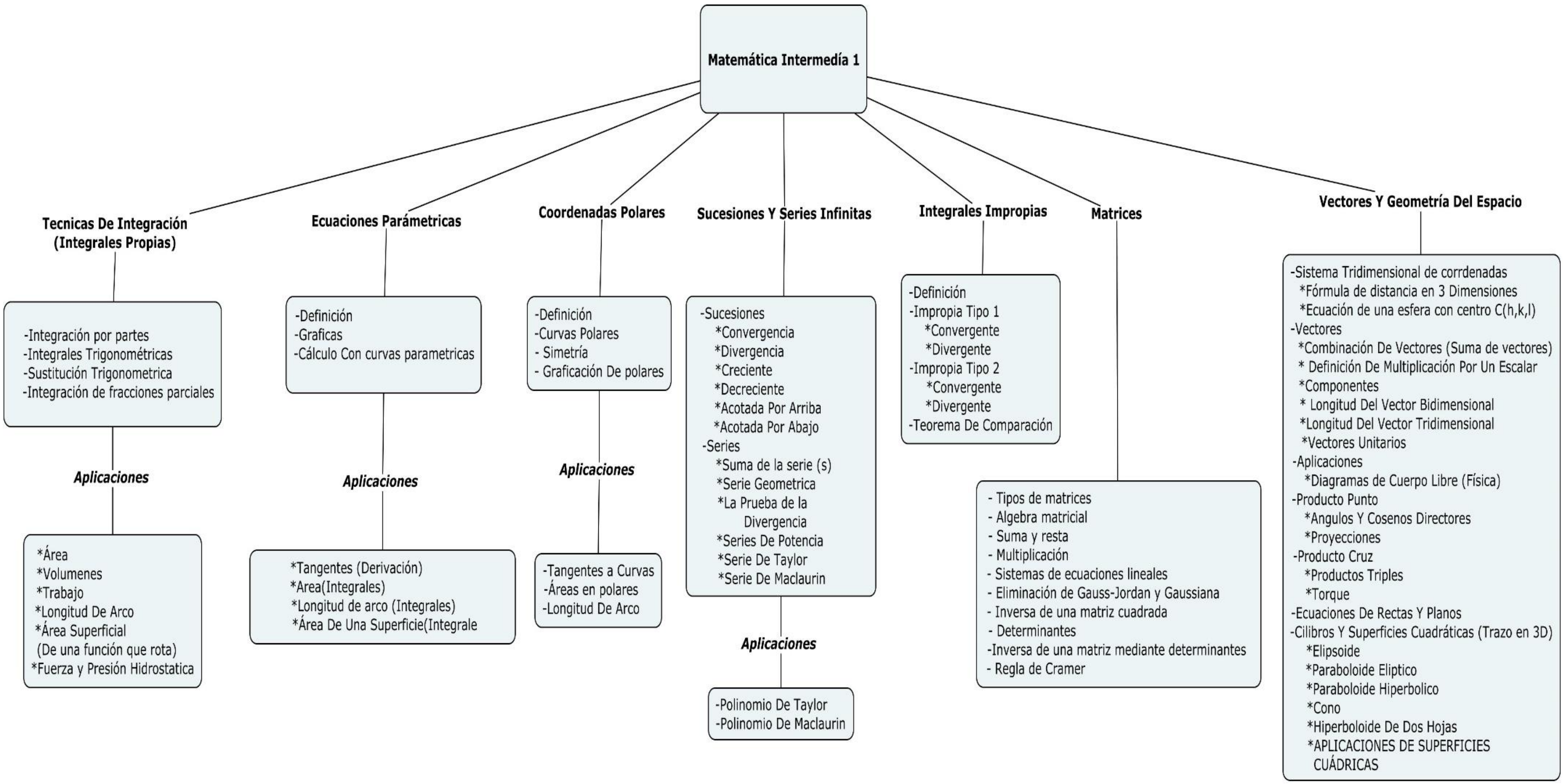
$$F = K\Delta x\ ;\ w = k\frac{{x_2}^2}{2} - k\frac{{x_1}^2}{2}$$

### Trabajo de una Fuerza Variable

$$w = \int_a^b F(x)dx$$

$F(x) = Fuerza\ en\ terminos\ de\ la\ posición$

# Contenido Matemática Intermedia 1 (Mate 3 y Mate 4)



## AGRADECIMIENTO


- **Ingeniero. Humberto Osvaldo Hernández Sac**
  **Coordinador Del Departamento De Matemática**
  **Y Área Común**
  Por Revisar y Aprobar el Manual para la mejora del estudiantado de Ingeniería CUNOC

- $\mathbf{Dr^1.Ing^2}$**. Eddie Omar Flores Aceituno**
  **Profesor e Investigador De Ingeniería**
  Por ser Revisor constante del Manual y aportar sugerencias para la mejora y el entendimiento del mismo.

- **Ingeniero. Luis Ernesto Aguilar**
  **Profesor De Ingeniería**
  Por Revisar el Manual, así como el de aportar sugerencias para la mejora del mismo.

- **Perito. Lourdes Catalina Chach Chan**
  Por aportar Ideas al Manual y ser Revisara constante del proyecto

- **Lic. Francisco Rolando Velásquez Velásquez**
  Por su apoyo como padre y Enseñanzas en el Lenguaje de la matemática

- **Perito. Brayan José Velásquez García**
  Por el diseño de la Portada y Contraportada

Este manual intenta explicar los temas de la matemática básica 2 de una manera simple, concreta y con un lenguaje más común haciéndolo parecer como si un docente particular estuviera dándole clases privadas, además que dentro de el mismo manual encontrará ejercicios resueltos por cada tema para una mejor comprensión. Dicho lo anterior debo recalcar en esta parte que el motivo de este Manual no es el de sustituir a un libro de Cálculo utilizado en ingeniería sino más bien el de reforzar la enseñanza que estos mismos libros ofrecen, servir como un material de apoyo para el estudiante de ingeniería.

USAC
TRICENTENARIA
Universidad de San Carlos de Guatemala

Un Manual de:
- Brayan Velásquez -

Manual Matemática
**Básica 2**