USAC
TRICENTENARIA
Universidad de San Carlos de Guatemala

Hablemos de MATEMÁTICA INTERMEDIA I

Un Manual de
Brayan Velásquez

DIRECTORIO GENERAL

Autor: Ingeniero. Brayan Miguel Velásquez García

Institución: Universidad De San Carlos De Guatemala
Centro Universitario De Occidente

Ubicación De La Institución: Calle Rodolfo Roble 29-99 Zona 1 Quetzaltenango. Guatemala

Correo Electrónico: ingenieria.cunoc@usac.edu.gt

Directorio Telefónico: 78730000

Extensión Director De División: 2255

Extensión Secretaria de División: 2267

Director de División: Ingeniero. Edelman Candido Monzon Lopez

Coordinador de Área Común: Ingeniero. Jorge Leonel Rivera Mendez

Fecha: 18 de octubre del año 2024

PRÓLOGO

En mi experiencia durante el tiempo como docente titular del área de matemáticas de la División de Ciencias de la Ingeniería del Centro Universitario de Occidente, he observado que muchos estudiantes y auxiliares se enfocan solo en cumplir con sus obligaciones académicas, dejando de lado la oportunidad de plasmar sus conocimientos y experiencias en textos como el que ha desarrollado Brayan Velásquez con "Hablemos de Matemática Intermedia 1".

Considero importante contar con materiales locales que se ajusten a nuestra realidad, ya que los textos extranjeros muchas veces presentan ejemplos que no reflejan nuestra vida cotidiana. Aprecio el interés de Brayan por ofrecer explicaciones claras y concisas, y por incluir ejemplos prácticos que van de lo sencillo a lo complejo, preparando así a los estudiantes para sus exámenes y para su desarrollo profesional en matemáticas.

Celebro su dedicación al crear este recurso accesible y gratuito, que estoy seguro será de gran ayuda para la formación de futuros ingenieros. Espero que quienes lo utilicen reconozcan el valor de este esfuerzo y aprovechen al máximo su contenido.

Atentamente,
Jorge Leonel Rivera
Docente de Matemáticas
División de Ciencias de la Ingeniería
CUNOC-USAC

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
CENTRO UNIVERSITARIO DE OCCIDENTE
COORDINADOR
AREA COMUN DE INGENIERIA

INTRODUCCIÓN

La matemática es el único lenguaje certero para predecir fenómenos naturales. Hoy en día se utiliza para saber si una casa resistirá bajo ciertas cargas, si un cohete de masa dada podrá escapar de la órbita con una curvatura, si triplicando el salario de trabajadores de una empresa cuadriplicará las ganancias o generará pérdida, entre otras profecías. El primero en hacer una profecía certera fue Edmund Halley (matemático y astrónomo), quien se auxilió de observaciones pasadas sobre cometas, Halley fue el primero en descubrir que el cometa de 1531, 1607 y 1682 era el mismo cometa que regresaba cada 76 años a través de una trayectoria elíptica. No solo predijo la fecha de avistamiento, sino que predijo su trayectoria, utilizando la ley universal gravitacional de Isaac Newton.

La matemática es el lenguaje que une o enlaza generaciones de científicos. No distingue fronteras, razas, ni creencias. Tan solo requiere del deseo de aprender y mejorar día con día.

El ingeniero(a) es aquella persona profesional que en base a sus conocimientos científicos aplica su ingenio para mejorar la calidad de vida de la sociedad, a través de la invención de la tecnología en todos sus campos. Hacer tecnología es aplicar conocimientos científicos y para obtener conocimientos científicos se necesita estudiar física, química, estadística entre otras ciencias que a su vez se expresan a través del lenguaje matemático.

En el lenguaje matemático se debe aprender un tema importante llamado cálculo. La introducción al cálculo es el tema de límites para luego aterrizar en el tema de derivadas, lo cual se refiere a cálculo diferencial. Posterior a ello se ingresa a un tema llamado cálculo integral qué no es más que la suma de infinitos diferenciales. En la matemática Básica 2 se aprende integral definida, integral indefinida y el método de sustitución para la resolución de integrales. Por último, se aprende las aplicaciones de la integral que son: áreas, volúmenes y se le denomina cálculo integral.

El contenido de este texto se enfoca en la **Matemática Intermedia 1,** para ampliar los conocimientos de cálculo, dándole seguimiento a la matemática Básica 2, donde se introduce una nueva forma de abordar los problemas de la vida real, siendo está en tres dimensiones.

También nos ayudará a realizar integrales en cursos como Física 2 (Teoría Electromagnética Clásica) en donde integrará: Campo Eléctrico, Flujo Eléctrico, Diferencias de Potencial y Diferencia de Campo Magnético. También le servirá, querido(a) estudiante, en matemática Intermedia 3 (mate 6) para la resolución de ecuaciones diferenciales. Aunque se puede decir que para casi toda la carrera estará viendo integrales. Realmente es un tema muy importante para el futuro profesional de ingeniería. Se aprovecha este medo para invitarlos a que estudien a conciencia y con mucha dedicación la matemática intermedia 1, en:

1. Integrales
2. Integrales Impropias
3. Ecuaciones Paramétricas
4. Coordenadas Polares
5. Sucesiones y Series
6. Algebra Matricial
7. Vectores y Geometría Del Espacio.

El propósito de este manual es fortalecer el aprendizaje de la Matemática en estudiantes que ya están sumergidos en el bello tema de cálculo, pero de una manera diferente a la de los libros normalmente utilizados. No intenta ser el único libro por utilizar por el estudiante, sino más bien busca ser un libro de complemento para el estudiante. Si no comprende algo del libro utilizado por el docente, entonces refiérase a este texto para comprender el tema de otra forma diferente y como si un amigo se lo explicara.

Este manual contiene siete capítulos**,** para mayor comprensión le sugiero que vea el mapa conceptual de la matemática intermedia 1, en cada capítulo encontrará temas y subtemas con tres o más ejercicios resueltos respectivamente por cada subtema, comenzando con un ejercicio básico y conceptual, para luego encontrarse con un ejercicio intermedio y finalizar con un ejercicio considerado difícil o de nivel reto.

 Cualquier consulta o contacto se puede hacer al correo:

“ID Y ENSEÑAD A TODOS”

brayan_velasquez@cunoc.edu.gt

ÍNDICE

DIRECTORIO GENERAL **3**

INTRODUCCIÓN **5**

COMENTARIO **13**

¿Por Qué Fallan Los Estudiantes En Matemática? 13

¿Cómo estudiar matemática? 17

AGRADECIMIENTO A: **19**

MAPAS CONCEPTUALES **21**

Mapa conceptual matemática básica 2 21

Mapa conceptual matemática intermedia 1 22

Formulario Matemática Básica 2 .... **23**

Formulario Matemática Intermedia 1 .... **25**

1. TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN **31**

1.1. Integración por partes 32

1.2. Integrales trigonométricas 36

1.2.1 Estrategia para la evaluación de $senmx * cosnx\ dx$ 39

1.2.2 Estrategia para la evaluación de $tanmx * secnx\ dx$ 41

1.2.3 Estrategia para la evaluación de $sen(Ax) * cos(Bx)\ dx$ 44

Estrategia para la evaluación de $sen(Ax) * sen(Bx)\ dx$ 44

Estrategia para la evaluación de $cos(Ax) * cos(Bx)\ dx$ 44

1.3. Integrales por sustitución trigonométrica 47

1.4. Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales 53

1.4.1. Racionalización de sustituciones 68

1.5. Estrategias para la integración 70

1.6. APLICACIONES DE LA INTEGRAL 77

1.6.1. Longitud de arco 78

1.6.2. Área superficial 84

A. Rotación Respecto x 85

B. Rotación Respecto y 86

1.6.3. Fuerza y presión hidrostática 94

1.6.4. Centros de masa y centros de áreas 109

A. Masa de placas en dos dimensiones 109

B. Momentos 109

Primer momento de masa de una lámina plana (para centro de masa) 110

Primer momento de área (Para centro de área) 113

C. Centro de Masa 115

Centro de masa en una dimensión 115

Centro de masa en dos dimensiones 116

Centro de masa de una lámina plana 118

D. Centro de Área 123

2. INTEGRALES IMPROPIAS **129**

2.1. Integral tipo 1. Intervalos infinitos (Caso No. 1) 131

2.2. Integral tipo 2. Integrando discontinuos (Caso No. 2) 136

2.3. Teorema de comparación 142

3. ECUACIONES PARAMÉTRICAS **147**

3.1. DEFINICIÓN DE PARAMETRO 148

3.2. APLICACIÓN DE ECUACIONES PARAMÉTRICAS 157

3.2.1. Tangentes 158

3.2.2. Áreas Entre Curvas 162

3.2.3. Longitud de arco 167

3.2.4. Área de una superficie a través de rotación 170

4. COORDENADAS POLARES **175**

4.1. Curvas polares 178

¿Cómo se trazan las gráficas polares? 180

4.2. Tangentes a curvas polares 189

4.3. APLICACIÓN DE ECUACIONES POLARES 193

4.3.1. Área encerrada 194

4.3.2. Longitud de arco 202

5. SUCESIONES Y SERIES **209**

5.1. Sucesiones 210

5.1.1. Secuencias 211

5.1.2. Convergencia y divergencia en las sucesiones 212

5.1.3. Sucesiones monótonas y acotadas 215

A. Sucesión creciente o decreciente 215

B. Sucesión acotada 217

5.1.4. Fórmula de una sucesión a partir de datos 219

A. Sucesiones aritméticas 219

B. Sucesiones geométricas 220

C. Sucesiones cuadráticas 221

D. Sucesiones alternadas 222

E. Sucesiones oscilantes 223
F. Sucesiones de fracciones 224
G. Sucesiones factoriales 226
5.2. Series........ 228
Un concepto real de series 228
5.2.1. Serie convergente y serie divergente 230
5.2.2. Otros métodos de solución de series 234
A. Series geométricas 234
B. Series geométricas inversa 235
5.2.3. Series de potencia 237
Convergencia 237
5.3. APLICACIÓN DE SUCESIONES Y SERIES........ 241
5.3.1. Polinomio de Taylor 242
5.3.2. Polinomio de Maclaurin 246
5.3.3. Obtención de otras identidades de series utilizando la derivada e integral 250
6. ÁLGEBRA MATRICIAL 253
6.1. Matrices 254
6.1.1. Datos de una matriz 254
6.1.2. Dimensión de una matriz 255
6.1.3. Tipos de matrices 255
6.1.4. Operación entre matrices 256
A. Suma de matrices 257
B. Resta de matrices 257
C. Multiplicación de una constante por una matriz 258
D. Multiplicación de una matriz con una matriz 259
6.2. Determinantes........ 262
6.2.1. Determinante de matriz 2X2 263
6.2.2. Determinante de matriz 3X3 263
A. Método por menores y cofactores 264
B. Regla de Sarrus........ 266
6.2.3. Determinante de matriz 4 X 4........ 268
A. Método por menores y cofactores 268
B. Método de Gauss Jordán........ 271
Matriz triangular superior 271
Matriz triangular inferior 271

6.2.4. Propiedades de los determinantes 277
A. Traspuesta 279
6.3. Matriz inversa y matriz identidad 281
6.3.1. Matriz identidad 281
6.3.2. Matriz inversa 282
A. Método de Gauss Jordan matriz 2X2 282
B. Método de Gauss Jordan matriz 3 X 3 284
6.4. APLICACIÓN DE ÁLGEBRA MATRICIAL 289
6.4.1. Aplicación de suma, resta y multiplicación entre matrices 290
6.4.2. Solución de ecuaciones lineales de varias variables 292
A. Método de Gauss Jordan 292
B. Método de ecuación matricial Ax = B 297
Balanceo de ecuaciones químicas 299
6.4.3. Conceptualización final de matrices 313
7. VECTORES Y GEOMETRÍA DEL ESPACIO 315
7.1. Sistema de coordenadas tridimensional 316
7.2. Distancia en tres dimensiones 322
7.3. Vectores 324
7.3.1. Datos de un vector 326
7.3.2. Vector unitario 328
7.3.3. Operación entre vectores 330
A. Suma y resta de vectores 330
Método de las componentes 331
B. Multiplicación entre una constante y un vector 334
C. Multiplicación entre vectores 335
Producto punto (producto escalar) 335
Producto cruz (producto vectorial) 339
7.4. Ecuaciones de rectas 344
7.5. Ecuaciones de planos 351
7.5.1. Distancia entre un punto y un plano 357
7.6. Cilindros y superficies cuádricas 360
7.6.1. Cilindros 360
7.6.2. Superficies cuádricas 363
7.7. APLICACIÓN DE VECTORES Y GEOMETRÍA EN EL ESPACIO 371
7.7.1. Producto entre un vector y un escalar 372

A. Primera ley de Newton 372
Equilibrio estático 372
B. Segunda ley de Newton 380
7.7.2. Producto punto (producto escalar) 382
A. Trabajo 382
B. Ángulos y cosenos directores 385
7.7.3. Producto cruz (producto vectorial) 388
A. Torque o momento 389
Bibliografía 397

COMENTARIO

¿Por Qué Fallan Los Estudiantes En Matemática?

Este es un tema que ha preocupado a muchos docentes e incluso los ha llevado a crear especialidades de maestría o doctorado. Han creado métodos como la didáctica de la matemática, que a su vez crea métodos alternativos como:

- Método de Algoritmo Basado en Números (ABN).
- Estándares de Núcleo Común.
- Método Singapur.
  Entre otros.

También se ha analizado este problema desde el punto de vista médico, aplicando la Neurociencia al campo de la matemática para entender el porqué del fallo y como mejorar los métodos de la enseñanza y del aprendizaje.

Como puede darse cuenta querido(a) estudiante este tema es muy basto, donde se pueden llenar bibliotecas con estudios y estadísticas, para analizar los factores o situaciones que influyen en el aprendizaje de la matemática. Ahora, por favor permítame comentarle mi experiencia y mi punto de vista en las fallas del aprendizaje.

A lo largo de mi experiencia con la matemática como estudiante y luego como docente, la misma matemática me ha permitido comprender procesos claves para el entendimiento de esta. Se han identificado errores con estudiantes, que cursan grados de primaria, básico, diversificado y de licenciatura, tanto para escuelas públicas como privadas.

Los errores más comunes que he notado es la falta de entendimiento de:

1. ¿Qué es matemática?

Este error es el más común que he podido ver en muchos estudiantes, incluso con estudiantes que ya llevan matemáticas avanzadas como cálculo. Preguntándoles ¿qué es matemática?, muchas veces ellos no saben que contestar.

¿por qué es importante comprender esto?

- Porque entonces no saben ni lo que están haciendo, los ponen a hacer un ejercicio cualquiera y como máquinas lo resolverán, pero sin comenzar a tener criterio propio.
- Solo estudian para ganar un examen, porque el pensum pide que para llevar cursos de área profesional deben ganar siete u ocho matemáticas, pero es como ir navegando sin rumbo.
- Por no saber que es matemática y la importancia que tiene, empiezan a pensar que el curso es para deshacerse de ellos (es un colador). Incluso odian al docente porque piensan que se les enseña algo innecesario.
- No aprenden a **relacionar la matemática con la ciencia**, tanto sociales como naturales.

- No valoran la importancia que esto tiene y, por tanto, no los motiva a aprender más. No produce entusiasmo en el alumno a estudiar por su propia cuenta y solo se queda con lo que el docente le enseña.
  Este mismo error los lleva a pensar que la comprensión de temas como Límites, por ponerle un ejemplo, se puede comprender en dos horas. Existen estudiantes que piensan que en dos horas están preparados para un examen y, lo digo con la seguridad del caso porque me ha tocado preparar estudiantes en dicho escenario. Mi recomendación es, prepárese querido estudiante con anticipación, pues la matemática es como aprender carpintería, es un oficio en donde la práctica hace al maestro.

2. **La lectura y la práctica**. Esto es algo muy común que he notado en estudiantes, debido a que los alumnos se quedan con lo que él docente explique y no repasan o no profundizan en los temas. Muchos de ellos no leen por su cuenta, dándose el problema que a veces el docente omite demostraciones y algunos teoremas más, por lo que el estudiante comienza a perder información. También he descubierto que la estudiante no práctica y esto último lo he visto al momento de dar clases particulares, pues a veces al contratarme por dos horas explico conceptos y luego muestro ejercicios, resolución de estos. A pesar de que he tratado de dejar esa semilla de curiosidad y sed de más y más conocimiento, a través de la practican, son muy pocos que realizan ejercicios para consolidar los temas presentados en clase. Esto repercute en que en el momento de explicar comprenden y entienden, pero por no practicar al ir pasando el tiempo comienzan a olvidarse lentamente los aspectos explicados y del concepto (existe una función de la pérdida de conocimiento).

3. **Conceptualizar teoremas**

   Ya se enfatizó la carencia de lectura, pero existe otro error por aparte, el cual consiste en que los estudiantes leen, pero no conceptualizan y lo ven como inútil.

   ¿A qué me refiero con conceptualizar?

   Conceptualizar es comprender a fondo el teorema, pero sobre todo debe ser capaz de responderse las preguntas:

   - ¿De qué trata el teorema nuevo (explíqueselo con sus propias palabras)
   - ¿De dónde nace el teorema? (explíqueselo con sus propias palabras)
   - ¿Dónde lo aplicaré?
   - Debe ser capaz de demostrarlo
   - Debe ser capaz de relacionarlo con otros teoremas.

   ¿Qué consecuencias tiene el no conceptualizar?

   - El matemático se vuelve mecánico (una máquina) y solamente memoriza, no piensa por sí solo, no toma criterio matemático.
   - Si memoriza, al cambiarle un dato en el examen o en una hoja de trabajo (por más mínimo el cambio) ya no sabrá qué hacer.
   - Un tiempo se recordará de la fórmula y luego ya no. Si usted aprende el teorema sabiendo demostrar la fórmula, pase el tiempo que pase, vaya donde vaya podrá deducir la fórmula.
   - Motivará a más estudiantes/compañeros a estudiar correctamente matemática.

Por ejemplo, usted está leyendo sobre rectángulos (Geometría)
Le ponen un ejercicio para practicar, en donde deben encontrar los lados de un rectángulo y le dan los datos:
La base es el doble que la altura y el perímetro es de 12 metros
Por estar "leyendo" aprenden que la: $altura = x$; que la $base = 2x$ (por el dato que nos dieron), entonces se relaciona diciendo, asumiendo que es el teorema que aprendió:

$$P = 2 * altura + 2 * base$$

Se dice que:

$$P = 2 * (x) + 2 * (2x) = 2x + 4x = 6x$$

Como el perímetro que nos dieron era de 12 metros, despejando nos queda:

$$12 = 6x$$

$$\frac{12}{6} = x$$

$$x = 2\ m$$

$\text{Altura} = 2\ metros$ $\text{Base} = 4\ metros$

Esa sería la resolución correcta
Pero algunos estudiantes por el mal manejo de conceptualización manejan mal la aritmética y algebra:

$$P = 6x$$
$$12 = 6x$$
$$12 * 6 = x$$
$$72\ m = x$$

Este es un mal manejo de **conceptualización.** Manejan el nuevo concepto aprendido, pero manejan mal otros conceptos (en este caso el despeje).

4. Importancia de demostraciones

Tanto en física como en matemática me he dado cuenta de que un verdadero matemático, físico y un verdadero estudiante que se dedica por aprender y que se preocupa por mejorar en este campo, es el que aprende a **demostrar de donde nace la fórmula.** Esto es lo más importante que engloba la lectura y conceptualización de contenido. En Olimpiadas es vital esto para ganar, saber de dónde se obtienen las fórmulas. Esto mismo le ayuda también a no necesitar un formulario a la mano para cualquier ocasión, sino al contrario, o se las conoce de memoria (por haberlas demostrado) o las puede deducir nuevamente.

Por ejemplo, si usted no se sabe de memoria la identidad trigonométrica:

$$\boldsymbol{tan^2x + 1 = sec^2x}$$

La puede demostrar sabiendo que:

$$sen^2x + cos^2x = 1$$

Si dividimos por la izquierda y derecha de la ecuación por cos^2x tendremos:

$$\frac{sen^2x + cos^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}$$

$$\frac{sen^2x}{cos^2x} + \frac{cos^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}$$

sabiendo que: $\frac{senx}{cosx} = tanx$ y qué $\frac{1}{cosx} = secx$ decimos:

$$\frac{sen^2x}{cos^2x} + \frac{cos^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}$$

$$tan^2x \quad + \quad 1 \quad = sec^2x$$

Como puede darse cuenta querido estudiante, la importancia de saber demostrar es alta para ser un buen matemático. No solo para fórmulas, sino también para comprender teoremas como:

- Transformación de funciones
- Regla del producto/cociente (derivadas)
- Regla de la cadena (derivadas)
- Volúmenes al rotar una o varias funciones (integrales)
- Trabajo por integración (integrales)

  Entre otros

  Le aseguro querido estudiante que si usted sabe de dónde se obtienen las fórmulas, de donde nace la necesidad del tema y como es el análisis de cada una usted, será un buen matemático.

5. Estado psicológico y emocional

El estado mental y emocional son muy importantes al momento de estudiar, pues el estudiante puede ser alguien muy inteligente, pero si está pasando por situaciones difíciles, tendrá la mente en otro lugar pensando en:

- ¿Cómo arreglar mi(s) problema(s) actual(es)?
- ¿Por qué me está pasando esto a mí?
- Entre otras cosas

  Como docente he escuchado tantos casos de estudiantes, con tantos problemas familiares, amorosos, económicos etc.

  Este problema les roba el sueño, la concentración, por tanto, descuidan la importancia y la lectura de la matemática.

También influye la percepción de otras personas sobre el estudiante de matemática. Recuerde querido lector lo que sus papás le dicen cuando estudia matemática:

- *¡Ay, Dios mijo(a)! yo también era fatal para mate, no me gustaba y siempre perdía.*
- *Mi maestro(a) de matemática era malo(a), nos regañaba si no contestábamos.*
- *Nunca he entendido por qué tienen que enseñar eso si nunca lo he visto en la vida real.*
- *El maestro de matemática ponía sus exámenes bien difíciles y siempre evaluaba lo que él sabía que casi nadie le había entendido.*
- *- ¿Qué examen tienes mañana?*
  - *Matemática*
  - *¡Ay, Dios! pobre de ti y que Jesús tenga piedad de tu alma.*

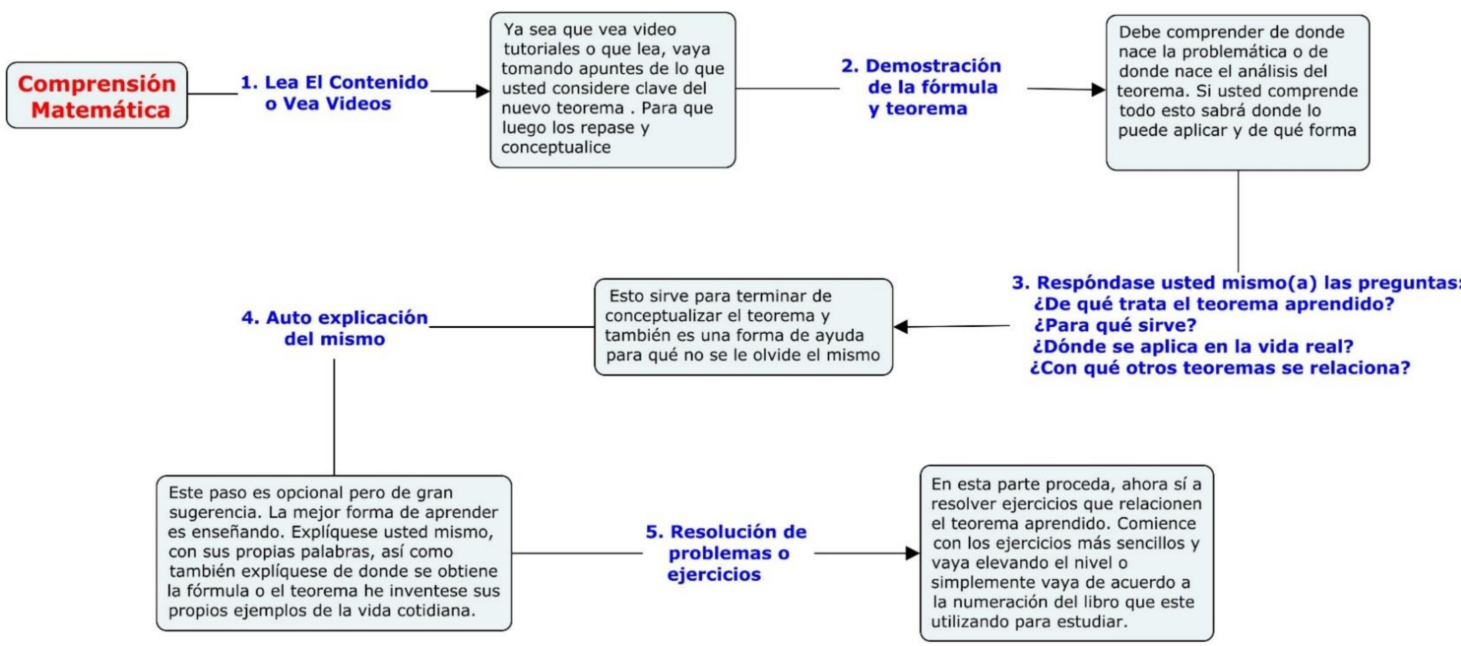
Así podría pasarme el manual entero mostrando como desde niños nos meten ese miedo. Miedo a la matemática y a los números. Desde niños nos mentalizamos, la vemos como algo **espantoso** que sirve para torturarnos y asustarnos como algo que nos hará tontos por siempre.

Los problemas anteriores los he visto con estudiantes de primaria hasta estudiantes universitarios. Con los estudiantes universitarios de matemática intermedia 1, que han pasado la matemática básica 1 y matemática básica 2 sin comprender como tal el ¿cómo estudiar matemática?, ¿qué es matemática? para matar los errores que antes mencionaba.

Estos errores también llevan a estudiantes a probar suerte en cada semestre, hasta que se vaya la matemática o hasta que llegue un docente más accesible. Lo digo con la severidad del caso porque lo escuche en muchas ocasiones cuando llevaba cursos en la universidad. La idea es prepararse bien querido estudiante, porque en el futuro usted podrá ser docente de algún colegio o universidad, y parte de su trabajo será hacer que los estudiantes adoren la matemática y comprendan la importancia de esta en la ciencia.

¿Cómo estudiar matemática?

Como docente de matemática he comprendido que hay muchas formas de estudiarlas hoy en día, con las herramientas tecnológicas, que cada uno puede tomar su propio camino con video tutoriales, libros varios, entre otros. Pero le dejo la siguiente metodología para que usted llegue a ser un buen matemático y para que no se quede con lo poco que pueda aprender en internet, sino que usted sea quien forje su camino como matemático.



Estos pasos son consejos. Usted decide si los sigue, pero en lo personal me ha servido muchísimo y a quienes se los he recomendado. Espero lo mismo para usted querido(a) lector(a).

AGRADECIMIENTO A:

DIOS: Ingeniero del universo, que con su lenguaje matemático describe el universo, por su apoyo en los momentos difíciles y por darme su amor y la sabiduría que necesito.

QUETZALTENANGO: Ciudad Altense y tierra de la Luna de Xelajú, lugar que me ha visto crecer profesionalmente, que mi trabajo sirva para engrandecerla más.

P.DG. ANDY GABRIELA ALVARADO GONÓN: Por ser la persona especial, dulce he inteligente que inspirara la creación de este libro, me motivara a terminarlo, me ayudara a mejorar como matemático, físico y sobre todo como persona.

P.DG. ROXANA NOHEMÍ, DE LA ROSA TARACENA: Por hermoso diseño de la portada y contraportada de este libro y por sugerirme cambios en este libro.

LIC. MARÍA HORTENSIA MORALES FLORES: Por ser la revisora lingüista de este proyecto, darme sugerencias e ideas sobre el libro y por su valioso tiempo.

ING. HUMBERTO OSVALDO HERNANDEZ SAC: Por ser el revisor directo del libro, por haber confiado en mí como auxiliar, por motivarme con su ejemplo y aportar ideas a este manual.

ING. LUIS ERNESTO AGUILAR: Por ser revisor de este libro y motivarme a cumplir cada una de mis metas profesionales.

ING. JOSÉ RICARDO MÉRIDA LOPEZ: Por ser revisor de este proyecto, por su amistad, tiempo y apoyo.

$\mathbf{DR^1}$. $\mathbf{ING^2}$. **EDDIE OMAR FLORES ACEITUNO:** Por su apoyo en la conversión del pdf y por su amistad.

LIC. TELMA JOHANA DE LEÓN HIP: Por ser la revisora pedagógica de este proyecto, por aportarme ideas y mejorar la calidad de este texto.

ING. FRANCISCO JACOBO CUC CHAVAYAJ: Por ser revisor del libro y apoyarme en todo momento.

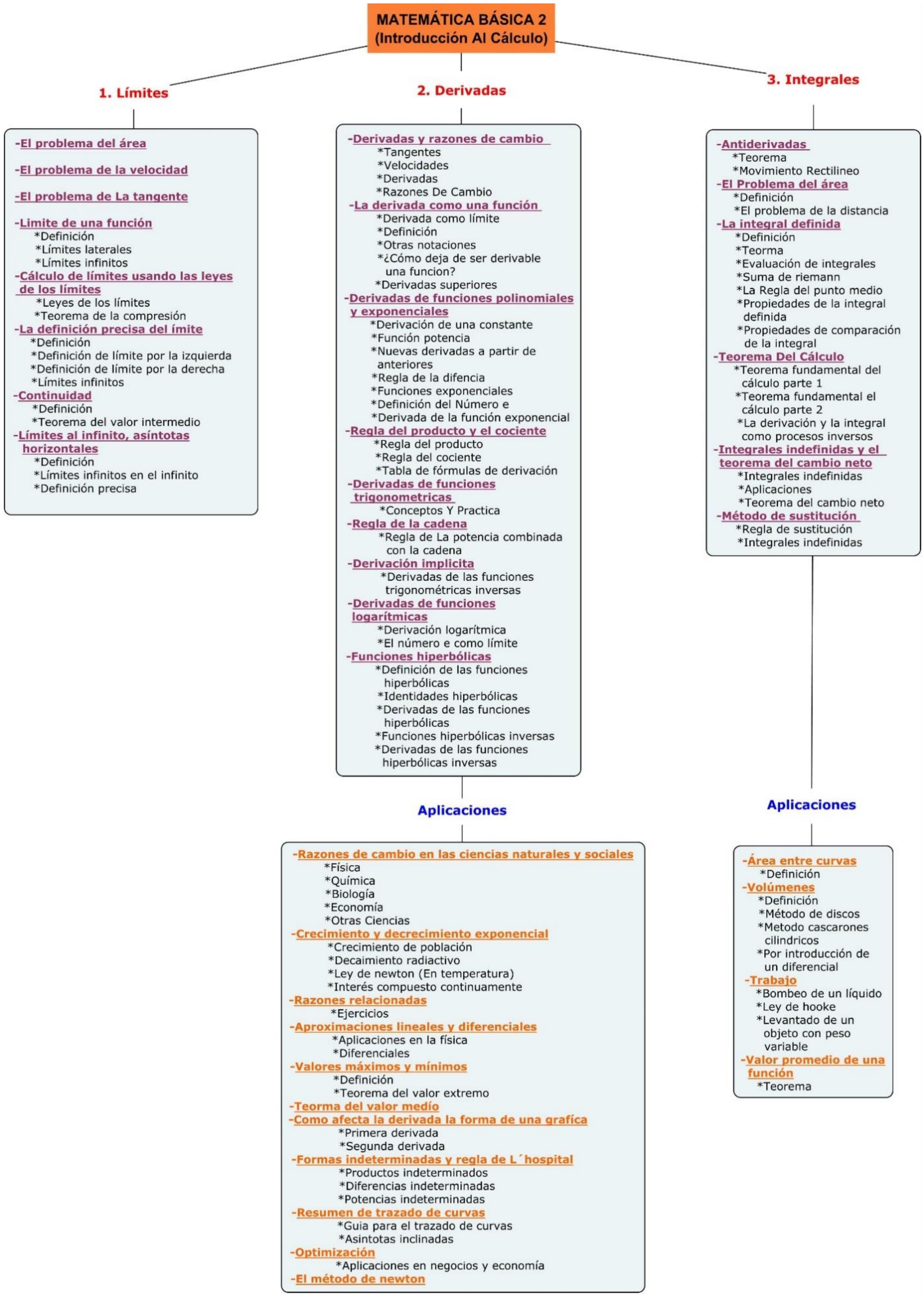
A MI ABUELA: ZOILA CRUZ DE LEÓN (Q.E.P.D)
Por haberme enseñado los primeros números, haberme educado con su ejemplo, paciencia y dedicación. Gracias por todo Cholis.

A MI MADRE: MAGDA ZURAMA GARCÍA DE LEÓN (Q.E.P.D)
Por su apoyo incondicional en mi vida profesional y en mi vida personal. Siempre te amaré MOSHI y algún día estaremos nuevamente reunidos.

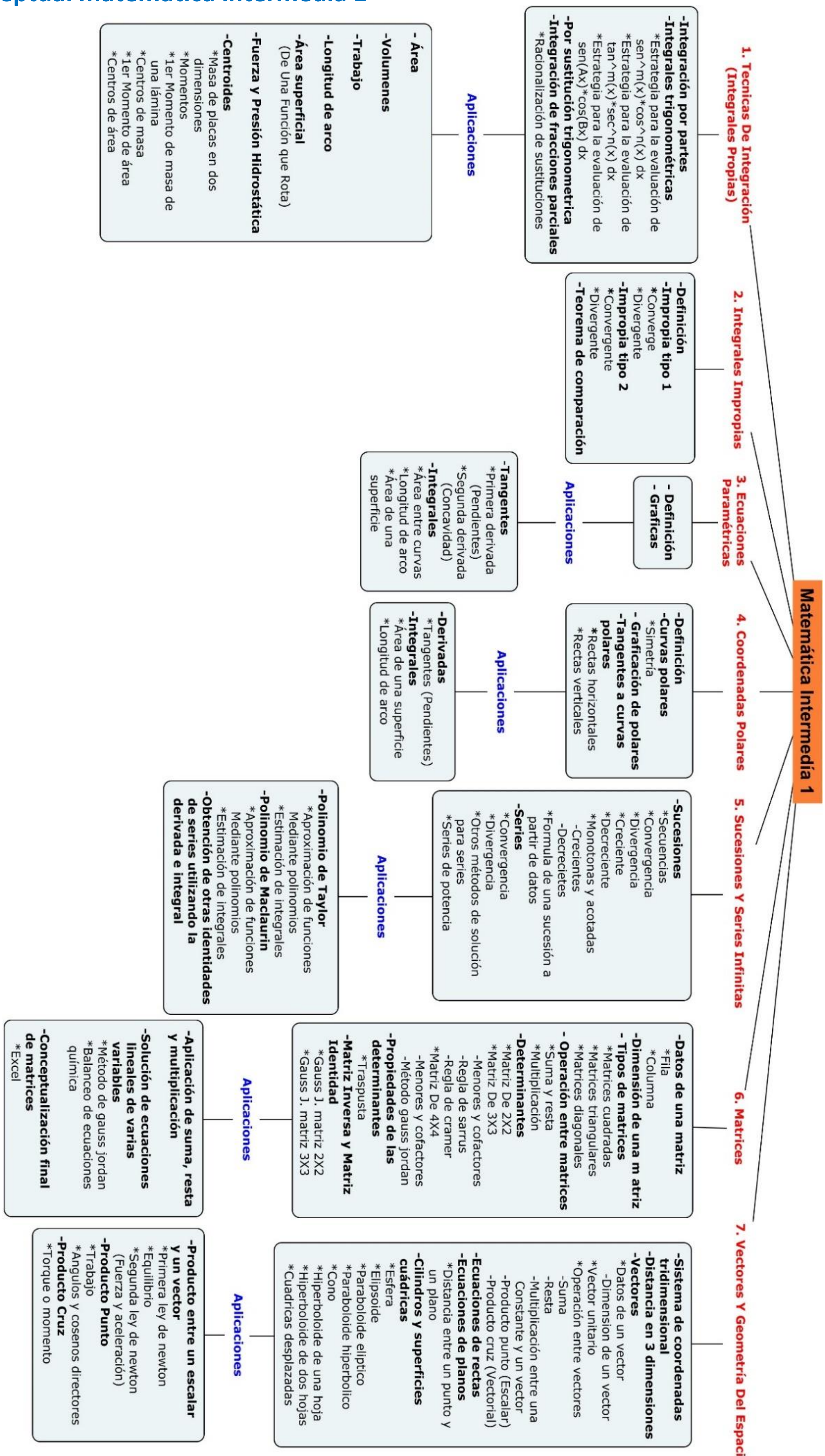
A MIS HERMANOS: LIC. BRAYAN JOSÉ VELÁSQUEZ Y ARQ. FRANCISCO ERNESTO VELÁSQUEZ GARCÍA
Por su apoyo incondicional en mi vida profesional y en mi vida personal. Gracias por todo Papas

MAPAS CONCEPTUALES

Mapa conceptual matemática básica 2



Mapa conceptual matemática intermedia 1



Formulario Matemática Básica 2

Límites

Límites

$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad si\ y\ sólo\ si \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+}$

Límites al infinito (Asíntotas horizontales)

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

Límites infinitos (Asíntotas verticales)

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

Continuidad

Una función f es continua

en un número x=a si

a es parte del Dominio

$\lim_{x\to a} f(x) = Existe$

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Definición precisa

sea **f** una función definida sobre

un intervalo (a, ∞). Entonces

$\lim_{x\to a} f(x) = L$

significa que para toda $\in > 0$

existe un correspondiente número N tal que

Si $x > N$, entonces $|f(x) - L| < \in$

Límites trigonométricos

$\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{senx} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$

Otras identidades

$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{\ln(x)} = 1$

Derivadas

Definición

La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente.

$m = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ Para la exactitud hacemos que $x - a = h\ y\ como\ x \to a\ entonces\ h \to 0$; $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Identidades de derivación

1. $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
2. $\frac{d}{dx} sen(x) = \cos(x)$
3. $\frac{d}{dx} \cos(x) = -sen(x)$
4. $\frac{d}{dx} sen^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5. $\frac{d}{dx} cot^{-1}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
6. $\frac{d}{dx} \tan(x) = sec^2(x)$
7. $\frac{d}{dx} \csc(x) = -\csc(x) * \cot(x)$
8. $\frac{d}{dx} sec(x) = sec(x) * tan(x)$
9. $\frac{d}{dx} cos^{-1}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $\frac{d}{dx} sec^{-1}(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
11. $\frac{d}{dx} \cot(x) = -csc^2(x)$
12. $\frac{d}{dx} a^x = a^x Ln(a)$
13. $\frac{d}{dx} log_a(x) = \frac{1}{xLn(a)}$
14. $\frac{d}{dx} tan^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$
15. $\frac{d}{dx} Ln(x) = \frac{1}{x}$
16. $\frac{d}{dx} C = 0$
17. $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

Regla del producto

$$\frac{d}{dx}[f(x) * g(x)] = g(x) * \frac{d}{dx} f(x) + f(x) * \frac{d}{dx} g(x)$$

Regla del cociente

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x) * \frac{d}{dx} f(x) - f(x)\frac{d}{dx} g(x)}{[g(x)]^2}$$

Regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

Optimización

$$y = f(x)$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ para encontrar x

que haga el valor máximo o mínimo

Método de Newton Raphson

$$y = f(x) = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{df(x_n)}{dx}} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Pasos para el trazo de gráficas

1- Dominio
2- Intersección
3- Simetría
4- Asíntotas
5- Intervalos donde es creciente/decreciente
6- Valores máximos/mínimos
7- Concavidad
8- Trazar la gráfica

Integrales

Antiderivadas

	Identidades	
	Antiderivada F(x)	Función f(x)
1	$cf(x)$	$cF(x)$
2	$f(x)+g(x)$	$F(x)+G(x)$
3	$x^n \quad (n \neq 1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
4	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
5	e^x	e^x
6	$\cos(x)$	$\mathrm{sen}(x)$
7	$\mathrm{sen}\,(x)$	$-\cos(x)$

	Identidades	
	Antiderivada F(x)	Función f(x)
1	$sec^2(x)$	$\tan(x)$
2	$\sec(x) * \tan(x)$	$\sec(x)$
3	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$sen^{-1}x$
4	$\frac{1}{1+x^2}$	$tan^{-1}x$
5	$\cosh(x)$	$senh\,(x)$
6	$senh\,(x)$	$-\cosh(x)$
7	$\ln(x)$	$xln(x) - x$

La suma de Riemann

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(xi^*)\Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad xi^* = a + i\Delta x$$

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn \quad donde\ c\ es\ una\ constante \qquad \sum_{i=1}^{n} c * ai = c\sum_{i=1}^{n} ai$$

$$\sum_{i=1}^{n} ai \pm bi = \sum_{i=1}^{n} ai \pm \sum_{i=1}^{n} bi$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n+1)}{30}$$

Teorema fundamental del cálculo

Teorema fundamental del cálculo parte 1: Si f es continua sobre $[a,b]$ Entonces la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad a \le x \le b$$

Es continua sobre $[a,b]$ y derivable sobre (a,b) y $g'(x) = f'(x)$

Teorema fundamental del cálculo, parte 2: Si f es continua sobre $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde F es una antiderivada de f: es decir, una función tal que $F' = f$

Tabla integrales indefinidas

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \qquad \int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int kdx = kx + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq 1) \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int senxdx = -cosx + C \qquad \int cosx\,dx = senx + C$$

$$\int senxdx = -cosx + C \qquad \int cosx\,dx = senx + C$$

$$\int sec^2x\,dx = tanx + C \qquad \int csc^2x\,dx = -cotx + C$$

$$\int \sec x \tan x\ dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = tan^{-1}x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = sen^{-1}x + C$$

$$\int senhx\,dx = coshx + C \qquad \int \cosh x\,dx = senhx + C$$

Área entre curvas

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$$

Volúmenes

Método de discos

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2dx \qquad V = \pi\int_c^d [R(y)]^2dy$$

$$V = \pi\int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2]\,dx \qquad V = \pi\int_c^d [R(y)^2 - r(y)^2]\,dx$$

Método de cascarones cilíndricos

$$dV = 2\pi rh\,dr \qquad V = 2\pi\int_c^d xf(x)dx$$

Trabajo

$$w = \text{Fuerza} * \text{Distancia} = \text{F} * \text{x}$$

Bombeo de agua

$$w = \rho g\int_a^b xi^*dV \quad donde\ xi^*(y)\ ;\ dV(y)$$

$xi^*(y) = distancia\ a\ sacar\ el\ diferencial$

Ley de Hooke

$$\text{F} = K\Delta x\ ;\ w = k\frac{{x_2}^2}{2} - k\frac{{x_1}^2}{2}$$

Trabajo de una fuerza variable

$$w = \int_a^b F(x)dx$$

$\text{F}(x) = Fuerza\ en\ terminos\ de\ la\ posición$

Formulario Matemática Intermedia 1

1. Técnicas de integración

1.1. Integración por partes

Para escoger u: ALPES

A = Trigonométrica inversa

L = Logaritmica

P = Polinomial

E = Exponencial

S = Trigonometrica

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

1.2. Integrales trigonométricas

$$\text{sen}(2x) = 2\,\text{sen}(x) * \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \text{sen}^2(x)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2x)]$$

$$\text{sen}^2(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$$

$$\cos^2(2x) = \frac{1}{2}[1 + \cos(4x)]$$

$$\text{sen}(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\text{sen}(A - B) + \text{sen}(A + B)]$$

$$\text{sen}(A)\text{sen}(B) = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

$$\cos(3x) = -3\cos(x) + 4\cos^3(x)$$

$$\text{sen}(3x) = 3\,\text{sen}(x) - 4\,\text{sen}^3(x)$$

$$\text{sen}(A \pm B) = \text{sen}(A)\cos(B) \pm \text{sen}(B)\cos(A)$$

$$\cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp \text{sen}(A)\text{sen}(B)$$

1.3. Sustitución trigonométrica

Para expresión	Sustituir
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a * sen(\theta)$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a * \tan(\theta)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a * \sec(\theta)$

donde: a es una constante

1.4. Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales

Caso No. 1: ***Si Q(x) es un producto de factores lineales distintos***

$$Q(x) = (a_1x + b_2) * (a_2x + b_2) * (a_3x + b_3) + \ldots + (a_nx + b_n)$$

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_2} + \frac{A_2}{a_2x + b_3} + \frac{A_3}{a_3x + b_3} + \ldots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

Caso No. 2: ***Si Q(x) es un producto de factores lineales en donde algunos se repiten***

Asumiendo que $(a_1x + b_2)$ se repite "r" veces como factor de esta forma: $(a_1x + b_1)^r$

$$Q(x) = (a_1x + b_1)^r$$

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \frac{A_3}{(a_1x + b_1)^3} + \ldots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r}$$

Caso No. 3: ***Si Q(x) tiene factores cuadráticos irreducibles $(x^2 + 4)$***

Sí tenemos $Q(x) = ax^2 + bx + c$ y el discriminante $b^2 - 4ac < 0$ entonces

$$\frac{F(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Caso No. 4: ***Si Q(x) tiene un factor cuadrático irreductible repetido***

Si $Q(x) = (ax^2 + bx + c)^r$ donde $b^2 - 4ac < 0$ (No tiene raices reales)

$$\frac{F(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \frac{A_3x + B_3}{(ax^2 + bx + c)^3} + \ldots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

1.5. Estrategias para la integración

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$

3. $\int e^x\,dx$

4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$

5. $\int cosx\,dx = senx$

6. $\int senx\,dx = -cosx$

7. $\int sec^2x\,dx = tanx$

8. $\int csc^2x\,dx = -cotx$

9. $\int secx * tanx\,dx = \sec x$

10. $\int \tan x\,dx = \ln(\sec x)$

11. $\int csc\,x * cot\,x\,dx = -\csc x$

12. $\int \sec x\,dx = \ln(\sec x + \tan x)$

13. $\int \csc x\,dx = \ln(\csc x - \cot x)$

14. $\int \text{cot}x\,dx = \ln(senx)$

15. $\int \csc x\,dx = \ln(\csc x - \cot x)$

16. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

17. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x - a}{x + a}\right)$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$

21. $\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$

22. $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 + x^2}}$

23. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$ **24.** $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}$

25. $\int (a^2-x^2)^{3/2}\,dx = -\frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3}{8}a^4 sen^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

1.6.1. Longitud de arco

$$s = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_{y_1}^{y_2}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

1.6.2. Área superficial

$$As = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \ \circlearrowleft x \quad ; \quad As = 2\pi\int_{y_1}^{y_2} x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy \ \circlearrowleft y$$

1.6.3. Fuerza y presión hidrostática

$$F = \rho g\int_{y_1}^{y_2} L(y) * h(y)\,dy = \gamma\int_c^d L(y) * h(y)\,dy$$

1.6.4.2. Centro de área (centro geométrico)

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)dx \qquad \bar{x} = \frac{\int x_1 dA}{A} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\int y_1 dA}{A}$$

1.6.4.1. Centro de masa

Centro de masa en una dimensión

$$\bar{x} = \frac{\sum x_n m_n}{\sum m_n} \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_n m_n}{\sum m_n}$$

Centro de masa en dos dimensiones

$$\bar{x} = \frac{\sum x_n m_n}{\sum m_n} = \frac{M_y}{m} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\sum y_n m_n}{\sum m_n} = \frac{M_x}{m}$$

Centro de masa de una lámina plana

$$m = \rho\int_a^b f(x) - g(x)\,dx \ ; \ M_x = \frac{\rho}{2}\int_a^b [f(x)]^2 - [g(x)]^2\,dx \ ; \ M_y = \rho\int_a^b x\,[f(x)-g(x)]\,dx \ ; \ \bar{x} = \frac{M_y}{m} \ ; \ \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

Donde: M_X y M_Y son los momentos de masa respecto a x y y (masa por distancia) ; ρ densidad de área $\left({}^{masa}/_{área}\right)$

1.6.4.2 Centro de área de una lámina plana

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)dx \ ; \ Q_x = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2 - [g(x)]^2\,dx \ ; \ Q_y = \int_a^b x\,[f(x)-g(x)]\,dx \ ; \ \bar{x} = \frac{Q_y}{A} \ ; \ \bar{y} = \frac{Q_x}{A}$$

2. Integrales impropias

2.1 Definición de un integral tipo 1

a) $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$

b $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$

c) $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$

$= \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)\,dx + \lim_{u\to\infty}\int_a^u f(x)\,dx$

2.2 Definición de un integral tipo 2

a) $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx \ ; \ x[a,b)$

b) $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx \ ; \ x(a,b]$

c) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\,dx$

$= \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\,dx + \lim_{u\to c^+}\int_u^b f(x)\,dx$

2.3 Teorema de comparación

$f(x) \geq g(x) \geq 0 \ ; x \geq a$

a) $\int_a^\infty f(x)dx$ si es convergente

entonces $\int_a^\infty g(x)dx$ converge

b) $\int_a^\infty f(x)dx \geq \int_a^\infty g(x)dx$

3. Ecuaciones paramétricas

3.1 Forma de una paramétrica

$$x = f(x) \quad ; \quad y = g(x)$$

3.2.1. Tangentes

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Curva horizontal

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

Curva vertical

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

Segunda derivada

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

3.2.2. Áreas

$$A = \int_{t_1}^{t_2} g(t) * f'(t)\,dt$$

3.2.3. Longitud de arco

$$L = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

3.2.4. Área superficial por rotación

$$A_s = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \ \circlearrowleft x \qquad A_s = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} x\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \ \circlearrowleft y$$

4. Coordenadas polares

4.1 Forma de una polar

$$r^2 = x^2 + y^2 \;;\; x = r\cos(\theta) \;;\; y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \;;\; \tan(\theta) = \frac{y}{x} \;;\; r = f(\theta)$$

4.2 Tangentes

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{dr}{d\theta}\mathrm{sen}(\theta) + r\cos(\theta)}{\frac{dr}{d\theta}\cos(\theta) - r\,\mathrm{sen}(\theta)}$$

4.3.1. Áreas encerradas

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} {r_\theta}^2\, d\theta$$

4.4 Longitud de arco

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

5. Sucesiones y series

5.1. Sucesiones

$a_n = \{f(n)\} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L$

si L existe converge

si L no existe diverge

5.1.3. Sucesión creciente

$a_n \le a_{n+1}$ creciente

$a_n \ge a_{n+1}$ decreciente

5.1.3. Sucesión acotada

$C \le a_n \quad \lim_{n\to\infty} a_n \ge C$ decreciente

$D \ge a_n \quad \lim_{n\to\infty} a_n \le D$ creciente

$C \le a_n \le D$ Sucesión Acotada

5.1.4. Formula de una sucesión a partir de datos

Sucesión aritmética

$a_n = \{mn + b\}$

$m = a_2 - a_1$

$b = a_1 - m$

Sucesión geométrica

$a_n = \{a_1\, r^{n-1}\}$

a_1 = primer termino

r = razón $= \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Sucesiones cuadráticas

$a_n = \{an^2 + bn + c\}$

Sucesiones alternadas

$a_n = \{b_n(-1)^n\}$

b_n = cualquier Sucesión

Sucesiones oscilantes

$a_n = a\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

$a_n = a\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

a = valor más grande

Sucesión de fracciones

$a_n = \left\{\frac{b_n}{c_n}\right\}$

Sucesiones factoriales

$n! = n * (n-1) * (n-2) * (n-3) * (n-4) * \ldots * 1$

5.2. Series

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces s_n converge

5.2.2. Otros métodos de solución de series

Series geométricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Serie gometrica inversa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{r^{n-1}} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = a\left(\frac{1-\frac{1}{r^n}}{1-\frac{1}{r}}\right)$$

5.2.3. Serie de potencia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n\, x^n$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n\,(x-a)^n$$

Convergencia

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

5.3.1. Polinomio de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0) * x^n}{n!} = f(0) + \frac{f'(0) * x}{1!} + \frac{f''(0) * x^2}{2!} + \frac{f'''(0) * x^3}{3!} + \cdots + \frac{f^n(0) * x^n}{n!}$$

5.3.1. Polinomio de Maclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \cdots + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!}$$

6. MATRICES

Multiplicación de una constante por una matriz

$$k*A = k*\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k*a_{11} & k*a_{12} & k*a_{13} \\ k*a_{21} & k*a_{22} & k*a_{23} \\ k*a_{31} & k*a_{32} & k*a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k*a_{n1} & k*a_{n2} & k*a_{n3} \end{bmatrix}$$

Multiplicación de una matriz por una matriz

$$Amn \text{ X } Bnp$$
$$mn * np \quad = \quad Cmp$$

Iguales

Método por menores y cofactores

1 − Se selecciona a_{ij}

2 − Se obtiene $c_{ij} = (-1)^{i+j} *$ Matriz 2

3 − $\text{Det}(3X3) = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}$

Regla de Sarrus

$$\text{Diagonal mayor} = a_{11}*a_{22}*a_{33} + a_{21}*a_{32}*a_{13} + a_{31}*a_{12}*a_{23}$$
$$\text{Diagonal menor} = a_{13}*a_{22}*a_{31} + a_{23}*a_{32}*a_{11} + a_{33}*a_{12}*a_{21}$$
$$\text{Det}(3X3) = \text{Diagonal mayor} - \text{Diagonal menor}$$

Propiedades de los determinantes

1. Si una matriz posee una línea (fila o columna) de ceros, el determinante es igual a cero, no importando el tamaño de la matriz.

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \text{Det}(B) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \text{Det}(C) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

2. Si una matriz posee dos líneas (filas o columnas) iguales (mismos números), el determinante es igual a cero, no importando el tamaño de la matriz. Deben ser ambas o filas o columnas.

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \text{Det}(B) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \text{Det}(C) = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & 9 & 5 \\ 3 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

3. Si se cambian dos líneas (filas o columnas) paralelas de una matriz, el determinante cambiara de signo.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 2 = 6 \quad \text{columnas} \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 8 = -6 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7 \quad \text{Filas} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -8 \quad \text{permutando columnas} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8 \qquad \text{permutando filas} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

4. Si se multiplican los elementos de una línea (fila o columna) de una determinante por un número diferente a cero, el determinante queda multiplicado por ese número.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 10 = 16 \quad \text{Fila 1 por 2} \quad \begin{matrix} *2 \\ \end{matrix}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 20 = 32\ (16*2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 \qquad \text{Columna 1 por 4} \quad \begin{matrix} 4 \\ * \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 24 = -16\ (-4*4)$$

Matriz identidad

$$I_{2X2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_{3X3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_{4X4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A * A^{-1} = I \qquad A^{-1} * A = I$$

$A =$ Matriz $\quad A^{-1} =$ Matriz Inversa $\quad I =$ Matriz Identidad

Método de Gauss Jordan para obtener la matriz inversa 3X3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

1 a_{21} y $a_{31} \longrightarrow 0$ — Pivote a_{11}

2 $a_{32} \longrightarrow 0$ — Pivote a_{22}

3 a_{13} y $a_{23} \longrightarrow 0$ — Pivote a_{33}

4 $a_{12} \longrightarrow 0$ — Pivote a_{22}

7. Vectores y geometría en el espacio

Distancia entre dos puntos en tres dimensional

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Componentes vectoriales

$$\bar{A} = A_x i + A_y j + A_z k = \langle A_x\ , A_j\ , A_z \rangle$$

Magnitud vectorial

$$|A| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}$$

Vector unitario

$$u = \frac{A}{|A|}$$

Suma y resta de vectores

$$R = A + B + C + \cdots + n \qquad |R| = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2}$$

$$R_x = \sum x = A_x + B_x + C_x + \cdots n_x \qquad R = R_x i + R_y j$$

$$R_y = \sum y = A_y + B_y + C_y + \cdots n_y \qquad \tan\theta = \frac{\text{Cat. Opuesto}}{\text{Cat. adyacente}} = \frac{R_y}{R_x}$$

Producto entre un vector y una constante

$$\overline{B} = \overline{\overline{A}} * k$$

$$\overline{B} = \langle kA_x , k A_y , k A_z \rangle$$

Producto punto

$$\overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{B} \cdot \overline{A} = A\, B \,\text{Cos}\theta$$

$$\overline{A} \cdot \overline{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Producto cruz

$$\overline{A} \, X \, \overline{B} = A\, B \,\text{sen}\theta \qquad \hat{\imath} \, X \, \hat{\imath} = 0 \qquad \hat{\jmath} \, X \, \hat{\jmath} = 0 \qquad \hat{k} \, X \, \hat{k} = 0$$

$$\overline{A} \, X \, \overline{B} = -\overline{B} \, X \, \overline{A} \qquad \hat{\imath} \, X \, \hat{\jmath} = \hat{k} \qquad \hat{\jmath} \, X \, \hat{k} = \hat{\imath} \qquad \hat{k} \, X \, \hat{\imath} = \hat{\jmath}$$

$$\overline{A} \, X \, \overline{B} = \langle A_y B_z - A_z B_y , -(A_x B_z - A_z B_x) , A_x B_y - A_y B_x \rangle$$

7.4. Ecuaciones de rectas

$$\bar{r} = \langle A_x + t(B_x - A_x), A_y + t(B_y - A_y), A_z + t(B_z - A_z) \rangle$$

$$\bar{r} = \langle x_0 + a\,t \,,\; y_0 + b\,t \,,\; z_0 + c\,t \rangle$$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t$$

7.5. Ecuaciones de planos

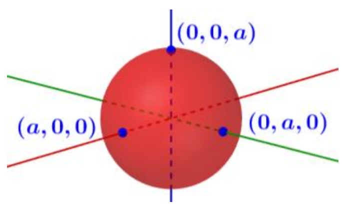
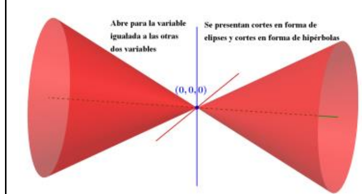
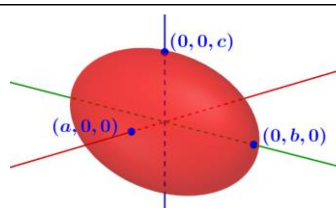
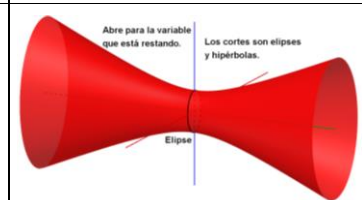
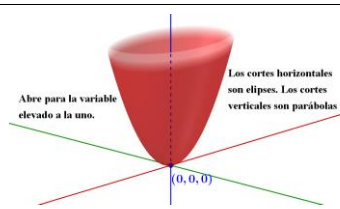
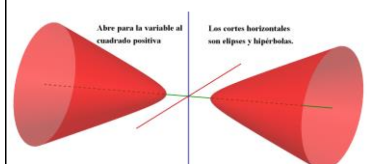
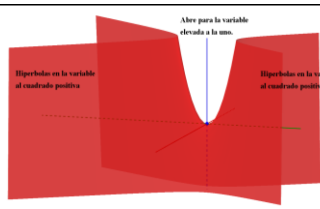
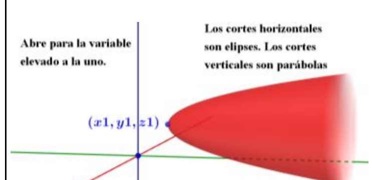
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\bar{n} = \text{normal} = \langle a , b , c \rangle$$

Distancia entre un punto y un plano

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

7.6.2. Superficies cuádricas

No.	Ecuación matemática	Superficie	No.	Ecuación matemática	Superficie
1	Esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$		5	Cono $\frac{y^2}{a^2} = \frac{x^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$	
2	Elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$		6	Hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1$	
3	Paraboloide Elíptico $\frac{z}{a} = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2}$		7	Hiperboloide de dos hojas $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	
4	Paraboloide Hiperbolico $\frac{z}{a} = \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{c^2}$		8	Paraboloide Elíptico desplazado $y - y_1 = a(x - x_1)^2 + b(z - z_1)^2$	

Primera Ley de Newton (Equilibrio)

$$\sum \vec{F} = 0$$

Relación Peso-Masa

$$\vec{w} = m * \vec{g}$$

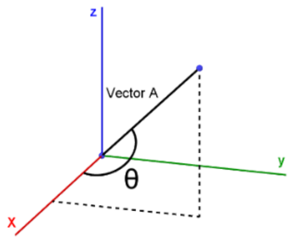
Segunda Ley de Newton

$$\vec{F} = m * \vec{a}$$

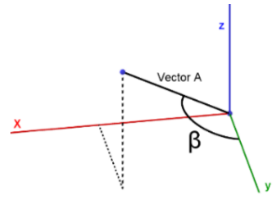
Trabajo

$$W = \vec{F} \cdot \vec{x} = F\,x \cos\theta$$

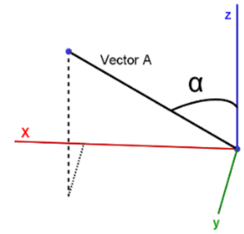
Ángulos Y Cosenos Directores



$i = \langle 1, 0, 0 \rangle$



$j = \langle 0, 1, 0 \rangle$



$k = \langle 0, 0, 1 \rangle$

Ángulos

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{i}}{A} = \frac{A_x}{A} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{j}}{A} = \frac{A_y}{A} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{\vec{A}\cdot\vec{k}}{A} = \frac{A_z}{A}$$

Cosenos directores

$$u = \frac{\vec{A}}{A} = \langle \cos\theta \ , \ \cos\beta \ , \ \cos\alpha \rangle$$

Sistemas de medida/densidad ρ y peso específico del agua γ

	Sistema Absoluto						Sistema Técnico			
	Internacional (MKS)		Cegecimal (CGS)		Sistema (F.P.S)		Europeo		Sistema Inglés	
Cantidad	Unidad	Símbolo	Unidad	Símbolo	Unidad	Símbolo	Unidad	Símbolo	Unidad	Símbolo
Longitud	metro	m	centimetro	cm	pie	ft	metro	m	pie	ft
Masa	kilogramo	kg	gramo	g	libra	lb	Unidad Técnica De Masa	UTM	slug	slug
Tiempo	segundo	s	segundo	s	segundo	s	segundo	s	segundo	s
Temperatura	kelvin	°k	centigrados	°C	fahrenheit	°F			Rankine	°R
Intensidad Luminosa	candela	cd								
Corriente Eléctrica	ampere	A								
Cantidad De Sustancia	mol	mol								
Aceleración	metro/segundo2	m/s^2	centimetro/segundo2	cm/s^2	pie/segundo2	ft/s^2	metro/segundo2	m/s^2	pie/segundo2	ft/s^2
Fuerza	Newton	N	Dina	dyn	Poundal	pdl	Kilogramo fuerza	Kg.f	libra fuerza	lb.f
Trabajo o Energía	Joule	J	Ergio	Erg	Pundal-pie	pdl-ft	Kilogramo fuerza-metro	Kg.f-m	libra fuerza-pie	lb.f-ft
Potencia	watt	W	Ergio/segundo	Erg/s	Poundal-pie/segundo	pdl-ft/s	Kilogramo fuerza-metro/segundo	Kg.f-m/s	libra fuerza-pie/segundo	lb.f-ft/s
Presión	Pascal	Pa	Dina/cm2	dyn/cm^2	Pundal/segundo2	pdl/ft^2				
Capacidad calorífica	Caloría	Cal	Caloría	cal	Unidad Térmica Británica	BTU				

Factores de conversión

Longitud
$1 \text{ metro (m)} = 39.37 \text{ in} = 3.281 \text{ ft} = 6.214 \times 10^{-4} \text{ mi}$
$1 \text{ ft} = 12 \text{ in} = 0.3048 \text{ m} = 0.000189394 \text{ mi} = 0.333 \text{ yarda} = 30.48 \text{ cm}$
$1 \text{ yd} = 91.44 \text{ cm} = 0.9144 \text{ m}$ $\qquad 1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$
$1 \text{ vara} = 3 \text{ ft} = 0.836 \text{ m} = 83.6 \text{ cm}$ $\qquad 1 \text{ mi} = 1609.34 \text{ m} = 1.60934 \text{ km}$

Área
$1 \text{ m}^2 = 10.76 \text{ ft}^2 = 1550 \text{ in}^2 = 10{,}000 \text{ cm}^2$
$1 \text{ hectárea} = 10{,}000 \text{ m}^2 = 2.471 \text{ acres} = 2.5442 \text{ cuerda}$
$1 \text{ cuerda} = 3{,}930.396 \text{ m}^2 = 42{,}306.426 \text{ ft}^2$
$10^6 \text{ m}^2 = 1 \text{ km}^2$ $\qquad 1 \text{ cuerda (Guatemala)} = 436.81 \text{ m}^2$

Volumen
$1 \text{ m}^3 = 35.31 \text{ ft}^3 = 6.102 \times 10^4 \text{ in}^3 = 1{,}000 \text{ Litros} = 264.172 \text{ Galones}$
$1 \text{ galón (US)} = 231 \text{ in}^3 = 3.785 \text{ Litros}$ $\qquad 1 \text{ Tonel} = 55 \text{ galones}$
$1 \text{ Litro} = 61.02 \text{ in}^3 = 1{,}000 \text{ mililitros (ml)} = 1{,}000 \text{ cm}^3 = 4 \text{ vasos}$

Elemento	Densidad	Peso Especifico
Gasolina a 5 °C	$737 \ Kg/m^3$	$7{,}222.6 \ N/m^3$
Aceite de Oliva	$915 \ Kg/m^3$	$8{,}967 \ N/m^3$
Aceite de Coco	$910 \ Kg/m^3$	$8{,}918 \ N/m^3$
Alcohol Etilico	$790 \ Kg/m^3$	$7{,}742 \ N/m^3$
Cerveza	$1015 \ Kg/m^3$	$9{,}947 \ N/m^3$
Concreto	$2300 \ Kg/m^3$	$22{,}540 \ N/m^3$
Leche	$1032 \ Kg/m^3$	$10{,}130 \ N/m^3$
Mercurio	$13{,}600 \ Kg/m^3$	$133{,}280 \ N/m^3$

Masa
$1 \text{ Kg} = 2.205 \text{ lb}_m = 0.06852 \text{ slug} = 1{,}000 \text{ g}$
$1 \text{ slug} = 31.17 \text{ lb}_m = 14.59 \text{ Kg}$ $\qquad 1 \text{ u} = 1.661 \times 10^{-27} \text{ Kg}$
$1 \text{ UTM} = 9.81 \text{ Kg} = 1.488 \text{ Slug}$ $\qquad 1 \text{ lb}_m = 453.6 \text{ g} = 16 \text{ Onzas}$
$1 \text{ Quintal} = 100 \text{ lb}_m = 45.35 \text{ Kg} = 4 \text{ arrobas (@)}$
$1 \text{ arroba} = 25 \text{ Libras} = 11.338 \text{ Kg}$
$1 \text{ Quintal métrico} = 100 \text{ Kg}$ $\qquad 1 \text{ Quintal británico} = 112 \text{ Lb} = 50.793 \text{ Kg}$

Dato	Internacional (MKS)	Sistema Inglés
Densidad Agua (ρ)	$1{,}000 \ Kg/m^3$	$1.944 \ slug/ft^3$
Peso Especifico Agua (γ)	$9{,}800 \ N/m^3$	$62.5 \ Lb/ft^3$
Gravedad (g)	$9.81 \ m/s^2$	$32.15 \ ft/s^2$

Fuerza
$1 \text{ newton (N)} = 10^5 \text{ dinas} = 0.1020 \text{ Kg n} = 0.2248 \text{ lb} = 7.23301 \text{ poundals}$ $\qquad 1 \text{Kilopoundio} = 1 \text{kgf} = 9.8 \text{N}$
$1 \text{ lb (fuerza)} = 4.448 \text{ N} = 0.4536 \text{ kg n} = 32.17 \text{ pundals}$ $\qquad 1 \text{ Ton} = 1{,}000 \text{ Kgf}$

Presión
$1 \ N/m^2 = 1 \text{ Pascal} = 9.869 \times 10^{-6} \text{ atm} = 1.450 \times 10^{-4} \ lb/in^2 \text{ (psi)} = 0.02089 \ lb/in^2$ $\qquad 1 \text{ Ksi} = 1{,}000 \ lb/in^2$
$1 \text{ N/m}^2 = 7.501 \times 10^{-4} \text{ cmHg} = 4.015 \times 10^{-3} \text{ in de agua} = 10^{-5} \text{ bar}$
$1 \text{ lb/in}^2 = 1 \text{ psi} = 144 \text{ lb/ft}^2 = 6895 \text{ N/m}^2 = 5.171 \text{ cmHg} = 27.68 \text{ in de agua}$
$1 \text{ atm} = 406.8 \text{ in de agua} = 76 \text{ cmHg} = 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 10{,}330 \text{ kg w/m}^2 = 760 \text{ torr} = 14.70 \text{ psi}$

1. TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

En la introducción al cálculo (Curso de Matemática Básica 2) se aprendió sobre límites y luego sobre derivadas. Posterior a ello se aprendió sobre el tema de integrales. Es importante que en este punto de la lectura usted conozca:

- Qué es una integral.
- Integral definida e integral indefinida.
- Saber de memoria la tabla de integrales indefinidas (ver formulario matemática 2)
- Método de sustitución.
- Como se introduce un diferencial en una función.
- Aplicaciones de integrales (áreas, volúmenes y trabajo)

Esto es importante comprender puesto que en este manual ya no se explica la base, sino es la continuación del manual de Matemática Básica 2.

¿Qué es el tema de técnicas de integración?
Son los métodos que aprenderá para resolver cualquier tipo de integral, dándole herramientas nuevas (fórmulas y teoremas) y ampliará la mente del lector para volverse un artista en la resolución de estas integrales.

En la portada usted observa un tigre que se nota fuerte, de intimidación, pero es un tigre que en el final de este capítulo 1 usted aprenderá a controlar y a notar que no es de miedo sino de utilidad y que es nuestro amigo.

1.1. Integración por partes

La integración por partes es un método que se utiliza cuando debemos integrar una función compuesta (*Tiene una función polinomial multiplicada con una trigonométrica por ponerle un ejemplo:* $\int x^2 * sen(x)dx$) y que usted, aunque cambie la integral de cualquier forma y realice cualquier tipo de sustitución, no se podrá resolver. La forma matemática es:

$$\int f(x) * g(x)dx$$

Pueden ser compuesta por:

- Trigonométrica inversa (**A**)
- Logarítmica (**L**)
- Polinomial (**P**)
- Exponencial (**E**)
- Trigonométrica (**S**)

$f(x)$ y $g(x)$ Pueden ser cualquiera de estas funciones

¿De dónde se obtiene la fórmula?

Para la demostración debe recordarse de la regla del producto (para derivar una función compuesta)

1. Recordamos la fórmula de la regla del producto:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}[f(x) * g(x)] = \frac{df(x)}{dx} * g(x) + \frac{dg(x)}{dx} * f(x)$$

2. Realizamos la siguiente sustitución: $u = f(x)$ y $\mathrm{v} = g(x)$

3. Quedando en la regla del producto:
$$\frac{d}{dx}(u * \mathrm{v}) = \frac{du}{dx} * \mathrm{v} + \frac{d\mathrm{v}}{dx} * u$$

4. Multiplicamos por dx por la izquierda de la ecuación y por la derecha también quedando:
$$d(u * \mathrm{v}) = du * \mathrm{v} + d\mathrm{v} * u$$

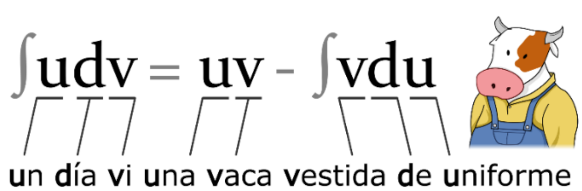
5. Despejamos para dv*u
$$d(u * \mathrm{v}) - \mathrm{du} * \mathrm{v} = d\mathrm{v} * u$$

6. Integramos por la izquierda de la ecuación y por la derecha:
$$\int d(u * \mathrm{v}) - \int du * \mathrm{v} = \int d\mathrm{v} * u$$

7. La ordenamos mejor, recordando que: $\int d(u * \mathrm{v}) = u * \mathrm{v}$
$$u * \mathrm{v} - \int \mathrm{v} * du = \int u * d\mathrm{v}$$

8. Llegamos a la fórmula general:
$$\boxed{\int u * d\mathrm{v} = u\mathrm{v} - \int \mathrm{v}\, du}$$

Una forma peculiar por si le cuesta recordar la fórmula



¿Cómo se resuelven las integrales?

1. Vea qué funciones se están multiplicando (ver *f(x)* y *g(x)*) y en base a ello elija quien será u y quien será dv. Una Ayuda para escoger quien será u es en base a la palabra "**ALPES"**

$$
\begin{array}{lll}
A & = Trigonométrica\ Inversa & [sen^{-1}(x)] \\
L & = Logaritmica & [\log_3 x] \\
P & = Polinomial & [x^2] \\
E & = Exponencial & [e^x] \\
S & = Trigonométrica & [sen(x)]
\end{array}
$$

2. Habiendo identificada u se debe derivar respecto a la variable dependiente (generalmente es respecto a x) por tanto se debe obtener el du.

3. Una vez ya tenga identificado u se debe identificar dv siguiendo la fórmula
$$\int u\ \mathrm{dv} \quad o\ séa\ que\ d\mathrm{v}\ \text{será el resto de la integral}$$

4. Proceda a obtener v, integrando lo que ya identifico: $\mathrm{v} = \int d\mathrm{v}$

5. Una vez obtenidas u y v se deben ingresar en la fórmula
$$\int u\ \ d\mathrm{v} = u\mathrm{v} - \int \mathrm{v}\ du$$

6. Se vuelve a integrar la parte faltante $\int \mathrm{v}\ du$.

7. En algunas integrales se debe repetir el proceso anterior y se debe ir haciendo por aparte (ver *Ejemplo 2*) hasta llegar a la resolución de la integral.

Ejemplo 1

$$\int x * sen(x)\ dx$$

Se identifica qué es una integración por partes.

En base a la palabra ***ALPES*** vemos que:

$$\boldsymbol{u = x} \qquad \text{y qué :} \qquad \mathbf{dv = sen(x)}\ \boldsymbol{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \qquad\qquad \mathrm{v} = \int sen(x)\ dx$$

$$\boldsymbol{du = dx} \qquad\qquad \mathbf{v = -cos(\boldsymbol{x})}$$

Siguiendo la fórmula de integración por partes.

$$\int \boldsymbol{u}\ \mathbf{dv} = \boldsymbol{u} * \mathbf{v} - \int \mathbf{v}\ \boldsymbol{du}$$

$$\int x * sen(x)\ dx = \boldsymbol{x} * \ -\mathbf{cos}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{cos}(\boldsymbol{x}) * \boldsymbol{dx} \quad = \quad -x * \cos(x) + \int \cos(x)\ dx$$

$$\int x * sen(x)\ dx = -x * cos(x) + \ sen(x)$$

$$\int x * sen(x)\ dx = \ sen(x) - x * \cos(x) + C$$

Ejemplo 2

$$\int [\ln(x)]^2 dx$$

1. Realizamos una sustitución: $m = \ln(x)$, $por\ tanto$: $\frac{dm}{dx} = \frac{1}{x}$ y $\boldsymbol{dx = x\,dm}$

   $\boldsymbol{e^m = x}$

2. Sustituyendo:

   $$\int [\ln(x)]^2 \boldsymbol{dx} = \int m^2 * \boldsymbol{xdm} = \int m^2 * \boldsymbol{e^m}\ \boldsymbol{dm}$$

3. Vemos que la integral que queda es una función compuesta (polinomial y exponencial) por lo que debemos identificar u en base a la palabra **ALPES.**

   $\boldsymbol{u = m^2}$ por tanto $\mathrm{dv} = e^m\, dm$

   $\frac{du}{dm} = 2m$ $\mathrm{v} = \int e^m dm$

   $\boldsymbol{du = 2m\ dm}$ $\boldsymbol{\mathrm{v} = e^m}$

4. Ya teniendo identificado u y v las ingresamos en la fórmula de integración por partes

   $$\int u\ d\mathrm{v} = u\mathrm{v} - \int \mathrm{v}\ du$$

   $$\int m^2 * e^m\ dm = \boldsymbol{m^2} * \boldsymbol{e^m} - \int \boldsymbol{e^m} * \boldsymbol{2m\ dm}$$

5. Se debe resolver nuevamente por aparte la integral

   $$\int e^m * 2m\ dm$$

5.1. Identificamos u y v

   $\boldsymbol{u = 2m}$ por tanto $\mathrm{dv} = e^m\ dm$

   $\frac{du}{dm} = 2$ $\mathrm{v} = \int e^m\ dm$

   $\boldsymbol{du = 2\ dm}$ $\boldsymbol{\mathrm{v} = e^m}$

5.2. Volviendo a integrar por partes:

   $$\int u * d\mathrm{v} = \boldsymbol{u\mathrm{v}} - \int \boldsymbol{\mathrm{v}} * \boldsymbol{du}$$

   $$\int e^m * 2m\ dm = \boldsymbol{2m} * \boldsymbol{e^m} - \int \boldsymbol{e^m} * \boldsymbol{2\ dm} = 2me^m - 2\int e^m\ dm$$

   $$\int e^m * 2m\ dm = 2me^m - 2\ e^m \quad \text{Resolviendo así la integral faltante}$$

6. Regresando a la integral en pausa:

   $$\int m^2 * e^m\ dm = m^2 * e^m - \int e^m * 2m\ dm$$

   $$\int m^2 * e^m\ dm = m^2 * e^m - [2me^m - 2\ e^m\ ]$$

7. Volviendo a la variable original:

   $$\int m^2 * e^m\ dm = m^2 * e^m - 2me^m + 2e^m = [\ln(x)]^2 * x - 2x * \ln(x) + 2x$$

   $$\int [\ln(x)]^2 dx = x[\ln(x)]^2 - 2x * \ln(x) + 2x + C$$

Ejemplo 3

$$\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2)\, d\theta$$

1. Realizamos una sustitución: $m = \theta^2$ para ir simplificando la variable de coseno

$$\frac{dm}{d\theta} = 2\theta \quad \text{por tanto:} \quad \boldsymbol{d\theta = \frac{dm}{2\theta}}$$

2. Analizamos los límites de integración (ver sustitución en el paso 1)

$$\text{Cuando:} \quad \theta = \sqrt{\pi/2} \;\; ; \;\; m = \pi/2 \quad \text{y cuando:} \quad \theta = \sqrt{\pi} \;\; ; \;\; m = \pi$$

3. Planteamos la nueva integral

$$\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2)\, \boldsymbol{d\theta} = \int_{\pi/2}^{\pi} \theta^3 * \cos(m) * \boldsymbol{\frac{dm}{2\theta}} = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \theta^2 * \cos(m) * dm$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} m * \cos(m) * dm \quad \text{quedando ya la integral en terminos de } m$$

4. Ahora debemos resolver la integral del paso 3 por partes. Identificamos a u por medio de la palabra **ALPES**

$$\int \boldsymbol{u}\mathbf{dv} = \boldsymbol{u}\mathbf{v} - \int \mathbf{v}\boldsymbol{du}$$

$$\boldsymbol{u = m} \quad \textit{por tanto} \quad \mathbf{dv} = \boldsymbol{\cos(m)\, dm}$$

$$\frac{du}{dm} = 1 \qquad \mathrm{v} = \int \cos(m)\, dm$$

$$\boldsymbol{du = dm} \qquad \mathbf{v} = \boldsymbol{sen(m)}$$

$$\int \boldsymbol{m * \cos(m)\, dm = m * sen(m) - \int sen(m)\, dm}$$

4.1. Procedemos a resolver la integral que contiene sen(m)

$$\int m * \cos(m)\, dm = m * sen(m) - \int sen(m)\, dm$$

$$\int m * \cos(m)\, dm = m * sen(m) - * - \cos(m) = m * sen(m) + \cos(m)$$

4.2. Multiplicamos el resultado por $1/2$ ya que no se tomó en cuenta en la resolución

$$\frac{1}{2}\int m * \cos(m)\, dm = \frac{1}{2} m * sen(m) + \frac{1}{2}\cos(m)$$

5. Evaluamos la integral

$$\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} m * \cos(m) * dm = \frac{1}{2} m * sen(m) + \frac{1}{2}\cos(m)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi} = \left[0 - \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{1}{2} * \frac{\pi}{2} * 1\right] = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2)\, d\theta = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = -1.285398$$

1.2. Integrales trigonométricas

En esta sección no se enseña una fórmula como tal, sino más bien se enseñan los cambios que se pueden realizar a través de **identidades trigonométricas** para facilitar la resolución que contenga una función trigonométrica. También se le enseña una estrategia para resolver ciertas integrales que contienen seno y coseno con potencias dadas, así como integrales que contienen tangente con secante. En resumen, se le enseña a jugar con las antiderivadas de esas funciones.

Para recordar dichas identidades trigonométricas vea la siguiente tabla:

Tabla 1.2 a

Identidad	Identidad	Identidad	Identidad
$sen^2(x) + cos^2(x) = 1$	$1 + cot^2(x) = csc^2(x)$	$tan^2(x) + 1 = sec^2(x)$	$sen(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[sen(A-B) + sen(A+B)]$
$cos^2(x) - sen^2(x) = \cos(2x)$	$2sen(x) * \cos(x) = sen(2x)$	$\cos(3x) = 4cos^3(x) - 3\cos(x)$	$sen(A)\,sen(B) = \frac{1}{2}[cos(A-B) - cos(A+B)]$
$\frac{1}{2}[1 + cos(2x)] = cos^2(x)$	$cos^4(x) - sen^4(x) + 1 = 2cos^2(x)$	$sen(A \pm B) = sen(A)\cos(B) \pm sen(B)\cos(A)$	$cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[cos(A-B) + cos(A+B)]$
$\frac{1}{2}[1 - \cos(2x)] = sen^2(x)$	$sen(3x) = 3sen(x) - 4sen^3(x)$	$cos(A+B) = cos(A)\cos(B) - sen(A)sen(B)$	$\csc(x) = \frac{1}{sen(x)}$; $sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$
$\frac{1}{2}[1 + cos(4x)] = cos^2(2x)$	$\frac{1}{2}[1 - cos(4x)] = sen^2(2x)$	$cos(A-B) = cos(A)\cos(B) + sen(A)sen(B)$	$\tan(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$; $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{sen(x)}$

En el siguiente ejemplo se demuestra lo antes dicho. Se hace un cambio a través de una identidad trigonométrica.

Ejemplo 1

$$\int sen^2(x)dx$$

1. Nos recordamos de la identidad **(ver Tabla 1.2.a)**

$$\frac{1}{2}[1 - \cos(2x)] = sen^2(x)$$

2. Realizamos la sustitución de identidad

$$\int sen^2x\,dx = \int \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]dx = \frac{1}{2}\int 1 - \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\int dx - \int \cos(2x)\,dx\right]$$

3. Recordando que:

$$\int dx = x \qquad y \qquad \int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}sen(2x) \longrightarrow \text{(se resuelve por sustitución)}$$

4. Entonces:

$$\frac{1}{2}\left[\int dx - \int \cos(2x)\,dx\right] = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}sen(2x)\right] = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen(2x)$$

$$\int sen^2(x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen(2x) + C$$

Ejemplo 2

$$\int tan^2\left(\frac{x}{3}\right)dx$$

1. Se realiza la sustitución

$$u=\frac{x}{3}\quad \text{procedemos a derivar:}\quad \frac{du}{dx}=\frac{1}{3}\qquad \text{y por tanto:}\ \ dx=3\,du$$

2. Sustituimos en la integral

$$\int tan^2\left(\frac{x}{3}\right)dx\ =\int tan^2(u)*3\,du\ \ =\ 3\int tan^2(u)\,du$$

3. Debemos ver la **Tabla 1.2.a** y ver la identidad que dice:

$$tan^2(x)+1=sec^2(x)$$

$$\boxed{tan^2(x)=sec^2(x)-1}\quad \text{Despejando para tangente}$$

3.1. ¿De dónde se obtiene esa identidad?

$$sen^2x+cos^2x=1\quad \text{Del círculo unitario obtenemos}$$

$$\frac{sen^2x}{cos^2x}+\frac{cos^2x}{cos^2x}=\frac{1}{cos^2x}\qquad \text{Se divide todo por } \cos^2\text{x}$$

$$\frac{senx}{cosx}=tanx\quad ;\quad \frac{1}{cosx}=secx\qquad \text{Nos recordamos de las identidades}$$

$$tan^2x+1=sec^2x\quad \text{Llegando a tener}$$

4. Realizando la sustitución de identidad trigonométrica

$$3\int tan^2(u)\,du=3\int sec^2(u)-1\,du$$

5. Recordamos de la tabla de integración que:

$$\int sec^2(x)dx=tanx\qquad \text{y que:}\quad \int 1\,dx=x$$

6. Entonces:

$$3\int \sec^2(u)-1\,du\quad =\quad 3\,[\tan(u)-u]$$

7. Volvemos a la variable original

$$3[\tan(u)-u]\ =\ 3\tan(u)-3u\ =\ 3\tan\left(\frac{x}{3}\right)-3\left(\frac{x}{3}\right)\ =\ 3\tan\left(\frac{x}{3}\right)-x$$

$$\int tan^2\left(\frac{x}{3}\right)dx\ =\ 3\tan\left(\frac{x}{3}\right)-x$$

Como se puede notar querido lector, es lo que se le explicaba anteriormente. Para resolver este tipo de integrales simplemente se debe conocer, mejor si es de memoria, las identidades trigonométricas puesto que debe ir jugando con la integral original, como en un cubo de rubik y buscándole el modo a la integral. Vea el cambio que se realiza para resolver la siguiente integral. Se separan por leyes de exponentes y luego se juega con las identidades.

Ejemplo 3

$$\int_0^{\pi/2} sen^5(x)dx$$

1. Separamos la integral de la siguiente manera:

$$\int_0^{\pi/2} sen^5(x)dx = \int_0^{\pi/2} sen(x) * sen^4(x)dx$$

2. Se debe recordarnos de la identidad (Ver **Tabla 1.2.a**)

$$sen^2x + cos^2x = 1 \qquad \text{o también} \qquad sen^2x = 1 - cos^2x$$

3. Entonces realizamos la siguiente separación de potencias:

$$\int_0^{\pi/2} sen(x) * sen^4(x)dx = \int_0^{\pi/2} sen(x) * [sen^2(x)]^2dx \ \ \text{ahora realizamos la sustitución}$$

$$\int_0^{\pi/2} sen(x) * [1 - cos^2x]^2dx$$

4. Se realiza la siguiente sustitución:

$$\boldsymbol{u = \cos(x)} \quad ; \qquad \frac{du}{dx} = -sen(x) \qquad \text{por tanto:} \ \ \boldsymbol{dx = \frac{du}{-sen(x)}}$$

5. Se analiza los límites de integración:

$$\text{Cuando:} \ x = 0 \ \ u = 1 \qquad ; \qquad cuando \ \ x = {}^{\pi}/_{2} \qquad u = 0$$

6. Planteando la nueva integral (Del paso 3.)

$$\int_0^{\pi/2} sen(x)\,[1 - (\boldsymbol{\cos x})^2]^2\boldsymbol{dx} \ = \ \int_1^0 sen(x)\,[1 - \boldsymbol{u}^2]^2 * \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{-sen(x)}} \ = \ \int_1^0 -[1 - \boldsymbol{u}^2]^2 * \boldsymbol{du}$$

$$= \int_1^0 -[1 - u^2]^2 * du = \int_1^0 -[1 - u^2]^2 * du = -\int_1^0 1 - 2u^2 + u^4\, du$$

7. Cambiando los límites de integración:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

8. Continuando

$$-\int_1^0 1 - 2u^2 + u^4\, du \ = \int_0^1 1 - 2u^2 + u^4\, du = u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 \Bigg|_0^1 \ = \frac{8}{15}\ (0.533333)$$

$$\int_0^{\pi/2} sen^5(x)dx = \frac{8}{15} = \ 0.533333$$

Como se puede ver, simplemente se trata de cambios a través de las identidades. Es ir jugando con cambios hasta que la integral vaya tomando un camino de solución. Ahora le mostraré unos casos peculiares de las integrales trigonométricas.

$1.2.1$ Estrategia para la evaluación de $\int sen^m x * cos^n x\, dx$

Los siguientes tres casos son estrategias para evaluar integrales en donde se está multiplicando seno y coseno con potencias diferentes. Estos casos son posibles ya que la derivada de seno es coseno y la derivada de coseno es menos el seno.

a) Si la potencia del coseno es impar $(n = 2k + 1)$, se extrae un factor coseno de esta forma.

$$\int sen^m x * \ cos^{2k+1} x\, dx \ = \int sen^m x * (cos^2 x)^k\ cosx\, dx \ = \int sen^m x\, (1 - sen^2 x)^k \cos x\, dx$$

Luego se hace la sustitución: $u = senx$

Ejemplo 4.a

$$\int sen^2 x\, cos^3 x\ dx$$

1. Separamos el coseno y de coseno buscamos pasarnos a seno por la identidad trigonométrica
$$\int sen^2 x * \mathbf{cos^2 x} * cosx\, dx = \int sen^2 x * (\mathbf{1 - sen^2 x})\ cosx\, dx$$
2. Se realiza la siguiente sustitución
$$u = senx \quad \text{entonces} \quad \frac{du}{dx} = \cos(x) \quad \text{y finalizando:} \quad du = \cos(x)\, dx$$
3. Realizando la sustitución nos queda
$$\int u^2(1 - u^2) * du \ = \int u^2 - u^4 du \ = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}$$
4. Se regresa a la variable original
$$\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \ = \frac{1}{3} sen^3 x - \frac{1}{5} sen^5 x + C$$
$$\int sen^2 x\, cos^3 x\ dx = \frac{1}{3} sen^3 x - \frac{1}{5} sen^5 x + C$$

b) Si la potencia del seno es impar $(m = 2k + 1)$, se extrae un factor seno y se utiliza

$$sen^2 x = 1 - cos^2 x$$

$$\int sen^{2k+1} x * cos^n x\, dx = \int (sen^2 x)^k * \ senx * cos^n x\, dx = \int (1 - cos^2 x)^k * \ senx * cos^n x\, dx$$

Luego se hace la sustitución: $u = cosx$

Nota: Debe observar la potencia de ambos, seno y coseno es impar se puede utilizar a) o b)

Ejemplo 4.b

$$\int sen^3 x * \ cos^2 x\, dx$$

1. Separamos el seno y de seno buscamos pasarnos a coseno por la identidad trigonométrica
$$\int sen^2 x * cos^2 x * senx\, dx = \int (1 - cos^2 x) cos^2 x * sen(x) dx$$
2. Se realiza la sustitución

$$u = cosx \qquad \frac{du}{dx} = -sen(x) \qquad dx = \frac{du}{-sen(x)}$$

3. Se Ingresa la sustitución de la integral del paso 1

$$\int (1 - cos^2 x) cos^2 x * sen(x) dx = \int (1 - u^2) * u^2 * -du = \int (u^2 - 1) * u^2\, du$$

$$\int u^4 - u^2\, du \quad = \quad \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}$$

4. Regresando a la variable original

$$\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \quad = \quad \frac{1}{5} cos^5 x - \frac{1}{3} cos^3 x + C$$

$$\int sen^3 x * cos^2 x\, dx = \frac{1}{5} cos^5 x - \frac{1}{3} cos^3 x + C$$

c) Si las potencias de ambos, seno y coseno son pares utilizamos las identidades del ángulo medio

$$sen^2 x = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)] \quad ; \quad cos^2 x = \frac{1}{2}[1 + \cos(2x)] \quad ; \quad 2senx * cosx = sen(2x)$$

Ejemplo 4.c

$$\int sen^2 x\, cos^2 x\, dx$$

1. Recordamos la identidad (ver **Tabla 1.2.a**)

$$sen^2(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)] \quad ; \quad cos^2(x) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2x)]$$

2. Analizamos la multiplicación de ambas identidades

$$sen^2(x) * cos^2(x) \quad = \quad \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)] * \frac{1}{2}[1 + \cos(2x)] = \frac{1}{4}[1 - cos^2(2x)]$$

3. Sustituimos el resultado del paso 2. En la integral

$$\int sen^2 x\, cos^2 x\, dx = \int \frac{1}{4}[1 - cos^2(2x)]\, dx \quad = \quad \frac{1}{4} \int 1 - cos^2(2x) dx$$

4. Nuevamente sustituimos la identidad de coseno al cuadrado de 2x.

$$= \frac{1}{4} \int 1 - \frac{1}{2}[1 + \cos(4x)]\, dx \quad = \quad \frac{1}{4} \int 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)\, dx \quad = \quad \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8} \int 1 - \cos(4x)\, dx \quad = \quad \frac{1}{8}\left[x - \frac{sen(4x)}{4}\right] \quad = \quad \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} sen(4x) + c$$

$$\int sen^2 x\, cos^2 x\, dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} sen(4x) + c$$

Sabiendo que la derivada de tangente es secante al cuadrado. A continuación, veremos los casos cuando tenemos tangente multiplicando con tangente y sus exponentes.

1.2.2 Estrategia para la evaluación de $\int tan^m x * sec^n x\, dx$

De igual manera se juega con el conocimiento que la derivada de tangente es secante al cuadrado y que la derivada de secante es secante*tangente. Se analizan los dos siguientes casos para la integración de estas multiplicaciones con distintos exponentes.

d) Si la potencia de la secante es par ($n = 2k\ ,\ k \geq 2$), se extrae un factor sec^2x y se utiliza la identidad: $sec^2x = 1 + tan^2x$ para expresar los factores que quedan en términos de $tanx$

$$\int tan^m x * sec^{2k}x\, dx = \int tan^m x * (sec^2x)^{k-1} * sec^2x\, dx = \int tan^m x\,(1 + tan^2x)^{k-1} sec^2 x\, dx$$

Luego se hace la sustitución $u = tanx$

Ejemplo 4.d

$$\int tan^5x * sec^4x\ dx$$

1. Identificamos el caso **d)**. Extraemos el factor sec^2x

$$\int tan^5x * sec^4x\ dx = \int tan^5x * \boldsymbol{sec^2x} * sec^2x\ dx = \int tan^5x * [\boldsymbol{1 + tan^2x}] * sec^2x\ dx$$

2. Realizamos la respectiva sustitución

$$\boldsymbol{u = \tan x}$$

$$\frac{du}{dx} = sec^2x \quad \text{por tanto:} \quad \boldsymbol{dx = \frac{du}{sec^2x}}$$

3. Lo sustituimos en la integral

$$\int \boldsymbol{tan^5x} * [1 + \boldsymbol{tan^2x}] * sec^2x\ \boldsymbol{dx} = \int \boldsymbol{u^5} * [1 + \boldsymbol{u^2}] * \cancel{sec^2x} * \frac{\boldsymbol{du}}{\cancel{\boldsymbol{sec^2x}}}$$

$$\int u^5 * [1 + u^2]\, du$$

4. Realizamos la integral del paso 3.

$$\int u^5 * [1 + u^2]\, du = \int u^5 + u^7\ du = \frac{1}{6}u^6 + \frac{1}{8}u^8 + C$$

5. Volvemos a la variable original.

$$\frac{1}{6}u^6 + \frac{1}{8}u^8 + C \ = \ \frac{1}{6}tan^6x + \frac{1}{8}tan^8x + C$$

$$\int tan^5x * sec^4x\ dx \ = \ \frac{1}{6}tan^6x + \frac{1}{8}tan^8x + C$$

e) Si la potencia de la tangente es impar $(m = 2k + 1)$, se extrae un factor $sec * tanx$ y se utiliza la identidad: $tan^2x = sec^2x - 1$ para expresar los factores que quedan en términos de $secx$

$$\int tan^m x * sec^n x\, dx = \int (tan^2x)^k * sec^{n-1}x * secx * tanx\, dx$$

$$= \int (sec^2x - 1)^k sec^{n-1} x * secx * tanx\, dx \qquad \text{Luego se hace } u = secx$$

El ejemplo anterior (del caso d) también pudimos haberlo resuelto por el caso **e)** ya que la potencia de tangente era impar.

Ejemplo 4.e

$$\int tan^5x * sec^2x\ dx$$

1. Reconocemos el caso **e).** Tratamos de llevar todo en términos de secante y sacar el factor $tanx * secx$

$$\int tan^5x * sec^2x\ dx = \int tan^4x * secx * tanx * secx\ dx\ = \int (sec^2x - 1)^2 * secx * secx * tanx\, dx$$

2. Realizamos la sustitución

$$u = secx \quad ; \quad \frac{du}{dx} = secx * tanx \quad ; \quad \text{por tanto } dx = \frac{du}{secx * tanx}$$

3. Sustituyendo en la integral del paso 1.

$$\int (sec^2x - 1)^2 * secx * secx * tanx\, dx = \int (u^2 - 1)^2 * u * secx * \cancel{tanx} * \frac{du}{secx * \cancel{tanx}}$$

4. Quedando la integral

$$\int (u^2 - 1)^2 * u\, du \ = \int u * (u^4 - 2u^2 + 1)\, du \ = \int u^5 - 2u^3 + u\, du$$

5. Resolviendo la integral

$$\int u^5 - 2u^3 + u\, du \ = \frac{1}{6}u^6 - \frac{2}{4}u^4 + \frac{1}{2}u^2 \ = \frac{1}{6}u^6 - \frac{1}{2}u^4 + \frac{1}{2}u^2$$

6. Volviendo a la variable original

$$\frac{1}{6}u^6 - \frac{1}{2}u^4 + \frac{1}{2}u^2 \ = \frac{1}{6}sec^6x - \frac{1}{2}sec^4x + \frac{1}{2}sec^2x + C$$

$$\int tan^5x * sec^2x\ dx \ = \frac{1}{6}sec^6x - \frac{1}{2}sec^4x + \frac{1}{2}sec^2x + C$$

A través de estos ejemplos vuelvo a repetirle querido estudiante que estas integrales se resuelven jugando con las identidades y con los casos de derivación he integración. Algunos problemas se resuelven utilizando también **integración por partes** como:

Ejemplo 4.e.2.

$$\int sec^3x\, dx$$

1. Para resolverla debe descomponerla por leyes de potencia

$$\int sec^3x\, dx = \int sec^2x * secx\, dx$$

2. Identificamos a $u\ y\ dv$

$$u = secx \qquad dv = sec^2x\, dx$$

$$\frac{du}{dx} = secx * tanx \qquad \text{por tanto:} \quad \boldsymbol{du = secx * tanx\, dx} \qquad \mathbf{v} = \int sec^2x\, dx \; = \mathbf{tan}(\boldsymbol{x})$$

3. Lo Ingresamos en la fórmula de integración por partes

$$\int \boldsymbol{u}\, \mathbf{dv} = \boldsymbol{u}\mathbf{v} - \int \mathbf{v}\, \boldsymbol{du}$$

$$\int \boldsymbol{sec^2x * secx\, dx} = \boldsymbol{secx * tanx} - \int \boldsymbol{tanx * secx * tanx\, dx}$$

$$\int sec^2x * secx\, dx = secx * tanx - \int tan^2x * secx\, dx$$

4. Resolvemos por aparte la integral (como no cumple con ninguno de los casos anteriores se intenta jugar con las identidades).

$$\int sec^2x * secx\, dx = secx * tanx - \int tan^2x * secx\, dx$$

$$\int sec^2x * secx\, dx = secx * tanx - \int (sec^2x - 1) * secx\, dx$$

$$\int sec^3x\, dx = secx * tanx - \int sec^3x - secx\, dx$$

$$\int sec^3x\, dx = secx * tanx - \int \boldsymbol{sec^3x\, dx} + \int secx\, dx$$

5. Debe darse cuenta que nuevamente nos salió la misma integral que se quiere encontrar. Entonces como está restando por la derecha se pasa a sumar a la izquierda.

$$\int sec^3x\, dx \;=\; secx * tanx \;-\; \int \boldsymbol{sec^3x\, dx} \;+ \int secx\, dx$$

$$\int sec^3x\, dx \;+\; \int \boldsymbol{sec^3x\, dx} \;=\; secx * tanx + \int secx\, dx$$

$$\mathbf{2} \int sec^3x\, dx = secx * tanx + \int secx\, dx$$

$$\mathbf{2} \int sec^3x\, dx = secx * tanx + ln(secx + tanx)$$

6. El **2** que está multiplicando pasará al otro lado a dividir quedando la integral

$$\int sec^3x\, dx \;=\; \frac{1}{2} secx * tanx \;+\; \frac{1}{2} ln(secx + tanx) + C$$

En este punto se aprende dos nuevas identidades de integración que usted debe añadir a su formulario. Una de ellas la utilizamos en el ejercicio anterior.

$$\boxed{\begin{aligned} \int tanx\;\; dx \;&=\; \ln(secx) + C \\ \int secx\;\; dx &= \ln(secx + \tan x) + C \end{aligned}}$$

A continuación, se verá los últimos tres casos de estrategias para la resolución de integrales trigonométricas.

1.2.3 Estrategia para la evaluación de $\int sen(Ax) * cos(Bx)\, dx$

Estrategia para la evaluación de $\int sen(Ax) * sen(Bx)\, dx$

Estrategia para la evaluación de $\int cos(Ax) * cos(Bx)\, dx$

En estos casos se basan más que todo en identidades trigonométricas. La recomendación es que se memorice, pero si no lo logra, puede sustituir valores para corroborar si de la identidad que usted se recuerda es correcta.

f) Para evaluar la integral de forma

$$\int sen(A) * \cos(B)\, dx$$

Se utiliza la identidad : $sen(A) * \cos(B) = \frac{1}{2}[sen(A-B) + sen(A+B)]$

Ejemplo 4.f

$$\int sen(8x) * \cos(5x)\ dx$$

1. Identificamos rápidamente la identidad. Luego identificamos *A* y *B*
   $A = 8x \quad y \quad B = 5x$

2. Utilizando la identidad será

$$sen(A) * \cos(B) = \frac{1}{2}[sen(A-B) + sen(A+B)]$$

$$sen(8x) * \cos(5x) = \frac{1}{2}[sen(8x-5x) + sen(8x+5x)]$$

$$\mathbf{sen(8x) * cos(5x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[\mathbf{sen(3x) + sen(13x)}]$$

3. Sustituyendo el resultado del paso 2. En el paso 1.

$$\int \mathbf{sen(8x) * cos(5x)}\ dx = \int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[\mathbf{sen(3x) + sen(13x)}]\, dx$$

4. Resolviendo la integral

$$\int \frac{1}{2}[sen(3x) + sen(13x)]\, dx = \frac{1}{2}\int sen(3x) + sen(13x)\, dx$$

$$\frac{1}{2}\int sen(3x)\, dx + \frac{1}{2}\int sen(13x)\, dx = -\frac{1}{2} * \frac{1}{3}\cos(3x) - \frac{1}{2} * \frac{1}{13}\cos(13x) + C$$

$$\int sen(8x) * \cos(5x)\ dx = -\frac{1}{6} * \cos(3x) - \frac{1}{26} * \cos(13x) + C$$

g) Para evaluar la integral de forma

$$\int sen(A) * \text{sen}(B)\, dx$$

Se utiliza la identidad: $sen(A) * sen(B) = \frac{1}{2}[cos(A-B) - cos(A+B)]$

Ejemplo 4.g

$$\int sen(8x) * \mathrm{sen}(5x)\ dx$$

1. Identificamos rápidamente la identidad. Luego identificamos *A* y *B*
   $A = 8x \quad y \quad B = 5x$

5. Utilizando la identidad será
   $$sen(A) * sen(B) \;=\; \frac{1}{2}[cos(A-B) - cos(A+B)]$$
   $$sen(8x) * \mathrm{sen}(5x) = \frac{1}{2}[cos(8x-5x) - cos(8x+5x)]$$
   $$\boldsymbol{sen(8x) * \mathrm{sen}(5x)} = \boldsymbol{\frac{1}{2}[cos(3x) - cos(13x)]}$$

6. Sustituyendo el resultado del paso 2. En el paso 1.
   $$\int \boldsymbol{sen(8x) * \mathrm{sen}(5x)}\ dx = \int \boldsymbol{\frac{1}{2}[cos(3x) - cos(13x)]}\ dx$$

7. Resolviendo la integral
   $$\int \frac{1}{2}[cos(3x) - cos(13x)]\ dx = \frac{1}{2}\int cos(3x) - cos(13x)\ dx$$
   $$\frac{1}{2}\int cos(3x)\ dx - \frac{1}{2}\int cos(13x)\ dx = \frac{1}{2} * \frac{1}{3}\mathrm{sen}(3x) - \frac{1}{2} * \frac{1}{13}\mathrm{sen}(13x) + C$$

$$\int sen(8x) * \mathrm{sen}(5x)\ dx = \frac{1}{6} * \mathrm{sen}(3x) - \frac{1}{26} * \mathrm{sen}(13x) + C$$

h) Para evaluar la integral de forma

$$\int \cos(A) * \cos(B)\ dx$$

Se utiliza la identidad: $$cos(A) * cos(B) = \frac{1}{2}[cos(A-B) + cos(A+B)]$$

Ejemplo 4.h

$$\int cos(8x) * \cos(5x)\ dx$$

1. Identificamos rápidamente la identidad. Luego identificamos *A* y *B*
   $A = 8x \quad y \quad B = 5x$

2. Utilizando la identidad será
   $$cos(A) * cos(B) \;=\; \frac{1}{2}[cos(A-B) + cos(A+B)]$$
   $$cos(8x) * \cos(5x) = \frac{1}{2}[cos(8x-5x) + cos(8x+5x)]$$

$$\boldsymbol{cos(8x) * \cos(5x) = \frac{1}{2}[cos(3x) + cos(13x)]}$$

3. Sustituyendo el resultado del paso 2. En el paso 1.

$$\int \boldsymbol{cos(8x) * \cos(5x)}\ dx = \int \boldsymbol{\frac{1}{2}[cos(3x) + cos(13x)]}\ dx$$

4. Resolviendo la integral

$$\int \frac{1}{2}[cos(3x) + cos(13x)]\ dx = \frac{1}{2}\int cos(3x) + cos(13x)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int cos(3x)\ dx + \frac{1}{2}\int cos(13x)\ dx = \frac{1}{2} * \frac{1}{3}\mathrm{sen}(3x) + \frac{1}{2} * \frac{1}{13}\mathrm{sen}(13x) + C$$

5. La respuesta será

$$\int cos(8x) * \cos(5x)\ dx = \frac{1}{6} * \mathrm{sen}(3x) + \frac{1}{26} * \mathrm{sen}(13x) + C$$

Como puede ver querido estudiante, la resolución de este tipo de integrales no es difícil, así que no se mentalice que lo es. Con calma debe ver:

- ¿Qué tipo de identidad debe realizar?
- Debe ver con calma si debe realizar la integral que le están dando por partes (como el ejemplo de la integral de secante al cubo).
- Si debe utilizar alguno de los casos antes mostrados (ocho casos vistos)

1.3. Integrales por sustitución trigonométrica

Existen algunas integrales que no se pueden resolver, ni por método de sustitución ni integración por partes. No siendo integrales trigonométricas originales, se realiza una sustitución que hace que se conviertan en las mismas.

¿Qué tipos de integrales serán las de sustitución trigonométrica?

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \quad ; \quad \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} dx \quad ; \quad \int \sqrt{4+2x^2}\, dx \quad ; \quad \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{3+x^2}}\, dx$$

Con este tipo de integrales se debe realizar una sustitución trigonométrica. La idea es que de las integrales anteriores se conviertan en integrales trigonométricas (como las aprendidas a resolver en la sección 1.2)

¿Por qué se realiza una sustitución trigonométrica?

1. Pongamos un ejemplo de integral

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx$$

2. Nos recordamos de la identidad trigonométrica

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$

3. Despejamos para coseno

$$cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$$
$$cos\theta = \sqrt{1 - sen^2\theta}$$

4. Realizamos la sustitución

$$\boldsymbol{x = sen\theta}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = cos\theta \quad \text{por tanto} \quad \boldsymbol{dx = cos\theta * d\theta}$$

5. Sustituimos en la integral

$$\int \sqrt{1-\boldsymbol{x^2}}\,\boldsymbol{dx} = \int \sqrt{1-\boldsymbol{sen^2\theta}} * \boldsymbol{cos\theta * d\theta}$$

6. Sustituyendo el resultado del paso 3. En el paso 5.

$$\int \sqrt{\boldsymbol{1 - sen^2\theta}} * cos\theta * d\theta = \int \boldsymbol{cos\theta} * cos\theta * d\theta = \int cos^2\theta\, d\theta$$

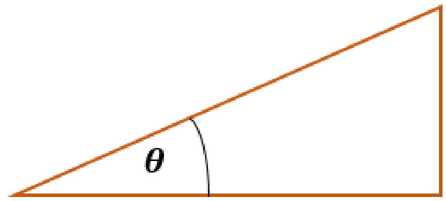
7. Vea que el resultado del paso 6 se llega a una integral trigonométrica.

$$\int cos^2\theta\, d\theta = \int \frac{1}{2}[1+\cos(2\theta)]\, d\theta = \frac{1}{2}\int 1+\cos(2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{sen(2\theta)}{2}\right]$$

$$\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\boldsymbol{sen(2\theta)} \quad = \quad \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4} * \boldsymbol{2sen\theta * cos\theta} \quad = \quad \boldsymbol{\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2} * sen\theta * cos\theta}$$

8. ¿Cómo volvemos a la variable original?
Para regresar a la variable original necesitamos analizar el siguiente triángulo.

8.1. Ingresamos un triángulo rectángulo con ángulo θ (El de la sustitución)



8.2. Identificamos los catetos, opuesto, adyacente e hipotenusa. Como la sustitución era

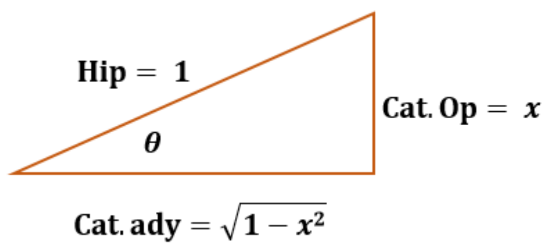
$$x = sen\theta$$

$$sen^{-1}x = \theta \quad \text{Despejamos para } \theta$$

Sabiendo que el ángulo opuesto a θ es el de enfrente y adyacente es el de alado

$$sen\theta = \frac{\text{Cat. Op}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{x}{1} \quad \text{Esto se obtiene de la sustitución}$$

Entonces ya tenemos identificado los lados



8.3. El cateto adyacente se deduce por Pitágoras. Como se tiene la hipotenusa y el cateto opuesto

$$\text{Cad. ady} = \sqrt{\text{Hip}^2 - \text{Cat. Op}^2} = \sqrt{1^2 - x^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

8.4. Ya tenemos seno. Ahora debemos identificar el coseno (a través del triángulo)

$$cos\theta = \frac{\text{Cat. ady}}{\text{Hip}} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\boldsymbol{cos\theta = \sqrt{1 - x^2}}$$

9. Volviendo a la variable original del resultado del paso 7.

$$\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2} * sen\theta * cos\theta = \frac{1}{2}sen^{-1}x + \frac{1}{2} * x * \sqrt{1 - x^2}$$

10. Llegando a la respuesta

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}sen^{-1}x + \frac{1}{2}x * \sqrt{1 - x^2} + C$$

Esta integral se pudo ver un poco larga en la resolución. Pero a medida que se vaya adquiriendo experiencia en resolverlas se hará cada vez más fácil y no se necesitará de tantos pasos.

La siguiente tabla es para ver qué sustitución se debe realizar en ciertas expresiones.

Tabla 1.3.a

Tabla de Sustituciones Trigónometricas			
Expresión	**Sustitución**	**Identidad**	**Al momento de Sustituir**
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\,sen\theta \;\; ; \;\; -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - sen^2\theta = cos^2$	$\sqrt{a^2 - a^2sen^2\theta} = \sqrt{a^2[1-sen^2\theta]} = a\sqrt{cos^2\theta} = \boldsymbol{acos\theta}$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\,tan\theta \;\; ; \;\; -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + tan^2\theta = sec^2$	$\sqrt{a^2 + a^2tan^2\theta} = \sqrt{a^2[1+tan^2\theta]} = a\sqrt{sec^2\theta} = \boldsymbol{asec\theta}$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\,sec\theta \;\; ; \;\; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \;\; o \;\; \pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	$sec^2\theta - 1 = tan^2\theta$	$\sqrt{a^2sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2[sec^2\theta - 1]} = a\sqrt{tan^2\theta} = \boldsymbol{atan\theta}$

Ejemplo 1

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}dx$$

1. Iniciamos con la respectiva sustitución (en base a la **Tabla 1.3.a**)

   $a = 3$

   $\boldsymbol{x = 3sec\theta}$; derivamos $\frac{dx}{d\theta} = 3sec\theta * tan\theta$ por tanto: $\boldsymbol{dx = 3sec\theta * tan\theta\, d\theta}$

   $\boldsymbol{x^2 = 9sec^2\theta}$; $\boldsymbol{x^3 = 27sec^3\theta}$

2. Sustituimos

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}dx = \int \frac{\sqrt{9sec^2\theta - 9}}{27sec^3\theta} * 3sec\theta * tan\theta\, d\theta = \frac{1}{9}\int \frac{\sqrt{9} * \sqrt{sec^2\theta - 1}}{sec^3\theta} * sec\theta * tan\theta\, d\theta$$

3. Simplificamos un poco

$$\frac{1}{9}\int \frac{\sqrt{9} * \sqrt{sec^2\theta - 1}}{sec^3\theta} * sec\theta * tan\theta\, d\theta = \frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{sec^2\theta - 1}}{sec^2\theta} * tan\theta\, d\theta$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{\boldsymbol{sec^2\theta - 1}}}{sec^2\theta} * tan\theta\, d\theta = \frac{1}{3}\int \frac{\boldsymbol{tan(\theta)}}{sec^2\theta} * tan\theta\, d\theta = \frac{1}{3}\int \frac{tan^2\theta}{sec^2\theta}d\theta$$

4. Recordamos la identidad

$$\tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta} \quad ; \quad sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$$

5. Sustituimos esas identidades del paso 4. En la integral del paso 3.

$$\frac{1}{3}\int \frac{tan^2\theta}{sec^2\theta}d\theta = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{sen^2\theta}{cos^2\theta}}{\frac{1}{cos^2\theta}}d\theta$$

6. Utilizamos la ley de extremidades (Ley del Sandwiche para simplificar)

$$\frac{1}{3}\int \frac{\frac{sen^2\theta}{cos^2\theta}}{\frac{1}{cos^2\theta}}d\theta = \frac{1}{3}\int \frac{sen^2\theta * cos^2\theta}{cos^2\theta}d\theta = \frac{1}{3}\int sen^2\theta\, d\theta$$

7. Para resolver esa integral debemos utilizar la identidad de la **Tabla 1.2.a**

$$\frac{1}{3}\int sen^2\theta\, d\theta \;=\; \frac{1}{3}\int \frac{1}{2}[1-\cos(2\theta)]\, d\theta \;=\; \frac{1}{6}\int 1-\cos(2\theta)\, d\theta =$$

$$\frac{1}{6}\left[\theta-\frac{1}{2}sen(2\theta)\right] = \frac{1}{6}\theta-\frac{1}{12}sen(2\theta) \;=\; \frac{1}{6}\theta-\frac{1}{12}*2sen\theta*cos\theta = \frac{1}{6}\theta \;-\; \frac{1}{6}sen\theta*cos\theta$$

8. Debemos regresar a la variable original

$$\boldsymbol{x = 3sec\theta}$$

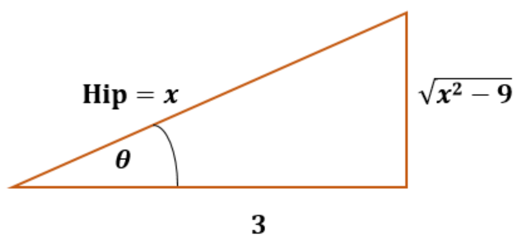
$$x = \frac{3}{cos\theta} \quad ; \quad cos\theta = \frac{3}{x}$$

$$\boldsymbol{\theta = cos^{-1}\left(\frac{3}{x}\right)}$$

8.1. La identidad de coseno dice

$$cos\theta = \frac{\text{Cat. ady}}{\text{Hip}} \quad \text{por tanto:} \quad 3 = \text{Cat. adyacente} \quad \text{y} \quad x = \text{Hipotenusa}$$

8.2. Analizamos el triángulo (El cateto opuesto se obtiene por Pitágoras)



8.3. Analizando el seno y coseno tenemos

$$\boldsymbol{cos\theta = \frac{3}{x}} \quad ; \quad \boldsymbol{sen\theta = \frac{\text{Cat. opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}}$$

9. Volviendo a la variable original del paso 7.

$$\frac{1}{6}\theta-\frac{1}{6}sen\theta*cos\theta \;=\; \frac{1}{6}\boldsymbol{\theta}-\frac{1}{6}\boldsymbol{sen\theta}*\boldsymbol{cos\theta} \;=\; \frac{1}{6}*\boldsymbol{cos^{-1}\left(\frac{3}{x}\right)}-\frac{1}{6}*\boldsymbol{\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}}*\boldsymbol{\frac{3}{x}}$$

$$= \frac{1}{6}*cos^{-1}\left(\frac{3}{x}\right)-\frac{1}{6}*\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}*\frac{3}{x} \;=\; \frac{1}{6}cos^{-1}\left(\frac{3}{x}\right)-\frac{1}{2}*\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}$$

10. La respuesta final es entonces:

$$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}dx \;=\; \frac{1}{6}cos^{-1}\left(\frac{3}{x}\right)-\frac{1}{2}*\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}+C$$

11. Note que el dominio de x será

$$(-\infty\;,\,-3]\;\text{U}\;[3\,,\,\infty)$$

Ejemplo 2

$$\int \frac{du}{u\sqrt{5-u^2}}$$

1. Iniciamos sustituyendo la variable (Ver **Tabla 1.3.a**)

$$\boldsymbol{u = \sqrt{5} * sen\theta} \quad ; \quad \boldsymbol{u^2 = 5 * sen^2\theta}$$

$$\frac{du}{d\theta} = \sqrt{5} * \cos\theta \qquad \text{por tanto} \qquad \boldsymbol{du = \sqrt{5} * cos\theta * d\theta}$$

2. Sustituyendo en la integral

$$\int \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{u}\sqrt{5-\boldsymbol{u^2}}} = \int \frac{\boldsymbol{\sqrt{5} * cos\theta * d\theta}}{\boldsymbol{\sqrt{5} * sen\theta} * \sqrt{5 - \boldsymbol{5 * sen^2\theta}}} = \int \frac{cos\theta}{sen\theta * \sqrt{5} * \sqrt{1 - sen^2\theta}}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{cos\theta}{sen\theta * \sqrt{1 - sen^2\theta}}\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{cos\theta}{sen\theta * \sqrt{cos^2\theta}}\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\cancel{cos\theta}}{sen\theta * \cancel{cos\theta}}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{1}{sen\theta}\, d\theta$$

3. Procedemos a resolver la integral

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{1}{sen\theta}\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \int csc\theta\, d\theta = \ln(csc\theta - cot\theta)$$

4. Analizamos las identidades para pasarse a seno y coseno.

$$csc\theta = \frac{1}{sen\theta} \qquad \text{y} \qquad cot\theta = \frac{1}{tan\theta} = \frac{cos\theta}{sen\theta}$$

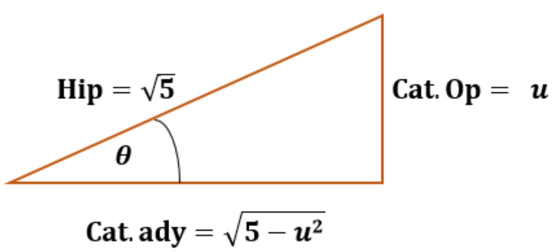
$$\ln(csc\theta - cot\theta) = \ln\left(\frac{1}{sen\theta} - \frac{cos\theta}{sen\theta}\right)$$

5. La identidad del seno dice

$$u = \sqrt{5} * sen\theta \quad ; \quad \theta = sen^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right)$$

$$sen\theta = \frac{\text{Cat. Op}}{\text{Hip}} = \frac{u}{\sqrt{5}} \qquad \text{por tanto} \qquad \text{Cat. Op} = u \quad ; \quad \text{Hip} = \sqrt{5}$$

6. Analizamos el triángulo (El cateto adyacente se obtiene por Pitágoras)



7. Analizamos seno y coseno en base al triángulo rectángulo.

$$sen\theta = \frac{u}{\sqrt{5}} \qquad cos\theta = \frac{\sqrt{5-u^2}}{\sqrt{5}}$$

8. Sustituimos el resultado del inciso 7, en el resultado del paso 3.

$$\ln\left(\frac{1}{sen\theta}-\frac{cos\theta}{sen\theta}\right)=\ln\left(\frac{1}{\frac{u}{\sqrt{5}}}-\frac{\frac{\sqrt{5-u^2}}{\sqrt{5}}}{\frac{u}{\sqrt{5}}}\right)=\ln\left(\frac{\sqrt{5}}{u}-\frac{\sqrt{5-u^2}}{u}\right)$$

9. Llegando a la respuesta.

$$\int\frac{du}{u\sqrt{5-u^2}}=\ln\left(\frac{\sqrt{5}}{u}-\frac{\sqrt{5-u^2}}{u}\right)+C$$

Ejemplo 3

$$\int_0^1\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

1. Realizamos la sustitución

$\boldsymbol{x=tan\theta}$ buscamos llegar $a\ sec^2\theta$ a traves de: $tan^2\theta+1=sec^2\theta$

$\frac{dx}{d\theta}=sec^2\theta$ despejamos para $\boldsymbol{dx=sec^2\theta*d\theta}$

2. Analizamos los nuevos límites de integración
Cuando $x=0\quad\theta=0$; cuando $x=1\quad\theta={}^{\pi}/_{4}$

3. Sustituimos

$$\int_0^1\frac{\boldsymbol{dx}}{(\boldsymbol{x}^2+1)^2}=\int_0^{\pi/4}\frac{\boldsymbol{sec^2\theta*d\theta}}{(\boldsymbol{tan^2\theta}+1)^2}=\int_0^{\pi/4}\frac{sec^2\theta*d\theta}{(sec^2\theta)^2}=\int_0^{\pi/4}\frac{sec^2\theta*d\theta}{sec^4\theta}=\int_0^{\pi/4}\frac{d\theta}{sec^2\theta}$$

4. Recordamos la identidad de secante

$$sec\theta=\frac{1}{cos\theta}\quad\text{por tanto}\quad\frac{1}{sec^2\theta}=\frac{1}{\frac{1}{cos^2\theta}}=cos^2\theta$$

5. Sustituyendo en el paso 3.

$$\int_0^{\pi/4}\frac{d\theta}{sec^2\theta}=\int_0^{\pi/4}cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}[1+\cos(2\theta)]\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}1+\cos(2\theta)\,d\theta$$

$$\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}sen(2\theta)\right]=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}sen(2\theta)\Bigg|_0^{\pi/4}=\frac{1}{2}*\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}*sen({}^{\pi}/_{2})=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$$

6. Llegamos a la respuesta

$$\int_0^1\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}=0.642699$$

1.4. Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales

Este método sirve para integrar cualquier función racional (División de Polinomios). La idea es descomponer la función racional $\left(\text{en forma de fracción } \boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{P}(x)}{\mathbf{Q}(x)}\right)$ y expresarla como una suma de fracciones simples, *llamadas fracciones parciales.*

Ejemplos de integrales que resolveremos convirtiéndolas a fracciones parciales

$$\int \frac{x^3+4x^2-2x-1}{x^2+2x-4}dx \quad ; \quad \int \frac{6x^2-2x^2+1}{3x^2-9}dx \quad ; \quad \int \frac{15}{(x-4)(x^2+9)}dx \quad ; \quad \int \frac{x}{x^2+2x+5}dx$$

¿Cómo se descompone una fracción parcial?

Primero se debe recordar cómo sumar fracciones complejas. Sumemos la siguiente fracción

$$\frac{2}{x}+\frac{x}{x-2}$$

Sumamos la fracción

$$\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x}}+\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{2}(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})+\boldsymbol{x}*\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})} = \frac{2x-4+x^2}{x(x-2)} = \frac{x^2+2x-4}{x^2-2x}$$

$$\boxed{\frac{2}{x}+\frac{x}{x-2} = \frac{x^2+2x-4}{x^2-2x}}$$

Ahora, suponga que le piden descomponer la función racional (Regresar a la fracción original)

$$\frac{\boldsymbol{x^2}+\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{4}}{\boldsymbol{x^2}-\mathbf{2}\boldsymbol{x}}$$

1. Se divide el numerador dentro del denominador

   Nota: Esto se hace Si y solo si el exponente principal del numerador es de igual magnitud que el exponente principal del denominador (Como este caso).

   También sucede si el exponente principal del numerador es mayor que el exponente principal del denominador

$$1+\frac{4x-4}{x^2-2x}$$

$$\begin{array}{r|l} \boldsymbol{x^2}-\mathbf{2}\boldsymbol{x} & \cancel{\boldsymbol{x^2}}+\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{4} \\ & \underline{-x^2+2x} \\ & \quad 4x-\cancel{4} \\ & \quad \underline{-\cancel{4x}+4} \\ & \qquad 0 \end{array}$$

$$\frac{x^2+2x-4}{x^2-2x} = 1+\frac{4x-4}{x^2-2x}$$

2. Nos concentramos en la fracción

$$\frac{\mathbf{4x-4}}{\mathbf{x^2-2x}}$$

3. Se procede a factorizar el denominador de la fracción del paso **2.** (Factor común)

$$x^2-2x = x(x-2)$$

$$\frac{\mathbf{4x-4}}{\mathbf{x^2-2x}} = \frac{4x-4}{x(x-2)}$$

4. Se introducen variables A y B.

$$\frac{4x-4}{x(x-2)} = \frac{\mathbf{A}}{x}+\frac{\mathbf{B}}{x-2} \qquad \textbf{Donde A y B serán constantes (Qué se deben buscar)}$$

Nota: Se observa el denominador para saber qué tipo de función colocará en el numerador. Por ejemplo:

en x se colocó **A** porque x es una función lineal y a eso se le baja en exponente 1 al igual que con **B** ya que $x-2$ es lineal también.

5. El siguiente paso es encontrar el valor de A y B (son números o constantes)

$$\frac{4x-4}{x(x-2)} = \frac{\mathbf{A}}{x}+\frac{\mathbf{B}}{x-2}$$

$$4x-4 = \left[\frac{\mathbf{A}}{x}+\frac{\mathbf{B}}{x-2}\right] * x(x-2)$$

$$4x-4 = \mathbf{A}(x-2)+\mathbf{B}x$$

$$\boxed{4x-4 = \mathrm{A}x-2\mathrm{A}+\mathrm{B}x} \quad \text{De esta ecuación planteamos}$$

$$4x \ \boxed{-\ 4} = \mathrm{A}x \ \boxed{-\ 2\mathrm{A}} + \mathrm{B}x$$

Luego con una suposición planteamos las siguientes ecuaciones

$$4 = \mathrm{A} + \mathrm{B} \qquad \text{Planteamos las } x$$

$$\boxed{-4} = \boxed{-2\mathrm{A}} \quad \text{Planteamos las constantes}$$

6. Se resuelven las ecuaciones del paso **5.**

$$\mathbf{A=2}$$
$$\mathbf{B=2}$$

Entonces:

$$\frac{4x-4}{x(x-2)} = \frac{\mathbf{A}}{x} + \frac{\mathbf{B}}{x-2} = \frac{\mathbf{2}}{x} + \frac{\mathbf{2}}{x-2}$$

7. Se une el resultado del paso **6,** en el resultado del paso **1.**

$$1 + \frac{4x-4}{x^2-2x} = 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x-2}$$

7.1. Como no se parece el resultado inicial, podemos hacer que sí lo sea. Simplemente sumando

$$\mathbf{1} + \frac{2}{x} + \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x-2}} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x-2}} + \frac{2}{x} = \frac{\boldsymbol{x-2+2}}{\boldsymbol{x-2}} + \frac{2}{x} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x-2}} + \frac{2}{x}$$

8. Volviendo al inicio y habiendo comprobado la fracción parcial:

$$\boxed{\frac{x^2+2x-4}{x^2-2x} = \frac{2}{x} + \frac{x}{x-2} = 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x-2}} \quad \text{Regresando a la fracción original}$$

Esto sirve para resolver algunas integrales donde no se pueden realizar sustituciones, ni resolver por partes. Vea el *ejemplo No 1*. Se integrará la misma función racional que descompusimos en fracciones parciales.

Ejemplo No.1

$$\int \frac{x^2+2x-4}{x^2-2x}\, dx$$

1. Como vimos anteriormente, esta función se puede convertir por fracciones parciales. Por tanto, sustituimos el resultado del paso **8.**

$$\int \frac{x^2+2x-4}{x^2-2x}\, dx = \int 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x-2}\, dx$$

2. Separamos la integral

$$\int 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x-2}\, dx = \int 1\ dx + \int \frac{2}{x}\, dx + \int \frac{2}{x-2}\, dx = x + 2\ln x + 2\ln(x-2)$$

3. Recordamos las identidades de integración.

$$\int 1\ dx = x \quad ; \quad \int \frac{2}{x}\, dx = 2\ lnx \quad ; \quad \int \frac{2}{x-2}\, dx = 2\ln(x-2) \quad \text{Por sustitución}$$

4. Quedando la respuesta al unir lo anterior

$$\int \frac{x^2+2x-4}{x^2-2x}\, dx = x + 2\ln(x) + 2\ln(x-2) + C$$

Ejemplo 2

$$\int \frac{x-10}{x^2-2x}\,dx$$

1. No se divide por división larga, ya que el término principal del denominador es mayor que el numerador

2. Por tanto, nos concentramos en el denominador y lo factorizamos (por factor común)

$$x^2-2x \;=\; x(x-2)$$

3. Planteamos la fracción parcial

$$\frac{x-10}{x^2-2x} = \frac{x-10}{x(x-2)} \;=\; \frac{\mathbf{A}}{x} + \frac{\mathbf{B}}{x-2}$$

4. Planteamos la ecuación

$$\frac{x-10}{x(x-2)} \;=\; \frac{\mathbf{A}}{x} + \frac{\mathbf{B}}{x-2}$$

$$x-10 \;=\; \left[\frac{\mathbf{A}}{x} + \frac{\mathbf{B}}{x-2}\right] * \; x(x-2)$$

$$x-10 \;=\; \mathbf{A}(x-2) + \mathbf{B}\,x$$

$$x-10 \;=\; \mathrm{A}x - 2\mathrm{A} + \mathrm{B}\,x$$

$$x \boxed{-\;10} = \mathrm{A}x \boxed{-\;2\mathrm{A}} + \mathrm{B}\,x$$

Luego con una suposición planteamos las siguientes ecuaciones

$$1 = \mathrm{A} + \mathrm{B} \quad \text{Planteamos las x}$$

$$\boxed{-10} = \boxed{-2\mathrm{A}} \quad \text{Planteamos las constantes}$$

5. Se resuelven las ecuaciones del paso **4.**

$$\mathbf{A = 5}$$
$$\mathbf{B = -4}$$

6. Entonces

$$\frac{x-10}{x(x-2)} \;=\; \frac{\mathbf{A}}{x} + \frac{\mathbf{B}}{x-2} \;=\; \frac{\mathbf{5}}{x} - \frac{\mathbf{4}}{x-2}$$

7. Entonces sustituimos la fracción parcial encontrada en el paso 6.

$$\int \frac{x-10}{x^2-2x}\,dx = \int \frac{5}{x} - \frac{4}{x-2}\,dx = 5\ln x - 4\ln(x-2)$$

8. La respuesta es:

$$\int \frac{x-10}{x^2-2x}\,dx \;=\; 5\ln x - 4\ln(x-2) + C$$

Existen casos para resolver este tipo de integrales. Los casos dependen de la forma de Q(x). Recuerde que, la forma de una función racional que integramos en este capítulo es:

$$f(x) = \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} = \mathrm{S}(x) + \frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{Q}(x)}$$

Caso No. 1: Si Q(x) es un producto de factores lineales distintos

$$\mathrm{Q(x)} = (\mathrm{a_1x + b_2}) * (\mathrm{a_2x + b_2}) * (\mathrm{a_3x + b_3}) + \ldots + (\mathrm{a_nx + b_n})$$

$$\frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{Q}(x)} = \frac{\mathrm{A_1}}{\mathrm{a_1x + b_2}} + \frac{\mathrm{A_2}}{\mathrm{a_2x + b_3}} + \frac{\mathrm{A_3}}{\mathrm{a_3x + b_3}} + \ldots + \frac{\mathrm{A_n}}{\mathrm{a_nx + b_n}}$$

Ejemplo 3.1

Plantee la fracción parcial de: $\dfrac{2x^2 - x + 4}{(x-1)*(x+2)*(2x+1)*(1-x)}$

1. Identificamos el caso No. 1 debido a que Q(x) contiene productos de factores lineales distintos.

$$\frac{2x^2 - x + 4}{(x-1)*(x+2)*(2x+1)*(1-x)} = \frac{\mathrm{A}}{x-1} + \frac{\mathrm{B}}{x+2} + \frac{\mathrm{C}}{2x+1} + \frac{\mathrm{D}}{1-x}$$

2. Identificamos los productos

$$\frac{2x^2 - x + 4}{(\boldsymbol{x-1})*(\boldsymbol{x+2})*(\boldsymbol{2x+1})*(\boldsymbol{1-x})} = \frac{\mathbf{A}}{\boldsymbol{x-1}} + \frac{\mathbf{B}}{\boldsymbol{x+2}} + \frac{\mathbf{C}}{\boldsymbol{2x+1}} + \frac{\mathbf{D}}{\boldsymbol{1-x}}$$

Ejemplo 3.2.

$$\int \frac{5x+1}{(2x+1)(x-1)}dx$$

1. Identificamos que es el Caso No. 1 el denominador Q(x)

2. Como el denominador ya está factorizado, procedemos a plantear la fracción parcial.

$$\frac{5x+1}{(\boldsymbol{2x+1})(\boldsymbol{x-1})} = \frac{\mathbf{A}}{\boldsymbol{2x+1}} + \frac{\mathbf{B}}{\boldsymbol{x-1}}$$

$$5x+1 = \left[\frac{\mathbf{A}}{\boldsymbol{2x+1}} + \frac{\mathbf{B}}{\boldsymbol{x-1}}\right] * (\boldsymbol{2x+1})(\boldsymbol{x-1})$$

$$5x+1 = \mathbf{A}\,(\boldsymbol{x-1}) + \mathbf{B}\,(\boldsymbol{2x+1})$$

$$5x+1 = \mathbf{A}x - \mathrm{A} + 2\mathrm{B}x + \mathrm{B}$$

$$5x + \boxed{1} = \mathbf{A}x - \boxed{\mathrm{A}} + 2\mathrm{B}x + \boxed{\mathrm{B}}$$

$$5 = A + 2B \quad \text{Planteamos las } x$$

$$\boxed{1} = \boxed{-A} + \boxed{B} \quad \text{Planteamos las constantes}$$

3. Resolviendo las ecuaciones planteadas del paso **2.**

$$\mathbf{A = 1}$$
$$\mathbf{B = 2}$$

4. Teniendo así la fracción parcial

$$\frac{5x+1}{(2x+1)(x-1)} = \frac{\mathbf{A}}{2x+1} + \frac{\mathbf{B}}{x-1} = \frac{\mathbf{1}}{2x+1} + \frac{\mathbf{2}}{x-1}$$

5. Volviendo a la integral

$$\int \frac{5x+1}{(2x+1)(x-1)}dx = \int \frac{1}{2x+1} + \frac{2}{x-1}dx$$

6. Resolvemos la integral

$$\int \frac{1}{2x+1} + \frac{2}{x-1}dx = \int \frac{1}{2x+1}dx + \int \frac{2}{x-1}dx = \frac{1}{2}\ln(2x+1) + 2\ln(x-1)$$

$$\int \frac{5x+1}{(2x+1)(x-1)}dx = \frac{1}{2}\ln(2x+1) + 2\ln(x-1)$$

Caso No. 2

Si Q(x) es un producto de factores lineales en donde algunos se repiten

Asumiendo que $(a_1x + b_2)$ se repite "r" veces como factor de esta forma: $(a_1x+b_1)^r$

$$Q(x) = (a_1x+b_1)^r$$

$$\frac{\mathrm{R(x)}}{\mathrm{Q(x)}} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2} + \frac{A_3}{(a_1x+b_1)^3} + \ldots + \frac{A_r}{(a_1x+b_1)^r}$$

Ejemplo 4.1

Plantee la fracción parcial de: $\dfrac{x^2+x-1}{x^3 * (x-2)^4}$

1. Identificamos el caso No. 2 debido a que Q(x) contiene productos de factores lineales que se repiten cuatro veces (exponente a la cuarta)

$$\frac{x^2+x-1}{x^3*(x-2)^4} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x-2)^2} + \frac{F}{(x-2)^3} + \frac{G}{(x-2)^4}$$

2. Identificamos los productos

$$\frac{x^2+x-1}{\boldsymbol{x^3}*(\boldsymbol{x-2})^4} = \frac{\mathbf{A}}{\boldsymbol{x}} + \frac{\mathbf{B}}{\boldsymbol{x^2}} + \frac{\mathbf{C}}{\boldsymbol{x^3}} + \frac{\mathbf{D}}{\boldsymbol{x-2}} + \frac{\mathbf{E}}{(\boldsymbol{x-2})^2} + \frac{\mathbf{F}}{(\boldsymbol{x-2})^3} + \frac{\mathbf{G}}{(\boldsymbol{x-2})^4}$$

Ejemplo 4.2

$$\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}\,dx$$

1. Comenzamos dividiendo la fracción por división larga.

$$\begin{array}{r|l} & 1-\dfrac{4}{x^3-2x^2} \\ \hline x^3-2x^2 & x^3-\cancel{2x^2}-4 \\ & \cancel{-x^3}+2x^2 \\ \hline & \qquad -4 \\ & \qquad +4 \\ \hline & \qquad\ 0 \end{array}$$

2. Por tanto, podemos decir que:

$$\frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2} = 1-\frac{4}{x^3-2x^2}$$

3. Nos concentramos en la fracción

$$\frac{4}{x^3-2x^2}$$

4. Factorizamos el denominador o Q(x) de la fracción del paso 3.

$$x^3-2x^2 = x^2(x-2)$$

5. Procedemos a plantear la fracción parcial

$$\frac{4}{x^3-2x^2} = \frac{4}{\boldsymbol{x^2(x-2)}} = \frac{\mathbf{A}}{\boldsymbol{x}}+\frac{\mathbf{B}}{\boldsymbol{x^2}}+\frac{\mathbf{C}}{\boldsymbol{x-2}}$$

$$4 = \left[\frac{\mathbf{A}}{\boldsymbol{x}}+\frac{\mathbf{B}}{\boldsymbol{x^2}}+\frac{\mathbf{C}}{\boldsymbol{x-2}}\right] * \boldsymbol{x^2(x-2)}$$

$$4 = \mathbf{A} * \boldsymbol{x} * (\boldsymbol{x-2}) + \mathbf{B}\,(\boldsymbol{x-2}) + \mathbf{C}\,\boldsymbol{x^2}$$

$$4 = \mathrm{A}x^2 - 2\mathrm{A}x + \mathrm{B}x - 2\mathrm{B} + \mathrm{C}\,x^2$$

$$4 = \mathrm{A}x^2 \boxed{-\ 2\mathrm{A}x} + \boxed{\mathrm{B}x} - 2\mathrm{B} + \mathrm{C}\,x^2$$

6. Planteamos las ecuaciones

$$\begin{array}{ll} 0 = \mathrm{A}+\mathrm{C} & \text{Analizamos las constantes de } x^2 \\ 0 = -2\mathrm{A}+\mathrm{B} & \text{Analizamos las constantes de } x \\ 4 = -2\mathrm{B} & \text{Analizamos las constantes} \end{array}$$

7. Resolviendo las tres ecuaciones, los resultados son:

$$\mathbf{A = -1}$$
$$\mathbf{B = -2}$$
$$\mathbf{C = 1}$$

8. Teniendo así la fracción parcial

$$\frac{4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-2} = -\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x-2}$$

9. Uniendo toda la fracción

$$1-\frac{4}{x^3-2x^2} = 1-\left[-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x-2}\right] = 1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x-2}$$

10. Planteamos la nueva integral con el resultado del paso 9.

$$\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}\,dx = \int_3^4 1-\frac{4}{x^3-2x^2}\,dx = \int_3^4 1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x-2}\,dx$$

11. Resolvemos la integral del paso 10.

$$\int_3^4 1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x-2}\,dx = x+\ln(x)-\frac{2}{x}-\ln(x-2)\Bigg|_3^4 = \frac{7}{6}+\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

12. La respuesta será

$$\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}\,dx = \frac{7}{6}+\ln\left(\frac{2}{3}\right) = 0.7612015$$

Caso No. 3

Si Q(x) tiene factores cuadráticos irreducibles (Ninguno se repite)

Al decir irreducibles nos referimos a que no se pueden resolver como ecuación, por ejemplo:

x^2+4 No se puede factorizar y menos se puede resolver como ecuación real

Si tenemos $Q(x) = ax^2+bx+c$ y el discriminante $b^2-4ac<0$ entonces

$$\frac{\mathrm{R(x)}}{\mathrm{Q(x)}} = \frac{\mathrm{A}x+\mathrm{B}}{ax^2+bx+c}$$

Ejemplo 1

Plantee la fracción parcial de: $\dfrac{x^2-x}{x^2(x^2+1)(x^2+4)}$

1. Identificamos el caso No. 3 debido a que Q(x) contiene productos de factores irreducibles.

$$\frac{x^2-x}{x^2(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\mathrm{A}}{x}+\frac{\mathrm{B}}{x^2}+\frac{\mathrm{C}x+\mathrm{D}}{x^2+1}+\frac{\mathrm{E}x+\mathrm{F}}{x^2+4}$$

2. Identificamos los productos

$$\frac{x^2-x}{x^2(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\mathrm{A}}{x}+\frac{\mathrm{B}}{x^2}+\frac{\mathrm{C}x+\mathrm{D}}{x^2+1}+\frac{\mathrm{E}x+\mathrm{F}}{x^2+4}$$

Ejemplo 2

$$\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}dx$$

1. Se plantea la fracción parcial

$$\frac{10}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})(\boldsymbol{x}^2+\mathbf{9})}=\frac{\mathbf{A}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}+\frac{\mathbf{B}x+\mathbf{C}}{\boldsymbol{x}^2+\mathbf{9}}$$

$$10=\left[\frac{\mathbf{A}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}+\frac{\mathbf{B}x+\mathbf{C}}{\boldsymbol{x}^2+\mathbf{9}}\right]*(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})(\boldsymbol{x}^2+\mathbf{9})$$

$$10=\mathbf{A}\,(\boldsymbol{x}^2+\mathbf{9})+(\mathbf{B}x+\mathbf{C})(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})$$

$$10=\mathrm{A}x^2+9\mathrm{A}+\mathrm{B}x^2-\mathrm{B}x+\mathrm{C}x-\mathrm{C}$$

$$10=\mathrm{A}x^2+9\mathrm{A}+\mathrm{B}x^2\ \boxed{-\mathrm{B}x}+\boxed{\mathrm{C}x}-\mathrm{C}$$

2. Se plantean las ecuaciones.

$$\begin{array}{rl} \mathrm{A}+\mathrm{B}=0 & \text{ya que } 0x^2=\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x^2 \\ -\mathrm{B}+\mathrm{C}=0 & \text{ya que } 0x=-\mathrm{B}x+\mathrm{C}x \\ 10=9\mathrm{A}-\mathrm{C} & \text{La ecuación de las constantes} \end{array}$$

3. Una vez resuelta la ecuación tenemos.

$$\mathbf{A=1}\ ;\ \mathbf{B=-1}\ ;\ \mathbf{C=-1}$$

4. Teniendo así la fracción parcial

$$\frac{10}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})(\boldsymbol{x}^2+\mathbf{9})}=\frac{\mathbf{A}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}+\frac{\mathbf{B}x+\mathbf{C}}{\boldsymbol{x}^2+\mathbf{9}}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}+\frac{-\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^2+\mathbf{9}}$$

5. Volviendo a la integral

$$\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}dx=\int \frac{1}{x-1}+\frac{-x-1}{x^2+9}\,dx=\int \frac{1}{x-1}\,dx-\int \frac{x}{x^2+9}\,dx-\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$$

6. Resolviendo por aparte la integral No. 2 ★

$$\int \frac{x}{x^2+9}\,dx \qquad \text{Sustituimos: } \boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}^2+\mathbf{9}\ ;\ \frac{du}{dx}=2x \quad \text{entonces } \frac{\boldsymbol{du}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{dx}$$

$$\int \frac{x}{x^2+9}\,dx=\int \frac{x}{\boldsymbol{u}}*\frac{\boldsymbol{du}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}}=\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du=\frac{1}{2}\ln(u)$$

6.1. Se vuelve a la variable original

$$\frac{1}{2}\ln(u)=\frac{1}{2}\ln(x^2+9)$$

7. Resolviendo por aparte la integral No. 3 ☾

$$\int \frac{1}{x^2+9}\ dx = \int \frac{1}{9\left(\frac{x^2}{9}+1\right)}dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}dx \quad u = \frac{x}{3};\quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{3};\quad 3du = dx$$

7.1. Sustituyendo en la variable

$$\frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{u^2+1}3du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{3}tan^{-1}u$$

7.2. Volviendo a la variable original

$$\frac{1}{3}tan^{-1}u = \frac{1}{3}tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$$

8. Volviendo a la integral principal

$$\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}dx = \int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{x}{x^2+9}dx - \int \frac{1}{x^2+9}\ dx$$

$$\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}dx = \text{Ln}(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+9) - \frac{1}{3}tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

9. Quedando la respuesta

$$\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}dx = \ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+9) - \frac{1}{3}tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

Caso No. 4

Si Q(x) tiene un factor cuadrático irreductible repetido.

Si $Q(x) = (ax^2+bx+c)^r \qquad donde\ \ b^2-4ac<0$ (No tiene raices reales)

$$\frac{\text{R(x)}}{\text{Q(x)}} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{A_3x+B_3}{(ax^2+bx+c)^3} + \ldots + \frac{A_rx+B_r}{(ax^2+bx+c)^r}$$

Ejemplo 1

Plantee la fracción parcial de: $\dfrac{x^3-2x^2+3x+1}{(x^2+1)^3 * (2x^2+3x+2)^2}$

1. Identificamos el caso No. 4 debido a que Q(x) contiene productos de factores irreducibles repetidos. Uno de ellos está elevado al cubo y otro al cuadrado

$$\frac{x^3-2x^2+3x+1}{(x^2+1)^3 * (2x^2+3x+2)^2} = \frac{\text{Ax}+\text{B}}{x^2+1} + \frac{\text{C}x+\text{D}}{(x^2+1)^2} + \frac{\text{E}x+\text{F}}{(x^2+1)^3} + \frac{\text{G}x+\text{H}}{2x^2+3x+2} + \frac{\text{I}x+\text{J}}{(2x^2+3x+2)^2}$$

2. Identificamos los productos

$$\frac{x^3-2x^2+3x+1}{(x^2+1)^3 * (2x^2+3x+2)^2} = \frac{\text{A}x+\text{B}}{x^2+1} + \frac{\text{C}x+\text{D}}{(x^2+1)^2} + \frac{\text{E}x+\text{F}}{(x^2+1)^3} + \frac{\text{G}x+\text{H}}{2x^2+3x+2} + \frac{\text{I}x+\text{J}}{(2x^2+3x+2)^2}$$

Ejemplo 2

$$\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2}$$

1. Identificamos por el denominador el caso No. 4 (contiene un cuadrado irreducible que se repite)

2. Planteamos la fracción parcial y la resolvemos (encontrar los valores A, B, C, D y E)

$$\frac{1}{x(x^2+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}$$

$$1 = \left[\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}\right] * x(x^2+4)^2$$

$$1 = A(x^2+4)^2 + (Bx+C) * x * (x^2+4) + (Dx+E) * x$$

$$1 = A(x^4+8x^2+16) + (Bx^2+Cx)(x^2+4) + Dx^2 + Ex$$

$$1 = Ax^4 + 8Ax^2 + 16A + Bx^4 + 4Bx^2 + Cx^3 + 4Cx + Dx^2 + Ex$$

$$1 = Ax^4 + \boxed{8Ax^2} + 16A + Bx^4 + \boxed{4Bx^2} + Cx^3 + 4Cx + \boxed{Dx^2} + Ex$$

3. Planteando las ecuaciones tendremos

$0 = A + B$	Analisis de x^4
$0 = C$	Analisis de x^3
$0 = 8A + 4B + D$	Analisis de x^2
$0 = 4C + E$	Analisis de x
$1 = 16A$	Análisis de la constante

4. La resolución de las ecuaciones del paso 3 son:

$$A = \frac{1}{16}$$
$$B = -\frac{1}{16}$$
$$C = 0$$
$$D = -\frac{1}{4}$$
$$E = 0$$

5. Teniendo así la fracción parcial

$$\frac{1}{x(x^2+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2} = \frac{\frac{1}{16}}{x} + \frac{-\frac{1}{16}x+0}{x^2+4} + \frac{-\frac{1}{4}x+0}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{16}}{x} + \frac{-\frac{1}{16}x+0}{x^2+4} + \frac{-\frac{1}{4}x+0}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{16} * \frac{1}{x} - \frac{1}{16} * \frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{4} * \frac{x}{(x^2+4)^2}$$

6. Volviendo así a la integral

$$\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2} = \int \frac{1}{16}*\frac{1}{x} - \frac{1}{16}*\frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{4}*\frac{x}{(x^2+4)^2}\ dx$$

7. Integrando por aparte

$$\int \frac{1}{16}*\frac{1}{x} - \frac{1}{16}*\frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{4}*\frac{x}{(x^2+4)^2}\ dx = \frac{1}{16}\int \frac{1}{x}\ dx - \frac{1}{16}\int \frac{x}{x^2+4}\ dx - \frac{1}{4}\int \frac{x}{(x^2+4)^2}\ dx$$

7.1. Resolviendo la integral número 2

$$-\frac{1}{16}\int \frac{x}{x^2+4}\,dx \qquad \textbf{Sustituimos: } u = x^2+4 \ \ ; \ \ \frac{du}{dx} = 2x \ \ ; \ \ dx = \frac{du}{2x}$$

$$-\frac{1}{16}\int \frac{x}{x^2+4}\ dx = -\frac{1}{16}\int \frac{x}{u}*\frac{du}{2x} = -\frac{1}{32}\int \frac{1}{u}*\ du = -\frac{1}{32}\ln u$$

7.2. Volviendo a la variable original

$$-\frac{1}{32}\ln u = -\frac{1}{32}\ln(x^2+4)$$

8. Integrando por aparte

$$-\frac{1}{4}\int \frac{x}{(x^2+4)^2}\ dx \qquad \text{Sustituimos: } u = x^2+4 \ \ ; \ \ \frac{du}{dx} = 2x \ \ ; \ \ dx = \frac{du}{2x}$$

$$-\frac{1}{4}\int \frac{x}{(x^2+4)^2}\ dx = -\frac{1}{4}\int \frac{x}{(u)^2}\ \frac{du}{2x} = -\frac{1}{8}\int \frac{1}{(u)^2}\ du = \frac{1}{8}*\frac{1}{u}$$

8.1. Volviendo a la variable original

$$\frac{1}{8}*\frac{1}{u} = \frac{1}{8}*\frac{1}{x^2+4}$$

9. Volviendo nuevamente a la integral principal

$$\frac{1}{16}\int \frac{1}{x}\ dx - \frac{1}{16}\int \frac{x}{x^2+4}\ dx - \frac{1}{4}\int \frac{x}{(x^2+4)^2}\ dx = \frac{1}{16}\ln x - \frac{1}{32}\ln(x^2+4) + \frac{1}{8}*\frac{1}{x^2+4}$$

10. La respuesta final será entonces

$$\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2} = \frac{1}{16}\ln x - \frac{1}{32}\ln(x^2+4) + \frac{1}{8}*\frac{1}{x^2+4} + C$$

Ejemplo 3 (Ejemplo extra)

$$\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$$

1. Factorizamos el denominador o Q(x) aplicando diferencia de cubos perfectos:

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

2. Planteamos la fracción parcial

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(\boldsymbol{x-1})(\boldsymbol{x^2+x+1})} = \frac{\mathbf{A}}{\boldsymbol{x-1}}+\frac{\mathbf{B}x+\mathbf{C}}{\boldsymbol{x^2+x+1}}$$

2.1. Nótese que se utilizó el caso No. 1 y el caso No.4

$$1 = \left[\frac{\mathbf{A}}{\boldsymbol{x-1}}+\frac{\mathbf{B}x+\mathbf{C}}{\boldsymbol{x^2+x+1}}\right]*(\boldsymbol{x-1})(\boldsymbol{x^2+x+1})$$

$$1=\mathbf{A}(\boldsymbol{x^2+x+1})+(\mathbf{B}x+\mathbf{C})(\boldsymbol{x-1})$$

$$1=\mathbf{A}x^2+\mathbf{A}x+\mathbf{A}+\mathbf{B}x^2-\mathbf{B}x+\mathbf{C}x-\mathbf{C}$$

$$1 = \mathrm{A}x^2 + \boxed{\mathrm{A}x} + \mathrm{A} + \mathrm{B}x^2 \boxed{-\mathrm{B}x} + \boxed{\mathrm{C}x} - \mathrm{C}$$

3. Planteando las ecuaciones

$0=\mathrm{A}+\mathrm{B}$	ya que: $0x^2=Ax^2+Bx^2$
$0=\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}$	ya que: $0x=Ax-Bx+Cx$
$1=\mathrm{A}-\mathrm{C}$	Las constantes

4. Los valores de las ecuaciones son:

$$\mathbf{A}= {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{3}}$$
$$\mathbf{B}=-{}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{3}}$$
$$\mathbf{C}=-{}^{\mathbf{2}}/_{\mathbf{3}}$$

5. Teniendo así la fracción parcial

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(\boldsymbol{x-1})(\boldsymbol{x^2+x+1})} = \frac{{}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{3}}}{\boldsymbol{x-1}}+\frac{-{}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{3}}\,x-{}^{\mathbf{2}}/_{\mathbf{3}}}{\boldsymbol{x^2+x+1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}*\frac{1}{\boldsymbol{x-1}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}*\frac{x+2}{\boldsymbol{x^2+x+1}}$$

$$\int\frac{1}{x^3-1}\,dx = \int \frac{1}{3}*\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}*\frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}\,dx-\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx$$

6. Resolviendo por aparte la integral número 2.

6.1. Descomponemos el: $x+2 = x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

6.2. Volviendo a integrar por aparte

$$\int \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\,dx$$

6.3. Realizamos la siguiente sustitución:

$$u = x^2+x+1 \quad ; \quad \frac{du}{dx} = 2x+1 = 2\left(x+\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad \frac{du}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)} = dx$$

$$\int \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{x+\frac{1}{2}}{u} * \frac{du}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln(u)$$

6.4. Volviendo a la variable original

$$\int \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(u) = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)$$

6.5. Resolviendo la otra integral por aparte

$$\frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

6.6. Pasamos a la forma estándar la función cuadrática del denominador.

$$x^2+x+1 = x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1 = x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx \qquad u = x+\frac{1}{2} \quad ; \quad du = dx$$

$$\frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{(u)^2+\frac{3}{4}}\,du = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{4}\left[\frac{4u^2}{3}+1\right]}\,du = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}}\int \frac{1}{\left[\frac{4u^2}{3}+1\right]}\,du$$

$$= 2\int \frac{1}{\left[\frac{4u^2}{3}+1\right]}\,du = 2\int \frac{1}{\left[\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}\,du$$

6.7. Se realiza la siguiente sustitución:

$$m = \frac{2u}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \frac{dm}{du} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{por tanto:} \quad \frac{\sqrt{3}\,dm}{2} = du$$

6.8. Sustituyendo

$$2\int \frac{1}{\left[\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]}\, du = 2\int \frac{1}{[m^2+1]} * \frac{\sqrt{3}\,dm}{2} = \sqrt{3}\int \frac{1}{[m^2+1]} * dm = \sqrt{3}\, tan^{-1}m$$

6.9. Volviendo a la variable original

$$\sqrt{3}\, tan^{-1}m = \sqrt{3}\, tan^{-1}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}\, tan^{-1}\left(\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}\, tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

6.10. Entonces la respuesta de esta integral es:

$$\frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\, dx = \sqrt{3}\, tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

Volviendo a la integral ◆

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\, dx = \int \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\, dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\, dx$$

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\, dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\, tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

7. **Se vuelve ahora a la integral original**

$$\int \frac{1}{x^3-1}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\, dx$$

$$\int \frac{1}{x^3-1}\, dx = \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\, tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$\int \frac{1}{x^3-1}\, dx = \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\, tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

8. La respuesta será:

$$\int \frac{1}{x^3-1}\, dx = \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\, tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

1.4.1. Racionalización de sustituciones

Hay integrales de funciones que aparentan ser resueltas por el método de sustitución trigonométrica. El problema es que no se logran resolver por tal método, por lo tanto, aparece esta estrategia que resuelve funciones racionales que contienen, ya sea en el numerador o en el denominador.

- Las integrales contienen $\sqrt[n]{g(x)}$
- Se debe hacer la sustitución $u = \sqrt[n]{g(x)}$
- Se resuelve luego por fracciones parciales

Ejemplos de integrales que se resolverán

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,dx \quad ; \quad \int \frac{3}{2+\sqrt[4]{x}}\,dx \quad ; \quad \int \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}\,dx \quad ; \quad \int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}+x}$$

Ejemplo 1

$$\int \frac{1}{x^2+x\sqrt{x}}\,dx$$

1. Identificamos el método de racionalización de sustitución $\left[\ \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt{x} = u\ \right]$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{por tanto:} \quad \mathbf{2\sqrt{x}\ du = dx}$$

$$\boldsymbol{u = \sqrt{x}}\ ; \qquad \boldsymbol{u^2 = x} \quad ; \quad \boldsymbol{u^4 = x^2}$$

2. Realizamos la sustitución

$$\int \frac{1}{\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\sqrt{x}}}\,\boldsymbol{dx} = \int \frac{1}{\boldsymbol{u^4} + \boldsymbol{u^2} * \boldsymbol{u}} * \mathbf{2}\boldsymbol{\sqrt{x}\ du} = 2\int \frac{\boldsymbol{\sqrt{x}}}{u^4+u^3} * du = 2\int \frac{\boldsymbol{u}}{u^4+u^3} * du$$

$$2\int \frac{u}{u^4+u^3} * du = 2\int \frac{1}{u^3+u^2} * du$$

3. Planteamos la fracción parcial

$$\frac{1}{u^3+u^2} = \frac{1}{\boldsymbol{u}^2(\boldsymbol{u+1})} = \frac{\mathbf{A}}{\boldsymbol{u}} + \frac{\mathbf{B}}{\boldsymbol{u}^2} + \frac{\mathbf{C}}{\boldsymbol{u+1}}$$

$$1 = \left[\frac{\mathbf{A}}{\boldsymbol{u}} + \frac{\mathbf{B}}{\boldsymbol{u}^2} + \frac{\mathbf{C}}{\boldsymbol{u+1}}\right] * \boldsymbol{u}^2(\boldsymbol{u+1})$$

$$1 = \mathbf{A}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u+1}) + \mathbf{B}\,(\boldsymbol{u+1}) + \mathbf{C}\,\boldsymbol{u}^2$$

$$1 = \mathrm{A}\,u^2 + \mathrm{A}u + \mathrm{B}u + \mathrm{B} + \mathrm{C}u^2$$

$$1 = \mathrm{A}\,u^2 + \boxed{\mathrm{A}u} + \boxed{\mathrm{B}u} + \mathrm{B} + \mathrm{C}u^2$$

4. Planteando las ecuaciones

$$0 = \mathrm{A} + \mathrm{C}$$
$$0 = \mathrm{A} + \mathrm{B}$$
$$1 = \mathrm{B}$$

5. Las resoluciones de las ecuaciones son:

$$\mathbf{A = -1}$$
$$\mathbf{B = 1}$$
$$\mathbf{C = 1}$$

6. Teniendo así la fracción parcial

$$\frac{1}{u^3 + u^2} = \frac{\mathbf{A}}{\boldsymbol{u}} + \frac{\mathbf{B}}{\boldsymbol{u}^2} + \frac{\mathbf{C}}{\boldsymbol{u} + \mathbf{1}} = \frac{\mathbf{-1}}{\boldsymbol{u}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{u}^2} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{u} + \mathbf{1}} = -\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u+1}$$

7. Volviendo a la integral

$$\int \frac{1}{x^2 + x\sqrt{x}}\, dx = 2\int \frac{1}{u^3 + u^2} * du = 2\int -\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u+1}\, du$$

8. Descomponiendo la integral

$$2\int -\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u+1}\, du = -2\int \frac{1}{u}\, du + 2\int \frac{1}{u^2}\, du + 2\int \frac{1}{u+1}\, du$$

9. Integrando

$$-2\int \frac{1}{u}\, du + 2\int \frac{1}{u^2}\, du + 2\int \frac{1}{u+1}\, du = -2\ln u - \frac{2}{u} + 2\ln(u+1)$$

10. Volviendo a la variable original se recuerda que

$$u = \sqrt{x}$$

$$-2\ln u - \frac{2}{u} + 2\ln(u+1) = -2\ln\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 2\ln\left(\sqrt{x} + 1\right)$$

11. Teniendo la respuesta

$$\int \frac{1}{x^2 + x\sqrt{x}}\, dx = -2\ln\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 2\ln\left(\sqrt{x} + 1\right) + C$$

1.5. Estrategias para la integración

Recuerde querido lector que la integración es todo un arte, a más practica más fácil visualiza la resolución de estas. En esta sección veremos un resumen de las cuatro técnicas vistas anteriormente, unificando en algunos ejercicios varios de los métodos.

Tabla 1.5.a

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ **2.** $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$ **3.** $\int e^x\,dx$

4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$ **5.** $\int senx\,dx = -\,cosx$ **6.** $\int cosx\,dx = senx$

7. $\int sec^2x\,dx = tanx$ **8.** $\int csc^2x\,dx = -cotx$ **9.** $\int secx * tanx\,dx = \sec x$

10. $\int csc\ x * cot\ x\,dx = -\csc x$ **11.** $\int \sec x\,dx = \ln(\sec x + \tan x)$

12. $\int \csc x\,dx = \ln(\csc x - \cot x)$ **13.** $\int \tan x\,dx = \ln(\sec x)$

14. $\int \cot x\,dx = \ln(senx)$ **15.** $\int \frac{dx}{x^2+\mathrm{a}^2} = \frac{1}{\mathrm{a}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\mathrm{a}}\right)$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{a}^2-x^2}} = \mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{x}{\mathrm{a}}\right)\ ;\ a>0$ **17.** $\int \frac{dx}{x^2-\mathrm{a}^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-\mathrm{a}}{x+\mathrm{a}}\right)$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm \mathrm{a}^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2\pm\mathrm{a}^2}\right)$ **19.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

20. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$

21. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$

22. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$ **23.** $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}$

24. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}$

25. $\int (a^2-x^2)^{3/2}\,dx = -\frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3}{8}a^4sen^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

La **Tabla 1.5. a** es el resumen de las integrales que se vieron en matemática básica 2 y las integrales vistas en los capítulos 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4.

Ahora veremos los pasos que tienden a un algoritmo para la resolución de cualquier integral

1. Simplificar la integral

No realice una sustitución directamente. A veces se debe dividir o multiplicar como en el siguiente caso:

$$\int \sqrt[3]{x}(x+\sqrt{x})dx = \int x^{1/3}(x+x^{1/2})dx = \int x^{4/3}+x^{5/6}dx = \frac{7}{3}x^{7/3}+\frac{6}{11}x^{11/6}+C$$

2. Realizar, si es posible una sustitución

$$\int \sqrt{2x+4}\,dx$$

$$u = 2x+4 \qquad \text{por tanto} \qquad \frac{du}{dx}=2 \qquad \text{entonces:}\ \frac{du}{2}=dx$$

$$\int \sqrt{2x+4}\,dx = \int \sqrt{u} * \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\ du = \frac{1}{2} * \frac{2}{3}\sqrt{u^3} = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3}$$

3. Identifique el método de resolución para la integral resultante

3.1. Integración por partes (Capítulo 1.1)
3.2. Integrales trigonométricas (Capítulo 1.2)
3.3. Integrales por sustitución trigonométrica (Capítulo 1.3)
3.4. Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales (Capítulo 1.4)

4. Repetir los pasos anteriores

A veces los tres pasos anteriores no funcionan para una respuesta en concreto. Realmente solo existen dos métodos de integración: sustitución y por partes.
Los otros "métodos" prácticamente son cambios a la integral para la facilitación de la misma.

Si tiene que repetir la integral:
4.1. Intente nuevamente la sustitución
4.2. Intente la integración por partes
4.3. Realice cambios (integración por sustitución trigonométrica, integración de funciones racionales por fracciones parciales).
4.4. Apóyese si es posible de las identidades de integración o de otros problemas que usted haya resuelto.

Se recalca que, es importante memorizar las identidades de integración para facilitar la resolución de las integrales. Además, debe practicar mucho a través de textos para consolidar los conocimientos y se convierta en un experto en integrales.

Ejemplo No. 1

$$\int \frac{sen\, x + \sec x}{\tan x}\, dx$$

1. Vemos rápidamente que es una integración trigonométrica. Según lo visto anteriormente, lo primero que debemos intentar es la simplificación.

$$\tan x = \frac{sen\ x}{\cos x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

2. Simplificamos

$$\int \frac{sen\, x + \sec x}{\tan x}\, dx \;=\; \int \frac{\mathbf{sen\ x} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos\ x}}}{\frac{\mathbf{sen\ x}}{\mathbf{cos\ x}}}\, dx \;=\; \int \frac{\mathbf{sen\ x}}{\frac{\mathbf{sen\ x}}{\mathbf{cos\ x}}}\, dx + \int \frac{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos\ x}}}{\frac{\mathbf{sen\ x}}{\mathbf{cos\ x}}}\, dx$$

$$\int \frac{\frac{\mathbf{sen\ x}}{\mathbf{1}}}{\frac{\mathbf{sen\ x}}{\mathbf{cos\ x}}}\, dx + \int \frac{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos\ x}}}{\frac{\mathbf{sen\ x}}{\mathbf{cos\ x}}}\, dx = \int \cos(x)\, dx + \int \frac{1}{sen\ x}\, dx = \operatorname{sen}(x) + \int \csc(x)\, dx$$

3. Recordando la **Tabla 1.5. a**

$$\int secx\ dx = \ln(\sec x + \tan x) \qquad \int \csc x\ dx = \ln(\csc x - \cot x)$$

4. Integrando

$$\int \frac{sen\, x + \sec x}{\tan x}\, dx = \operatorname{sen}(x) + \int \csc(x)\, dx = \operatorname{sen}(x) + \ln(\csc x - \cot x)$$

5. Quedando la respuesta

$$\int \frac{sen\, x + \sec x}{\tan x}\, dx = \operatorname{sen}(x) + \ln(\csc x - \cot x)$$

Ejemplo No. 2

$$\int \frac{1}{x\sqrt{4x+1}}\, dx$$

1. Realizamos una sustitución, por si no logra identificarlo este es el caso de racionalización de sustituciones.

$$\boldsymbol{u = \sqrt{4x+1}} \quad \text{derivamos} \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{4x+1}} * 4 = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{4}(u^2 - 1)} \qquad ; \qquad \boldsymbol{dx = \frac{1}{2} * \sqrt{4x+1}\ du}$$

2. Sustituyendo

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\mathbf{4x+1}}}\, \boldsymbol{dx} = \int \frac{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{4x+1}}}{x * \boldsymbol{u}}\, \boldsymbol{du} = \frac{1}{2}\int \frac{u}{x * u}\, du = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}(\boldsymbol{u^2 - 1})}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{4x+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\frac{1}{4}(u^2-1)} = \frac{1}{2}\int \frac{4\,du}{u^2-1} = 2\int \frac{du}{u^2-1}$$

3. Planteando la fracción parcial

$$\frac{2}{u^2-1} = \frac{2}{(u-1)*(u+1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1}$$

$$2 = \left[\frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1}\right] * (u-1)\,(u+1)$$

$$2 = A\,(u+1) + B\,(u-1)$$

$$2 = A\,u + A + Bu - B$$

$$\boxed{2} = A\,u + \boxed{A} + Bu\boxed{-\ B}$$

4. Planteando las ecuaciones

$$0 = A + B$$
$$2 = A - B$$

5. Los resultados serán:

$$A = 1$$
$$B = -1$$

6. La fracción parcial será

$$\frac{2}{u^2-1} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}$$

7. Volviendo a la integral del paso 2 tendremos

$$2\int \frac{du}{u^2-1} = \int \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\,du = \int \frac{1}{u-1}\,du - \int \frac{1}{u+1}\,du$$

$$2\int \frac{du}{u^2-1} = \int \frac{1}{u-1}\,du - \int \frac{1}{u+1}\,du = \ln(u-1) - \ln(u+1)$$

8. Volviendo a la variable original

$$\ln(u-1) - \ln(u+1) = \ln\left(\sqrt{4x+1}-1\right) - \ln\left(\sqrt{4x+1}+1\right)$$

9. La respuesta será

$$\int \frac{1}{x\sqrt{4x+1}}\,dx = \ln\left(\sqrt{4x+1}-1\right) - \ln\left(\sqrt{4x+1}+1\right) + C = \ln\left(\frac{\sqrt{4x+1}-1}{\sqrt{4x+1}+1}\right) + C$$

Ejemplo No. 3

$$\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} dx$$

1. Realizamos una sustitución

$$\boldsymbol{m = \sqrt{x}} \qquad \boldsymbol{m^2 = x}$$

$$\frac{dm}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{por tanto:} \quad \boldsymbol{dx = 2\sqrt{x}\, dm}$$

2. Sustituyendo

$$\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} \boldsymbol{dx} = \int \sqrt{x} * e^{\boldsymbol{m}} * \boldsymbol{2\sqrt{x}\, dm} = 2\int \sqrt{x} * \sqrt{x} * e^m\, dm = 2\int x * e^m\, dm$$

2.1. Sustituyendo m en x

$$2\int \boldsymbol{x} * e^m\, dm = 2\int \boldsymbol{m^2} * e^m\, dm$$

3. Resolviendo la integral por partes

$$2\int m^2 * e^m\, dm$$

3.1. Debemos identificar a través de la palabra ALPES, u y dv

$$\boldsymbol{u = m^2} \qquad \boldsymbol{\mathrm{dv} = 2\, e^m\, dm}$$

$$\frac{du}{dm} = 2m \qquad \mathrm{v} = \int 2\, e^m\, dm$$

$$\boldsymbol{du = 2m\, dm} \qquad \boldsymbol{\mathrm{v} = 2\, e^m}$$

3.2. Planteando la integral por partes

$$\int u\ \mathrm{dv} = u * \mathrm{v} - \int \mathrm{v}\, du$$

$$\boldsymbol{2}\int \boldsymbol{m^2} * \boldsymbol{e^m\, dm} = \boldsymbol{m^2} * \boldsymbol{2e^m} - \int \boldsymbol{2\, e^m} * \boldsymbol{2m\, dm}$$

$$2\int m^2 * e^m\, dm = 2\, m^2 e^m - 4\int m * e^m\ dm$$

3.3. Integrando nuevamente por aparte

$$4\int m * e^m\ dm$$

3.4. Identificando nuevamente u y dv

$$\boldsymbol{u = m} \qquad \boldsymbol{\mathrm{dv} = 4e^m\, dm}$$

$$\frac{du}{dm} = 1 \qquad \mathrm{v} = 4\int e^m\, dm$$

$$\boldsymbol{du = dm} \qquad \boldsymbol{\mathrm{v} = 4e^m}$$

3.5. Planteando nuevamente la integral por partes

$$\int u \; dv = u * v - \int v \; du$$

$$4\int m * e^m \; dm = m * 4e^m - \int 4e^m * dm$$

$$4\int m * e^m \; dm = m * 4e^m - 4\int e^m * dm$$

$$4\int m * e^m \; dm = 4\, m\, e^m - 4\, e^m$$

4. Regresando a la integral principal

$$2\int m^2 * e^m \, dm = 2\, m^2 e^m - 4\int m * e^m \; dm$$

$$2\int m^2 * e^m \, dm = 2\, m^2 e^m - [4\, m\, e^m - 4\, e^m]$$

$$2\int m^2 * e^m \, dm = 2\, m^2 e^m - 4\, m\, e^m + 4\, e^m$$

5. Volviendo a la variable original

$$2\, m^2 e^m - 4\, m\, e^m + 4\, e^m = 2\, x\, e^{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} + 4\, e^{\sqrt{x}}$$

6. La respuesta entonces será:

$$\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} dx = 2\, x\, e^{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} + 4\, e^{\sqrt{x}} + C$$

Ejemplo No. 4

$$\int \sqrt{1 - sen\, x}\; dx$$

1. Claramente se trata de una integral trigonométrica. Comenzamos realizando una sustitución

$$u = sen\, x \quad ; \quad \frac{du}{dx} = \cos x$$

1.1. Dejamos $\cos x$ en términos de u

$$\cos x = \sqrt{1 - sen^2 x} = \sqrt{1 - u^2}$$

1.2. Por tanto, el diferencial será:

$$\frac{du}{dx} = \cos x = \sqrt{1 - u^2} \qquad \text{entonces:} \qquad dx = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

2. Realizamos la sustitución

$$\int \sqrt{1 - sen\, x}\; dx = \int \sqrt{1 - u} * \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

2.2. Simplificamos la expresión

$$\int \sqrt{1 - u} * \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \int \sqrt{1 - u} * \frac{du}{\sqrt{(1 - u) * (1 + u)}} =$$

$$\int \sqrt{1-u} * \frac{du}{\sqrt{(1-u)*(1+u)}} = \int \cancel{\sqrt{1-u}} * \frac{du}{\cancel{\sqrt{1-u}} * \sqrt{1+u}} = \int \frac{du}{\sqrt{1+u}}$$

2.3. Realizamos una sustitución para resolver la integral del paso 2.2.

$$\boldsymbol{m = 1 + u} \qquad \text{derivamos:} \qquad dm = du$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{\boldsymbol{1+u}}} = \int \frac{dm}{\sqrt{\boldsymbol{m}}} = \int m^{-1/2}\, dm = \frac{m^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{m}$$

3. Volviendo a la variable original

$$2\sqrt{m} = 2\sqrt{1+u} = 2\sqrt{1+sen\,x}$$

4. Teniendo así la respuesta

$$\int \sqrt{1-sen\,x}\, dx = 2\sqrt{1+sen\,x} + C$$

Ejemplo No. 5

$$\int \frac{t}{t^4+2}\, dt$$

1. Realizamos una sustitución

$$u = t^2 \qquad \text{derivamos:} \quad du = 2t * dt \qquad \text{por tanto:} \quad \boldsymbol{dt = \frac{du}{2t}}$$

$$\boldsymbol{u^2 = t^4}$$

2. Sustituimos

$$\int \frac{t}{\boldsymbol{t^4}+2}\, \boldsymbol{dt} = \int \frac{t}{\boldsymbol{u^2}+2} * \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{2t}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+2} * du$$

3. En base a la **Tabla 1.5.a** integramos sabiendo que:

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{a}\, tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

4. El valor de a es $\sqrt{2}$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+2} * du = \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{2}} * tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)$$

5. La respuesta es:

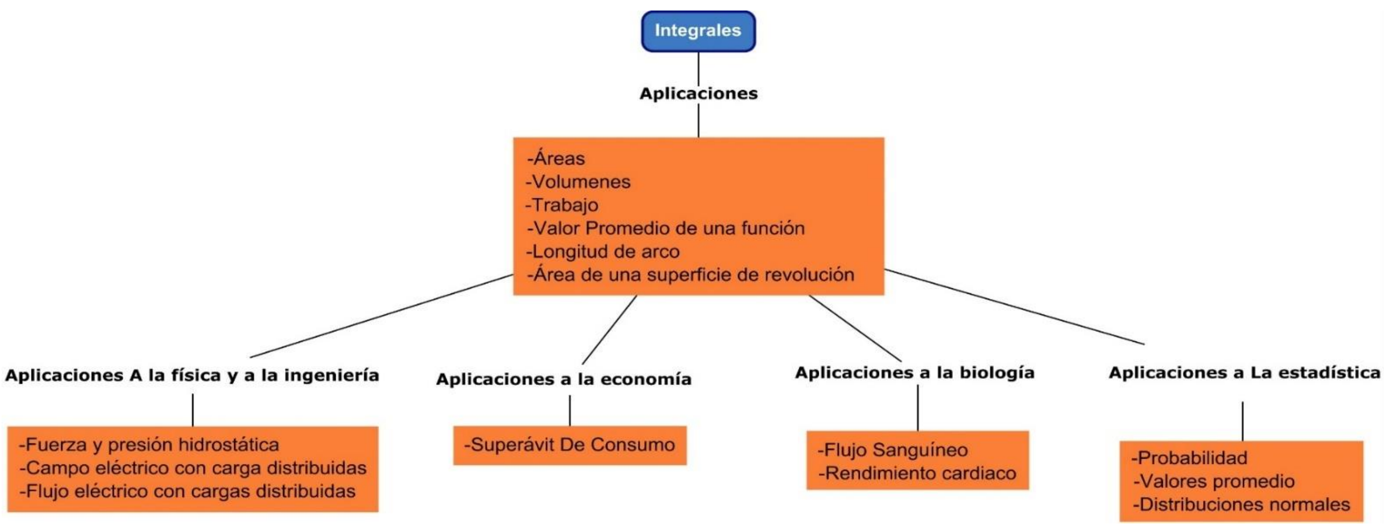
$$\int \frac{t}{t^4+2}\, dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} * tan^{-1}\left(\frac{t^2}{\sqrt{2}}\right) + C$$

1.6. APLICACIONES DE LA INTEGRAL

Es importante que usted querido lector aprenda a**:**

1. Identificar el fenómeno físico (Área, volúmenes, trabajo, etc.)
2. Plantear el diferencial
3. Plantear la integral (límites de integración)
4. Resolver la integral (temas vistos en la sección anterior)
5. Interpretar el resultado (saber si es un resultado correcto)

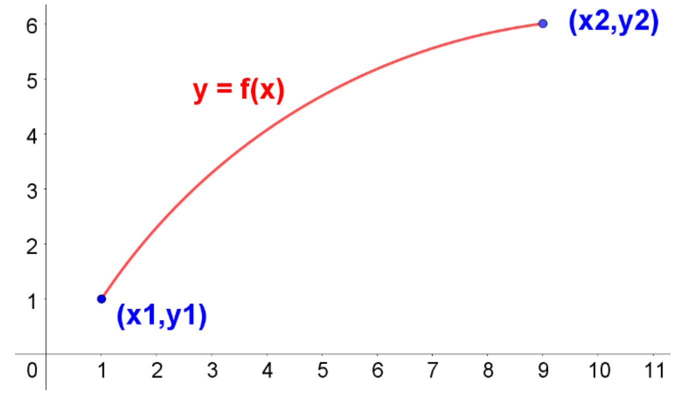
Los temas para ver en esta sección son:



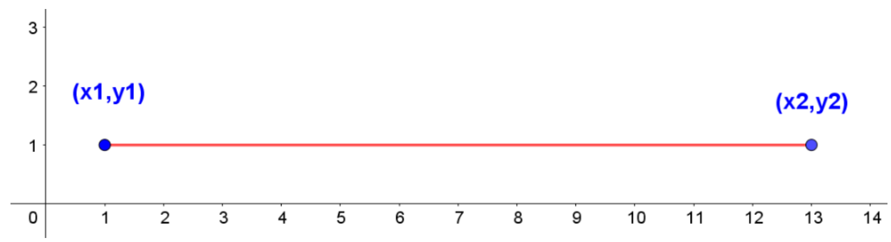
En la portada usted observa al humano con el tigre. En este punto usted ya debe ser amigo del tigre, ya tuvo que haberlo domado y sobre todo, ya se tuvo que haber dado cuenta que no es imposible.

1.6.1. Longitud de arco

Esta parte del cálculo nos enseña a sacar distancias de una función desde un punto (x_1, y_1) a un punto (x_2, y_2)



Entonces, esta función es como si la pusiéramos de forma lineal (recta) y la midiéramos.



Aplicaciones en la ingeniería

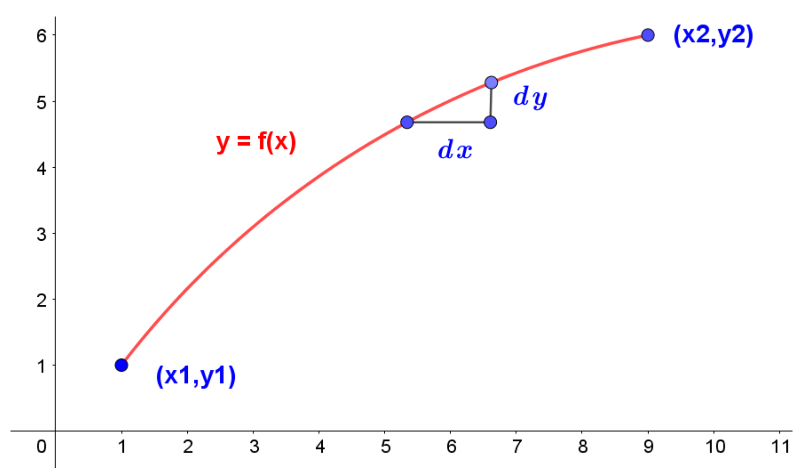
- Cálculo de tendidos eléctricos
- En ingeniería Civil para la construcción de puentes
- Compuertas sumergidas. Un ingeniero civil, encargado de la construcción de una represa casi nunca está llena y como bien sabe las represas no son rectas, sino que tienen una curva para poder soportar la fuerza hidrostática que ejerce el agua en la represa. Para eso es importante saber la longitud de arco.
- Trayecto de una montaña rusa.

¿De dónde se obtiene la fórmula?

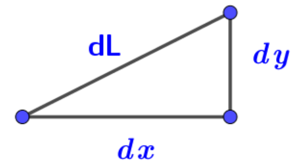
1. Teniendo la gráfica se ingresan dos puntos muy cercanos como lo muestra la siguiente imagen:

Con dx (diferencial de x)
Precisamente en el eje x

Con dy (diferencial de y)
Precisamente en el eje y



2. Entonces también se tendrá un dL (diferencial de longitud)



2.1. Como se puede notar, se tiene un triángulo rectángulo por Pitágoras que podemos relacionar

$$(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$\frac{dL}{dx} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{dx}$$

$$\frac{dL}{dx} = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(dx)^2}} = \sqrt{\frac{(dx)^2}{(dx)^2} + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

2.2. El diferencial que estaba dividiendo pasa a multiplicar

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

2.3. Como se sabe que:

$$L = \int dL$$

3. Entonces decimos que:

$$\boxed{L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx} \quad \textbf{Ecuación 1.6.a}$$

Donde: $L =$ Longitud de la función $de\ x_1\ \ a\ \ x_2$; $\boldsymbol{y = f(x)}$ es la función ; $\frac{dy}{dx} = y'$ la derivada

4. Para dejar en términos de y la integral, analizamos nuevamente:

$$(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$\frac{dL}{dy} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{dy}$$

$$\frac{dL}{dy} = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(dy)^2}} = \sqrt{\frac{(dx)^2}{(dy)^2} + \frac{(dy)^2}{(dy)^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

4.1. El diferencial que estaba dividiendo pasa a multiplicar

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy$$

$$\boxed{L = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy \ = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + (x\,')^2}\, dy} \qquad \textbf{Ecuación 1.6.b}$$

Esto en caso de que no se pueda despejar para x

Ejemplo 1

Plantee la integral que represente la longitud de la función. Después utilice una calculadora para encontrar la longitud con una aproximación de 4 decimales

$$y = senx \qquad 0 \leq x \leq \pi$$

1. Siguiendo la **ecuación 1.6.a** de longitud, procedemos a derivar la función:

$$\boldsymbol{y = senx}$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = cosx} \qquad \text{entonces:} \quad \boldsymbol{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = cos^2x} \qquad x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = \pi$$

2. Sustituyendo los valores

$$L \ = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \boldsymbol{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\ dx \ = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \boldsymbol{cos^2x}}\ \ dx$$

3. Sustituimos los valores en una calculadora (porque el problema pide aproximar)

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 + cos^2x}\ \ dx = 3.82019$$

4. Llegando a la respuesta

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + cos^2x}\ \ dx = 3.82019 \text{ unidades}$$

NOTA: Observe que la longitud se representa su sistema de medida en unidades (puede ser centímetros, metros, pies, pulgadas…)

Ejemplo 2

Determine la longitud exacta de la siguiente curva.

$$y = \ln(secx) \qquad 0 \leq x \leq {}^{\pi}/_{4}$$

1. Identificamos la función y la identidad dentro de ella.

$$y = f(x) = \ln(secx) = \ln\left(\frac{1}{cosx}\right)$$

2. Para su derivada debemos utilizar regla de la cadena

$$y = \ln\left(\frac{1}{cosx}\right) \quad ; \quad \boldsymbol{u = \frac{1}{cosx}} \quad ; \quad \text{otra sustitución:} \quad \boldsymbol{\mathrm{m} = cosx} \; ; \quad \boldsymbol{\frac{d\mathrm{m}}{dx} = -senx}$$

$$\text{entonces:} \qquad \boldsymbol{u} = \frac{1}{\mathrm{m}} = \mathrm{m}^{-1} \qquad ; \qquad \boldsymbol{\frac{du}{d\mathrm{m}} = -\mathrm{m}^{-2} = -\frac{1}{\mathrm{m}^2}}$$

3. Sustituyendo en x la variable u. Luego derivamos respecto a u

$$y = \ln\left(\frac{1}{cosx}\right) = \ln(u) \qquad \boldsymbol{\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}}$$

4. Procedemos a derivar por regla de la cadena

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{d\mathrm{m}} * \frac{d\mathrm{m}}{dx}}$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} * -\frac{1}{\mathrm{m}^2} * -senx}$$

5. Regresando a la variable original

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{1}{cosx}} * \frac{1}{cos^2x} * senx} \quad = \quad cosx * \frac{1}{cos^2x} * senx \quad = \quad tanx$$

6. Quedando la derivada

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = tanx}$$

7. Sustituyendo en la fórmula de longitud de curva

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \boldsymbol{tan^2x}}\, dx$$

8. Utilizamos la identidad trigonométrica que dice:

$$1 + tan^2x = sec^2x$$

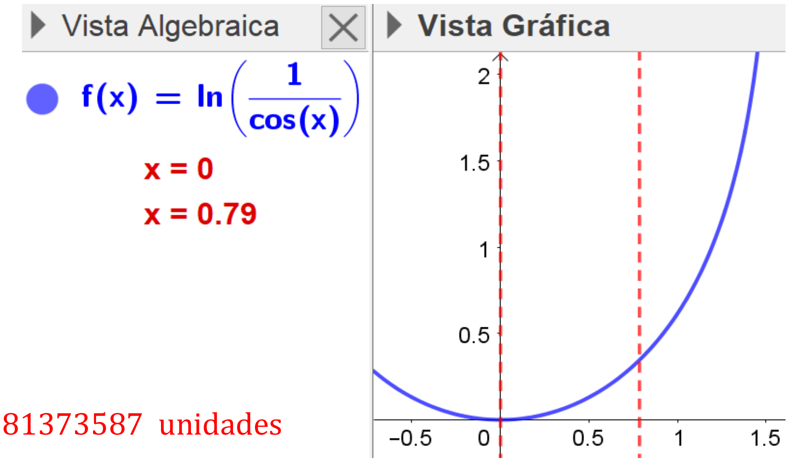
9. Entonces decimos:

$$\int \sqrt{1 + tan^2x}\, dx \; = \; \int \sqrt{sec^2x}\, dx \; = \; \int secx\, dx \; = \; \ln(tanx + secx)$$

10. Quedando la integral

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+tan^2x}\,dx \;=\; \ln(tanx+secx)\Big|_0^{\pi/4} \;=\; \ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \;=\; 0.881373587$$

11. Quedando la longitud de arco:



$$\mathrm{L} = \ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = 0.881373587\ \text{ unidades}$$

Ejemplo 3

Determine la longitud exacta de la siguiente curva:

$$x = \frac{1}{3}\sqrt{y}\,\,(y-3) \qquad 1 \le y \le 9$$

1. Como x está en función de y, debemos integrar respecto a y y para ello debemos utilizar la **Ecuación 1.6.b**

$$L = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy \;=\; \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1+(x')^2}\,dy$$

2. Resolviendo el producto notable

$$x = \frac{1}{3}\sqrt{y}\,\,(y-3) \;=\; \frac{1}{3}\,y^{\frac{1}{2}}\,(y-3) \;=\; \frac{1}{3}\,y^{\frac{1}{2}+1} - y^{\frac{1}{2}} \;=\; \frac{1}{3}\,y^{3/2} - y^{1/2}$$

3. Derivamos x respecto a y

$$\frac{dx}{dy} \;=\; \frac{1}{2}y^{1/2} - \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} \;=\; \frac{1}{2}\left(y^{1/2} - y^{-1/2}\right)$$

4. Ingresando en la fórmula los valores

$$L \;=\; \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy \;=\; \int_1^9 \sqrt{1+\left[\frac{1}{2}\left(y^{\frac{1}{2}} - y^{-\frac{1}{2}}\right)\right]^2}\,\,d \;=\; \int_1^9 \sqrt{1+\frac{1}{4}(y^{1/2}-y^{-1/2})^2}\,\,dy$$

$$L = \int_1^9 \sqrt{\frac{1}{4}\left[4 + (y^{1/2} - y^{-1/2})^2\right]}\; dy \quad = \quad \frac{1}{2}\int_1^9 \sqrt{4 + \left(y^{\frac{1}{2}} - y^{-\frac{1}{2}}\right)^2}\; dy$$

5. Donde

$$\left(y^{1/2} - y^{-1/2}\right)^2 \quad = \quad \left(y^{1/2}\right)^2 - 2y^{\frac{1}{2}} * y^{-\frac{1}{2}} + \left(y^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \quad = \quad y - 2 + y^{-1}$$

6. Entonces

$$\frac{1}{2}\int_1^9 \sqrt{4 + \left(y^{\frac{1}{2}} - y^{-\frac{1}{2}}\right)^2}\; dy \quad = \quad \frac{1}{2}\int_1^9 \sqrt{4 + y - 2 + y^{-1}}\, dy \quad = \quad \frac{1}{2}\int_1^9 \sqrt{2 + y + y^{-1}}\, dy$$

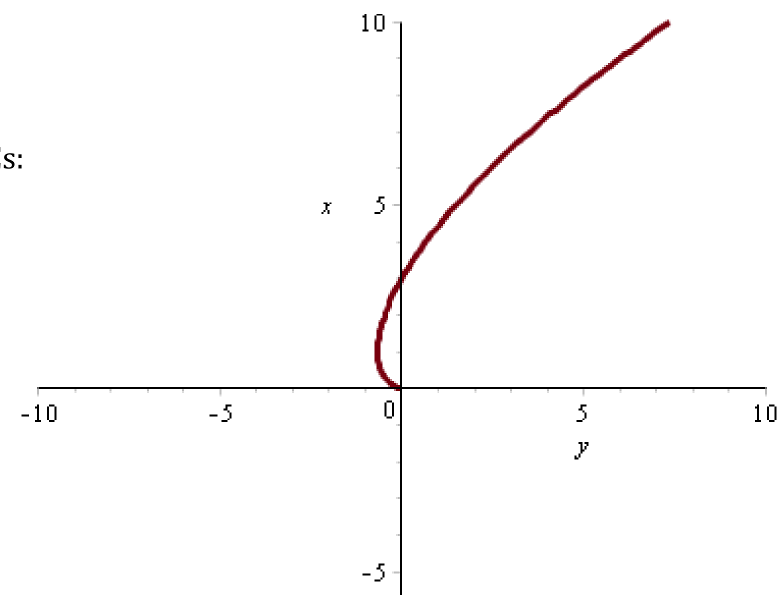
$$= \frac{1}{2}\int_1^9 \sqrt{2 + y + y^{-1}}\; dy \quad = \frac{1}{2}\int_1^9 \sqrt{\frac{2y + y^2 + 1}{y}}\; dy \quad = \quad \frac{1}{2}\int_1^9 \frac{\sqrt{y^2 + 2y + 1}}{\sqrt{y}}\; dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^9 \frac{\sqrt{(y+1)^2}}{\sqrt{y}}\; dy \quad = \quad \frac{1}{2}\int_1^9 \frac{y+1}{\sqrt{y}}\, dy \quad = \quad \frac{1}{2}\int_1^9 y^{1/2} + y^{-1/2}\, dy \quad = \quad \frac{1}{2}\left[\frac{y^{3/2}}{3/2} + \frac{y^{1/2}}{1/2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}y^{3/2} + 2y^{1/2}\right] \quad = \quad \frac{1}{3}\sqrt{y^3} + \sqrt{y}\;\Bigg|_1^9 \quad = \quad 12 - \frac{4}{3} \quad = \quad \frac{32}{3}$$

7. La longitud de la curva dada por la función:

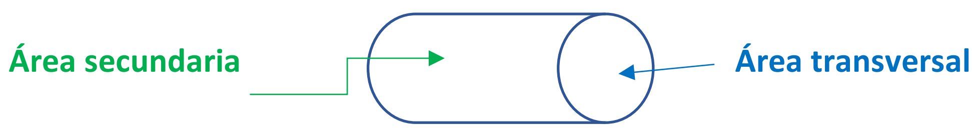
$$x = \frac{1}{3}\sqrt{y}\;(y - 3) \qquad 1 \le y \le 9 \quad \text{Es:}$$



$$L \;=\; \frac{32}{3} \;=\; 10.6667\;\; \text{Unidades}$$

1.6.2. Área superficial

En esta sección se analizan áreas superficiales. Primero analizaremos ¿en qué consiste un área superficial? Pensemos en al siguiente cilindro. Como puede notar tiene un área transversal y un área secundaria:

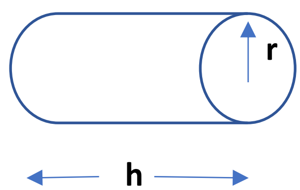


Entonces:

El área superficial sería la suma del área transversal de ambos lados más la suma del área secundaria.

$$\text{Área superficial} = \mathbf{A_s} = 2 * \text{Área transversal} + \text{Área secundaria}$$

Introduzcamos variables en el cilindro anterior



$$\text{Área secundaria} = 2\pi * r * h$$
$$\text{Área transversal} = \pi r^2$$

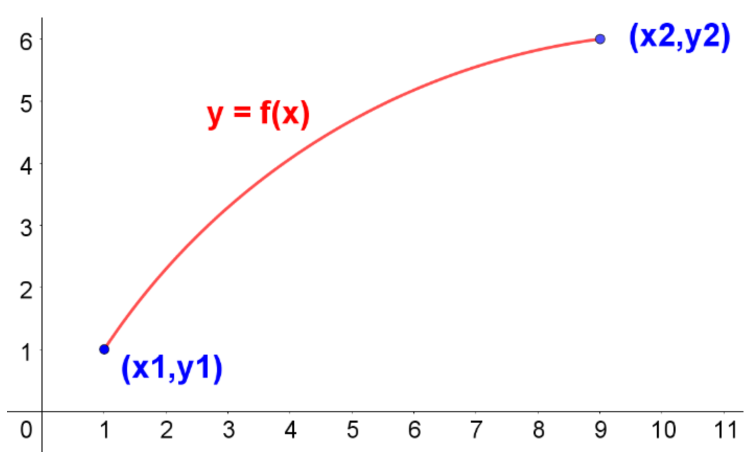
$$\boxed{\text{Área superficial} = \mathbf{A_s} = 2\,\pi\, r^2 + 2\,\pi\, r\, h}$$

Con el análisis anterior se puede decir que el área superficial es el "área" que encierra la figura o encierra el volumen del sólido (El área limitante al sólido)

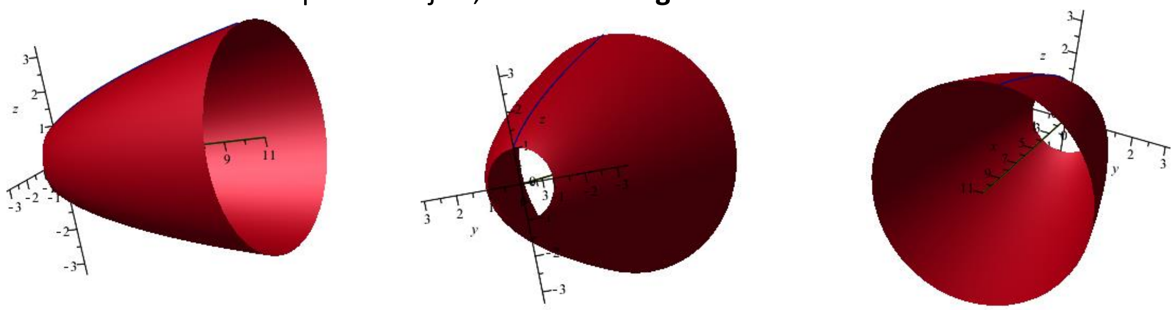
¿Qué tipo de fenómeno físico vemos acá?

El tipo de área superficial que vemos acá **es el área superficial que forma una función que rota respecto a un eje. (Como cuando se generaban volúmenes en mate 2)**

Pensemos que tenemos nuevamente la función $y = f(x)$, como lo muestra la siguiente gráfica



Entonces esta función rota respecto al eje x, **formará el siguiente sólido:**



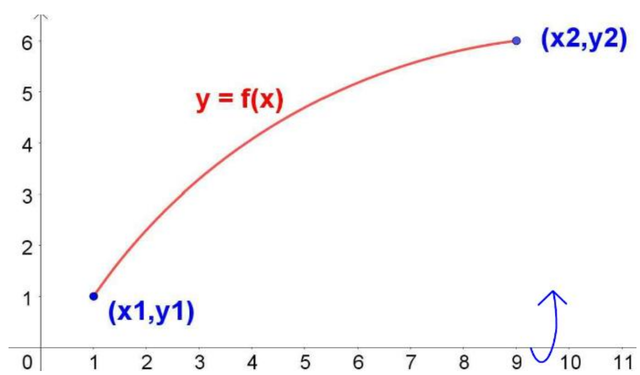
En matemática Básica 2 nos interesa el volumen que genera esta rotación entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

Ahora nos interesa saber el área superficial de dicho sólido (la cantidad de material para formar dicho sólido)

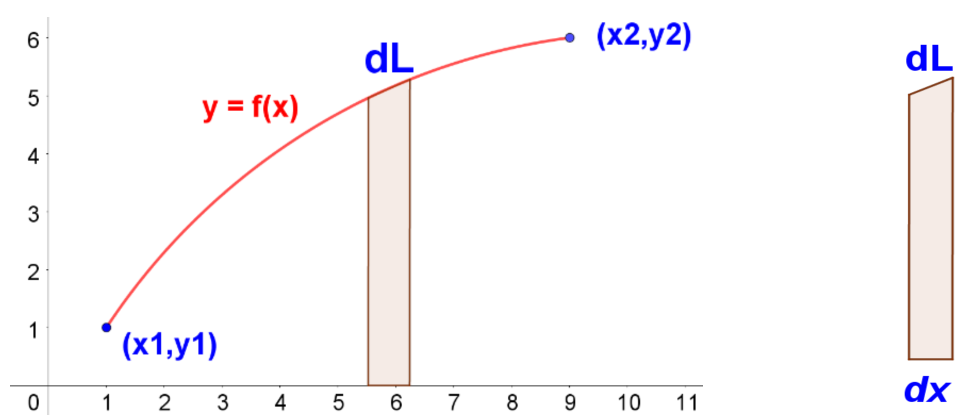
¿De dónde se obtienen las fórmulas?

A. Rotación Respecto x

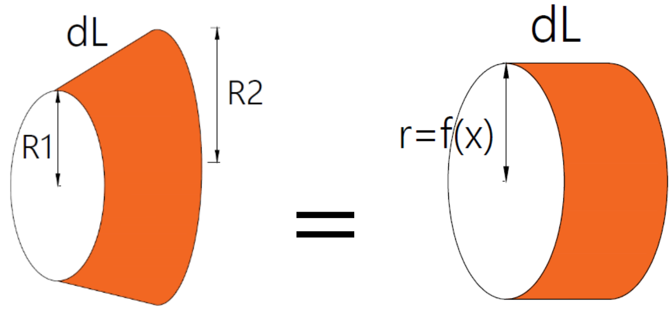
1. Con la misma función $y = f(x)$ y rotándola respecto al eje x comenzamos:



2. Ingresamos un diferencial de la siguiente manera. Note querido lector qué es casi un rectángulo a diferencia que en la parte superior tiene longitud dL (diferencial de longitud)



3. Cuando el diferencial rote respecto a x formará la siguiente figura aproximada. Esta figura (la de la izquierda) se iguala a la figura de la derecha.



Ambos son diferenciales. Lo que está en el color ▬ es lo que nos interesa analizar, pues son los diferenciales de área superficial.

4. Analicemos el diferencial del lado derecho. Para sacar el área superficial de color ▬ decimos lo siguiente:

$$dA_s = 2\pi * \textbf{radio} * \textbf{espesor}$$

$$dA_s = 2\pi\, \boldsymbol{r}\, \boldsymbol{dL}$$

$$\text{Recuerde la } \textbf{ecuación 1.6.a} \quad \boldsymbol{dL = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\; dx}$$

5. Sustituyendo en el diferencial de área superficial la ecuación 1.6.a

$$dA_s = 2\pi\, \boldsymbol{f(x)} * \boldsymbol{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\; dx}$$

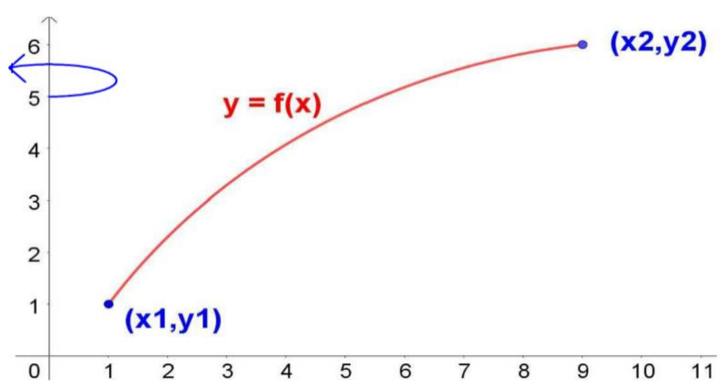
$$\text{y como se sabe que } A_s = \int dA_s \qquad \text{Entonces :}$$

$$A_s = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi\, f(x) * \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\; dx$$

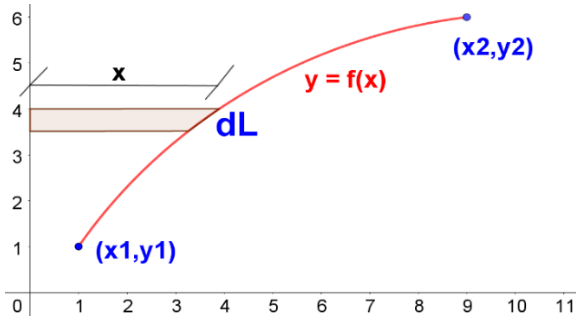
$$\boxed{A_s = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x) \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\; dx \;=\; 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+(y')^2}\; dx} \quad \textbf{Ecuación 1.7.a}$$

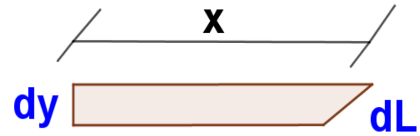
B. Rotación Respecto y

1. Si la curva está descrita en función de y $[x = g(y)]$ así como $y_1 \leq y \leq y_2$.

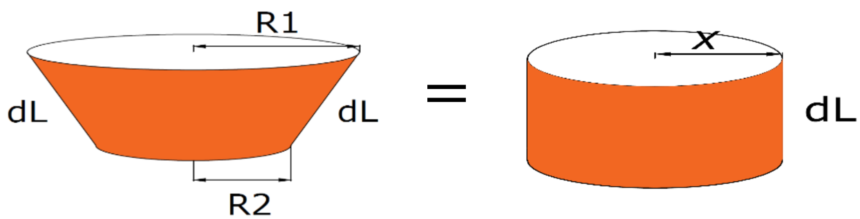


2. Ingresando el diferencial será:





3. Planteando el diferencial:



4. Analicemos el diferencial del lado derecho. Para sacar el área superficial de color ▬ decimos lo siguiente:

$$dA_s = 2\pi * \textbf{radio} * \textbf{espesor}$$

$$dA_s = 2\pi\, \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{dL}$$

$$\text{Recuerde la } \textbf{ecuación 1.6.b} \quad \boldsymbol{dL = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy}$$

5. Sustituyendo en el diferencial de área superficial la ecuación 1.6.a

$$dA_s = 2\pi\, \boldsymbol{x} * \boldsymbol{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy}$$

$$\text{y como se sabe que } A_s = \int dA_s \quad \text{entonces}$$

$$A_s = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi\, x * \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$\boxed{A_s = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \;=\; 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x\sqrt{1+(x')^2}\, dy} \qquad \textbf{Ecuación 1.7.b}$$

NOTA: Vea que todo depende de cómo usted ingresa el diferencial. Si la función rota respecto a x o alguna recta paralela a x, el diferencial va vertical. Si la función rota respecto a y o alguna recta paralela a y, el diferencial va acostado (Siempre debe ir a 90 grados del eje de rotación)

Ejemplo 1

Determine el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva en torno al eje x.

$$y = x^3 \qquad 0 \le x \le 2$$

1. Realizamos la gráfica, luego introducimos el diferencial para que rote respecto a x

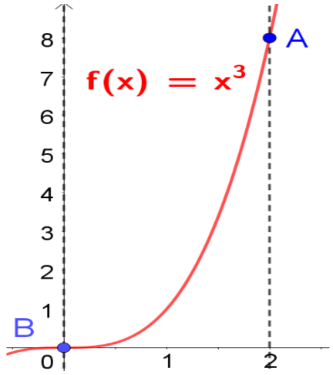


Figura 1. Gráfica de la función

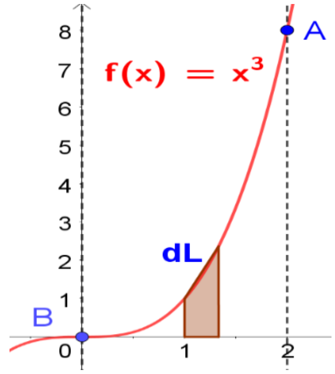


Figura 2. Se introduce el diferencial

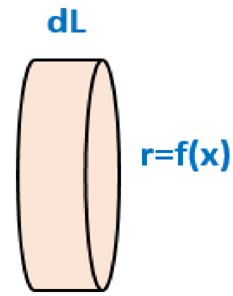


Figura 3. Diferencial

2. Planteamos el diferencial en área superficial de la figura 3.

$$dAs = 2\pi * \boldsymbol{r} * \boldsymbol{dL}$$

2.1. Identificando que el radio $r = f(x)$ y que $dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

3. Sustituyendo los datos en el diferencial

$$dAs = 2\pi * \boldsymbol{x^3} * \sqrt{\boldsymbol{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \; \boldsymbol{dx}$$

4. Procedemos a derivar respecto a x

$$y = x^3 \;\; ; \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 \quad ; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 9x^4 \quad ; \quad dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \; dx = \sqrt{1 + 9x^4}\, dx$$

5. Entonces

$$dA_s = 2\pi * \boldsymbol{x^3} * \boldsymbol{\sqrt{1 + 9x^4}} \; \boldsymbol{dx}$$

6. Integrando

$$A_s = 2\pi \int_0^2 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} \; dx$$

7. Se realiza una sustitución

$$\boldsymbol{u = 1 + 9x^4}$$

$$\frac{du}{dx} = 36x^3 \;\; ; \quad \boldsymbol{\frac{du}{36x^3} = dx} \quad \textbf{cuando}: \quad x = 0 \quad u = 1 \quad ; \quad x = 2 \quad u = 145$$

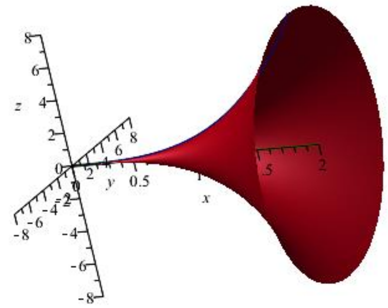
8. Realizando la sustitución

$$A_s = 2\pi \int_0^{145} x^3 \sqrt{\boldsymbol{u}} \, \boldsymbol{\frac{du}{36x^3}} \quad = \quad \frac{\pi}{18} \int_0^{145} u^{1/2}\, du \quad = \quad \frac{\pi}{18} * \frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{\pi}{27} \sqrt{u^3} \Bigg|_1^{145}$$

$$A_s = \frac{\pi}{27}\left[\sqrt{145^3} - 1\right] \quad = \quad \frac{\pi}{27}\left[145\sqrt{145} - 1\right] = 203.0436 \text{ unidades}^2$$

9. La función al rotar formará la siguiente figura

$$A_s = \frac{\pi}{27}\left[145\sqrt{145} - 1\right] = 203.0436017 \quad u^2$$



NOTA: Observe querido lector que las unidades de respuesta son unidades cuadradas, ya que es área superficial, así que pueden ser metros cuadrados, centímetros cuadrados, pies cuadrados, etc.

Ejemplo 2

Determine el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva en torno al eje x.

$$x = \frac{1}{3}(y^2 + 2)^{3/2} \quad , \quad 1 \leq y \leq 2$$

1. Realizamos el trazo de gráficas e introducimos el respectivo diferencial

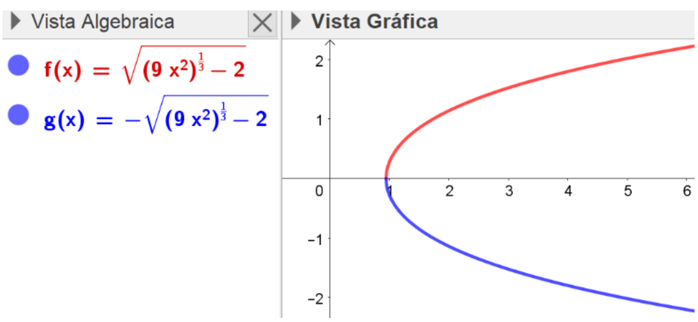


Fig 1. Trazo de la función

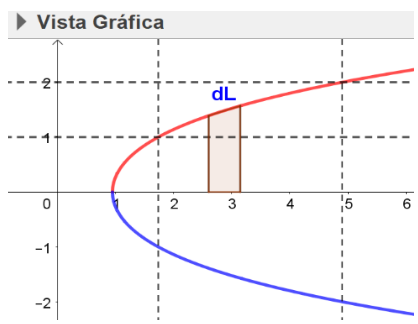


Fig 2. Introducción del diferencial

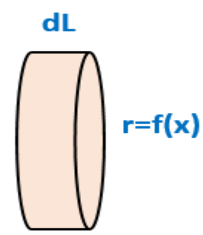


Fig 3. Diferencial 3D

CUIDADO: Al igual que en matemática Básica 2, los diferenciales van desde el eje de rotación, en este caso el eje de rotación es el eje x.

2. Analizando el área superficial de la figura No 3.

$$A_s = 2\pi * \text{radio} * \text{diferencial de longitud de curva}$$

$$A_s = 2\pi\, r\, dL$$

$$dA_s = 2\pi * y * \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\; dx$$

3. Pero como la función se tiene como *x* en términos de *y*, entonces cambiamos el diferencial de longitud, que también es válido. Esto para integrar todo respecto a una sola variable.

$$dA_s = 2\pi\, y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\; dy$$

4. Aplicamos la derivada para ingresarla en la fórmula

$$x = \frac{1}{3}(y^2+2)^{3/2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3} * \frac{3}{2}(y^2+2)^{\frac{1}{2}} * 2y = y(y^2+2)^{\frac{1}{2}} \qquad ; \qquad \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = y^2(y^2+2) = y^4+2y^2$$

5. Realizando la sustitución en el diferencial

$$dA_s = 2\pi \mathbf{y} \sqrt{\mathbf{1} + \left(\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dy}}\right)^{\mathbf{2}}}\, \mathbf{dy} = 2\pi\, \mathbf{y}\, \sqrt{\mathbf{1+y^4+2y^2}}\, \mathbf{dy}$$

6. Integrando

$$\text{As} = 2\pi \int_1^2 y\sqrt{y^4+2y^2+1}\, dy$$

$$\text{As} = 2\pi \int_1^2 y\sqrt{(y^2+1)^2}\, dy = 2\pi \int_1^2 y(y^2+1)dy = 2\pi \int_1^2 y^3 + y\, dy$$

$$\text{As} = 2\pi\left[\frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2}\right] = \pi\left[\frac{1}{2}y^4 + y^2\right] \quad \text{evaluado de } 1 \le y \le 2$$

7. La respuesta será:

$$\text{As} = \frac{21}{2}\pi = 32.986722\ \text{u}^2$$

Ejemplo 3

Determine el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva en torno al eje y.

$$y = \sqrt[3]{x} \qquad 1 \le y \le 2$$

1. Trazamos la gráfica y en la misma introducimos el diferencial para que rote respecto a y

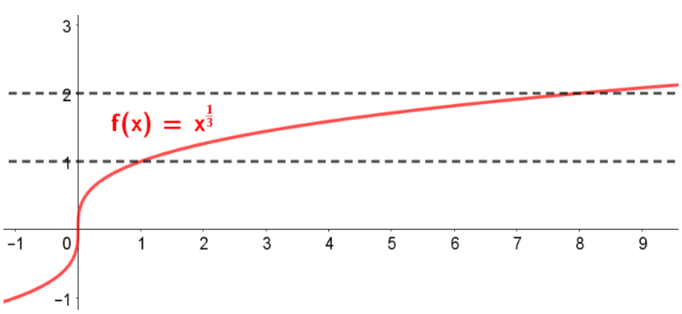


Figura No.1 Gráfica de la función

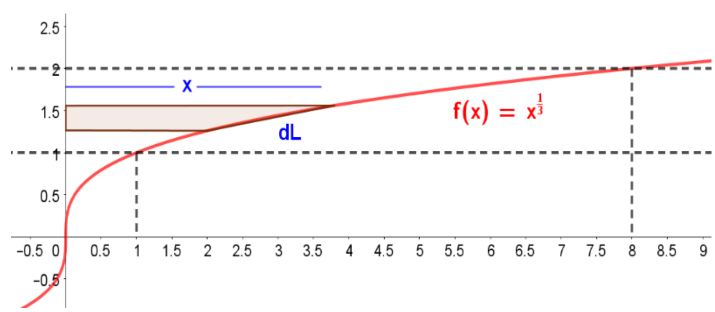


Figura No. 2 Se ingresa el diferencial y se rota

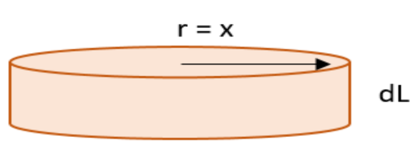


Figura No.3 El diferencial en 3D

2. Analizamos el diferencial de la figura No. 3

$$dA_s = 2\pi * \mathbf{radio} * \mathbf{altura} = 2\pi * \boldsymbol{x} * \boldsymbol{dL}$$

$$dA_s = 2\pi * x * \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

3. Derivando respecto a x

$$y = \sqrt[3]{x} \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} * \frac{1}{x^{2/3}} \quad ; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

4. El diferencial de área será:

$$dA_s = 2\pi * x * \sqrt{1 + \frac{1}{9\sqrt[3]{x^4}}}\ dx \qquad \text{Como } 1 \le y \le 2 \ \text{ Entonces } \quad 1 \le x \le 8$$

5. Aplicando la integral

$$A_s = 2\pi \int_1^8 x \sqrt{1 + \frac{1}{9\sqrt[3]{x^4}}}\ dx$$

6. Resolviendo la integral

$$A_s = 2\pi \int_1^8 x \sqrt{\frac{9\sqrt[3]{x^4} + 1}{9\sqrt[3]{x^4}}}\ dx = 2\pi \int_1^8 x \frac{\sqrt{9\sqrt[3]{x^4} + 1}}{\sqrt{9\sqrt[3]{x^4}}}\ dx = 2\pi \int_1^8 x \frac{\sqrt{9\sqrt[3]{x^4} + 1}}{3(x^{4/3})^{1/2}}\ dx$$

$$A_s = 2\pi \int_1^8 x \frac{\sqrt{9\sqrt[3]{x^4} + 1}}{3(x^{4/3})^{1/2}}\ dx = 2\pi \int_1^8 x * \frac{\sqrt{9\sqrt[3]{x^4} + 1}}{3x^{2/3}}\ dx = \frac{2\pi}{3} \int_1^8 x^{1-2/3} * \sqrt{9\sqrt[3]{x^4} + 1}\ dx$$

$$A_s = \frac{2\pi}{3} \int_1^8 x^{1/3} \sqrt{9\sqrt[3]{x^4} + 1}\ dx$$

7. Realizamos una sustitución

$$u = x^{4/3} \quad ; \quad \frac{du}{dx} = \frac{4}{3} x^{1/3} \quad ; \quad \frac{3}{4} \frac{du}{x^{1/3}} = dx$$

$$\text{Cuando:} \quad x = 1 \quad u = 1 \quad ; \quad x = 8 \quad u = 16$$

8. Realizando la sustitución

$$A_s = \frac{2\pi}{3} \int_1^8 x^{1/3} \sqrt{9\sqrt[3]{x^4} + 1}\ dx = \frac{2\pi}{3} \int_1^{16} x^{1/3} \sqrt{9u + 1} * \frac{3}{4} \frac{du}{x^{1/3}} = \frac{\pi}{2} \int_1^{16} \sqrt{9u + 1}\ du$$

9. Se procede a realizar otra sustitución

$$m = 9u + 1 \quad ; \quad \frac{dm}{du} = 9 \qquad entonces \quad \frac{dm}{9} = du$$

$$\text{cuando } u = 1 \quad m = 10\ ; \quad \text{cuando } u = 16 \quad m = 145$$

10. Procediendo a sustituir la nueva variable

$$A_s = \frac{\pi}{2}\int_1^{16}\sqrt{\boldsymbol{9u+1}}\ \boldsymbol{du} = \frac{\pi}{2}\int_{10}^{145}\sqrt{\boldsymbol{m}} * \frac{\boldsymbol{dm}}{\boldsymbol{9}} = \frac{\pi}{18}\int_{10}^{145} m^{1/2}\, dm = \frac{\pi}{18} * \frac{m^{3/2}}{3/2}$$

$$A_s = \frac{\pi}{27}\sqrt{m^3}\,\Bigg|_{10}^{145} = \frac{\pi}{27}\left[145\sqrt{145} - 10\sqrt{10}\right]$$

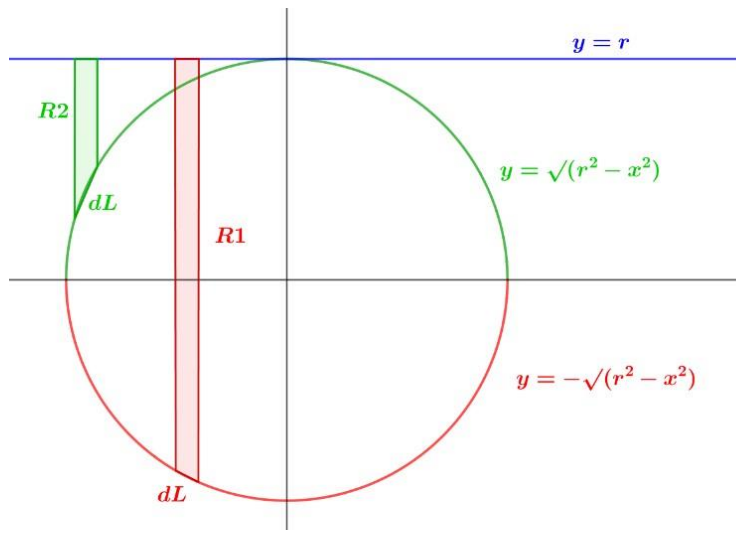
11. La respuesta es:

$$A_s = \frac{\pi}{27}\left[145\sqrt{145} - 10\sqrt{10}\right] = 199.48047\ u^2$$

Ejemplo 4

Encuentre el área de la superficie obtenida al hacer girar la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en torno a la recta $y = r$

1. La mejor manera de realizar el problema es planteando los diferenciales por separado para despueés sumarlos.



$R_1 =$ Altura de r a y

$R_1 = y_2 - y_1$

$R_1 = r - \left(-\sqrt{r^2 - x^2}\right)$

$$\boldsymbol{R_1 = r + \sqrt{r^2 - x^2}}$$

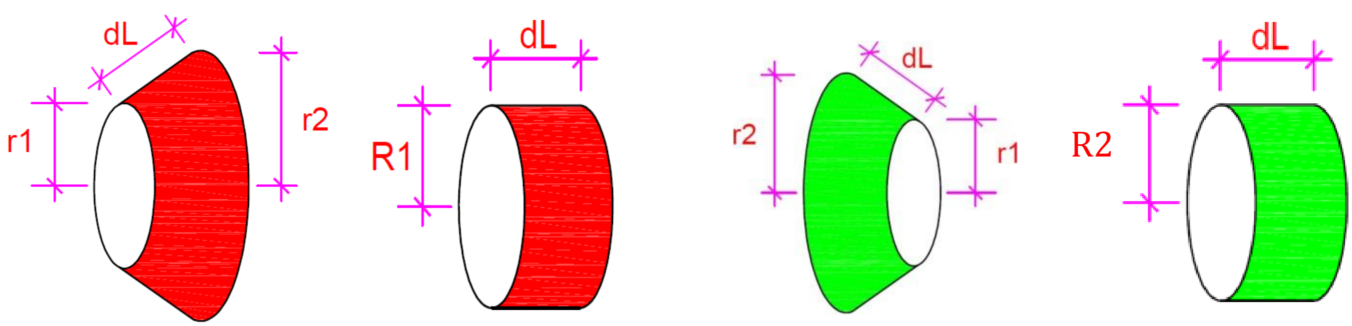
$R_2 =$ Altura de r a y

$R_2 = y_2 - y_1$

$R_2 = r - \sqrt{r^2 - x^2}$

$$\boldsymbol{R_2 = r - \sqrt{r^2 - x^2}}$$

2. Planteando el diferencial de área superficial



3. Se plantea el diferencial de área superficial

$$dA_s = dA_{s1} + dA_{s2}$$
$$dA_s = 2\pi R_1 dL + 2\pi R_2 dL$$

4. Encontrando dL

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2} \qquad y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2\sqrt{r^2-x^2}}*-2x \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}}*-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$dL=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx \qquad dL=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx$$

$$dL=\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=\sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}}\,dx \qquad dL=\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=\sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}}\,dx$$

$$dL=\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx \qquad dL=\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx$$

5. Sustituyendo los datos en el diferencial de área

$$dA_s = 2\pi R_1 dL + 2\pi R_2 dL$$

$$dA_s=2\pi\left(r+\sqrt{r^2-x^2}\right)\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx + 2\pi\left(r-\sqrt{r^2-x^2}\right)\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx$$

6. Sacando el factor común para simplificar

$$dA_s=2\pi\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx\left(r+\cancel{\sqrt{r^2-x^2}}+r-\cancel{\sqrt{r^2-x^2}}\right)$$

$$dA_s=2\pi\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx\,(2r) = 4\pi\, r\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx = 4\pi\, r^2\sqrt{\frac{1}{r^2-x^2}}\,dx = 4\pi\, r^2\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}dx$$

7. Integrando (sumando el diferencial de área superficial)

$$A_s=4\pi r^2\int_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}dx \qquad (\textbf{Para la solución ver Tabla 1.5.a})$$

8. Integrando

$$A_s=4\,\pi\, r^2\int_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = 4\,\pi\, r^2 * sen^{-1}\left(\frac{x}{r}\right)\Bigg|_{-r}^{r} = 4\pi r^2\left[sen^{-1}(1)-sen^{-1}(-1)\right]$$

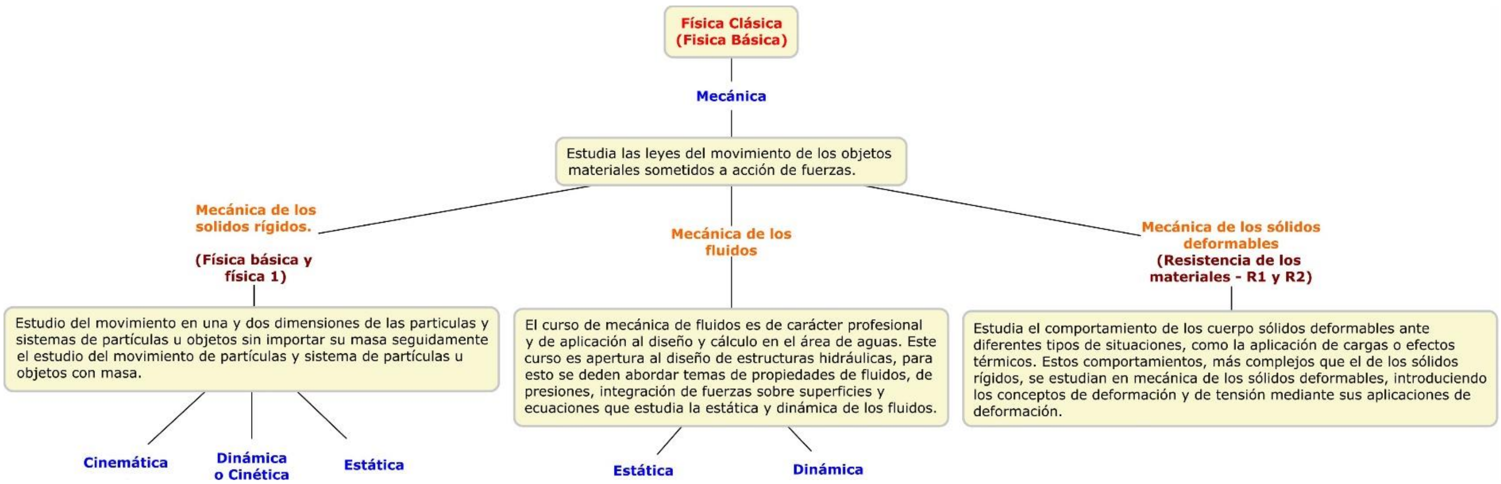
$$A_s = 4\pi r^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}\right) = 4\pi r^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 4\pi r^2\pi = 4\pi^2 r^2$$

9. La respuesta será

$$A_s = 4\pi^2 r^2$$

1.6.3. Fuerza y presión hidrostática

Este tema es respectivamente del curso de mecánica de fluidos, rama de la física clásica, como se ve en el siguiente mapa conceptual.



- **Mecánica de los sólidos rígidos:** Es el curso de física básica y la física 1. Ahí se aplican fuerzas, inercias, rotaciones de masas entre otros temas, asumiendo que no se deforman las mismas masas. Por eso el nombre de sólidos rígidos, porque no se comprimen ni se alargan las partículas.

- **Mecánica de los sólidos deformables:** Es el curso llamado Resistencia de materiales. Lo verá en la entrada del área profesional y ahí se asume lo mismo que en física básica, en donde un objeto de masa se somete a fuerzas (que generan esfuerzos) pero estos se deforman.

- **Mecánica de los fluidos** es el curso que se encarga de estudiar los fenómenos y propiedades de los fluidos, todas las propiedades que en ella implican. Al igual que los cuerpos de masa m que se ven en física se estudia los fluidos bajo efectos de carga.

Ahora veremos un fenómeno de los fluidos cuando están vertidos en un recipiente, también cuando están retenidos por una compuerta (REPRESAS). Ya que el fluido ejerce una fuerza de empuje, por lo que dicha compuerta (represa o una cara del recipiente) debe contrarrestar dicha fuerza. Si existe una fuerza también existe una presión, así que a continuación se definirá cada uno de los términos.

Definición de un fluido

Los fluidos son sustancias capaces de "fluir" y que se adaptan a la forma de los recipientes que los contienen. Los fluidos se clasifican en líquidos y gaseosos.

Una de las propiedades de los fluidos es que fluyen, por eso mismo usted no puede colocarlos en una mesa puesto que se derramaran como es lógico. El fluir hace que busque su equilibrio y por tanto al dejarlo en un recipiente busca desbordarse así mismo, por lo que la compuerta debe reaccionar con una fuerza contraria.

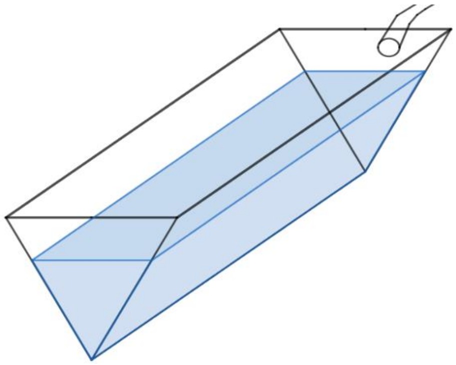


Fig 1. Recipiente que contiene el fluido

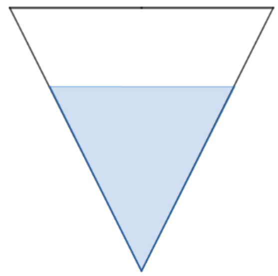


Fig 2. Vista perfil

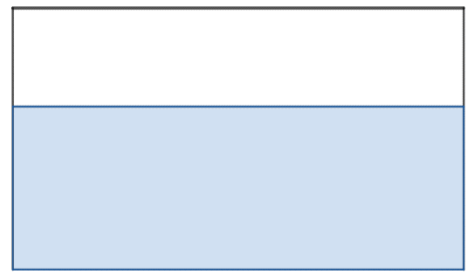
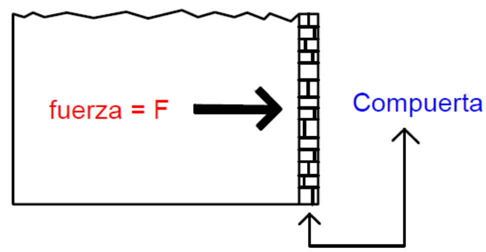


Fig 3. Vista lateral

La Figura No 2 muestra la cara frontal del recipiente, así como la figura No 3 muestra la vista lateral del recipiente. Ambas vistas son llamadas **Compuertas,** ya que son materiales que **retienen el fluido,** pero al retenerlo deben soportar la fuerza que el fluido le ejerce porque como ya se explicó anteriormente el fluido busca expandirse.



Esa fuerza del fluido es la que debe encontrar por integración. Esa fuerza del fluido es ejercida hacia la compuerta (fluido de escape)

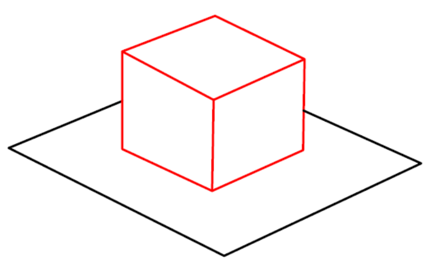
Fuerza

La fuerza de un fluido es la interacción entre la compuerta y el mismo fluido. Realmente la fuerza la ejerce el fluido y la interacción la recibe la compuerta.

Unidades de medida: En el sistema internacional (MKS) la fuerza es en Newton (N)
En el sistema inglés la fuerza se mide en libras (Lb)

Presión

La presión es la fuerza que se ejerce en una determinada área



Una caja es el ejemplo más evidente de lo que es presión. Entre más pese la caja más presión se ejercerá en el suelo

$$\text{Presión} = \text{P} = \frac{\text{Fuerza ejercida sobre el área}}{\text{Área que soporta la fuerza}} = \frac{\text{F}}{\text{A}}$$

Unidades de medida: En el sistema internacional (MKS) es Pascal $\left(\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)$

En el sistema inglés la presión se mide en Psi (Libras por pulgada cuadrada)

$$\text{Psi} = \frac{\text{Lb}}{\text{in}^2}$$

DENSIDAD (ρ)

La densidad es la relación entre la **masa** y el **volumen**.

$$\rho = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \frac{\text{m}}{\text{V}} \qquad \textit{Ejemplo}: \quad 12\ {}^{\text{Kg}}/_{\text{m}^3}$$

La densidad en el sistema internacional (MKS) es el kilogramo/metro cúbico

La densidad en el sistema inglés es el Slug/pie cúbico

PESO ESPECÍFICO (γ)

El peso específico es la relación entre el **peso** y el **volumen**.

$$\gamma = \frac{\text{Peso}}{\text{volumen}} = \frac{\text{W}}{\text{V}} \qquad \textit{Ejemplo}: \quad 12\ {}^{\text{N}}/_{\text{m}^3}$$

El peso específico en el sistema internacional es el Newton/metro cúbico

El peso específico en el sistema inglés es la libra/pie cúbico

RELACIÓN ENTRE LA DENSIDAD Y PESO ESPECÍFICO

$$\text{Peso} = \text{masa} * \text{gravedad}$$

$$\text{W} = \text{m} * g$$

Pero recordamos que la masa es:

$$\rho = \frac{\text{m}}{\text{V}} \quad ; \quad \rho * \text{V} = \text{m}$$

Eso lo sustituimos en la fórmula de peso específico

$$\gamma = \frac{\text{W}}{\text{V}} = \frac{\text{m} * g}{\text{V}} = \frac{\rho * \text{V} * g}{\text{V}} = \rho * g$$

Por tanto:

$$\text{Peso específico} = \text{Densidad} * \text{Gravedad}$$

$$\gamma = \rho * g$$

Sistemas de medida/densidad ρ y peso específico del agua γ

	Internacional (MKS)		Cegecimal (CGS)		Sistema (F.P.S)	
Cantidad	Unidad	Símbolo	Unidad	Símbolo	Unidad	Símbolo
Longitud	metro	m	centimetro	cm	pie	ft
Masa	kilogramo	kg	gramo	g	libra	lb
Tiempo	segundo	s	segundo	s	segundo	s
Temperatura	kelvin	∘k	centigrados	∘C	fahrenheit	∘F
Aceleración	metro/segundo2	$^{m}/_{s^2}$	centimetro/segundo2	$^{cm}/_{s^2}$	pie/segundo2	$^{ft}/_{s^2}$
Fuerza	Newton	N	Dina	dyn	Poundal	pdl
Trabajo o Energía	Joule	J	Ergio	Erg	Pundal-pie	pdl-ft
Potencia	watt	W	Ergio/segundo	Erg/s	Poundal-pie/segundo	pdl-ft/s
Presión	Pascal	Pa	Dina/cm2	$^{dyn}/_{cm^2}$	Pundal/segundo2	$^{pdl}/_{ft^2}$

Tabla No 1.8.a Como se miden las cantidades en el sistema internacional, Cegesimal y sistema F.PS

	Europeo		Sistema Inglés	
Cantidad	Unidad	Símbolo	Unidad	Símbolo
Longitud	metro	m	pie	ft
Masa	Unidad Técnica De Masa	UTM	slug	slug
Tiempo	segundo	s	segundo	s
Temperatura			Rankine	∘R
Aceleración	metro/segundo2	$^{m}/_{s^2}$	pie/segundo2	$^{ft}/_{s^2}$
Fuerza	Kilogramo fuerza	Kg.f	libra fuerza	lb.f
Trabajo o Energía	Kilogramo fuerza-metro	Kg.f-m	libra fuerza-pie	lb.f-ft
Potencia	Kilogramo fuerza-metro/segundo	Kg.f-m/s	libra fuerza-pie/segundo	lb.f-ft/s
Presión	Kilogramo fuerza/metro cuadrado	$Kg.\,f/m^2$	Libra/pulgada cuadrada (PSI)	$^{Lb}/_{in^2}$

Tabla No 1.8.b Como se miden las cantidades en el sistema europeo e inglés

Dato	Internacional (MKS)	Sistema Inglés
Densidad Agua (ρ)	1,000 $^{Kg}/_{m^3}$	1.944 $^{slug}/_{ft^3}$
Peso Especifico Agua (γ)	9,800 $^{N}/_{m^3}$	62.5 $^{Lb}/_{ft^3}$
Gravedad (g)	9.81 $^{m}/_{s^2}$	32.15 $^{ft}/_{s^2}$

Tabla No 1.8. c Comparación de densidad de agua, gravedad y peso específico del agua en el sistema internacional e inglés

Elemento	Densidad	Peso Especifico
Gasolina a 5 °C	737 $^{Kg}/_{m^3}$	7,222.6 $^{N}/_{m^3}$
Aceite de Oliva	915 $^{Kg}/_{m^3}$	8,967 $^{N}/_{m^3}$
Aceite de Coco	910 $^{Kg}/_{m^3}$	8,918 $^{N}/_{m^3}$
Alcohol Etilico	790 $^{Kg}/_{m^3}$	7,742 $^{N}/_{m^3}$
Cerveza	1015 $^{Kg}/_{m^3}$	9,947 $^{N}/_{m^3}$
Concreto	2300 $^{Kg}/_{m^3}$	22,540 $^{N}/_{m^3}$
Leche	1032 $^{Kg}/_{m^3}$	10,130 $^{N}/_{m^3}$
Mercurio	13,600 $^{Kg}/_{m^3}$	133,280 $^{N}/_{m^3}$

Tabla No 1.8. d Datos de densidad y peso específico de otras sustancias

NOTA: Hay muchos sistemas de medida debido a que Guatemala es un país consumidor, por tanto, solo recibe sistemas de otros países. Es importante que aprenda a manejarlos y poder pasarse de un sistema a otro.

¿De dónde se obtiene la fórmula?

- A medida que se sumerge un cuerpo en el mar la presión va aumentando, por eso mismo no se conoce el fondo del mar. Lo más profundo que se ha llegado es 10, 916 metros y esto es porque la presión es proporcional a la altura (a más profundo un objeto más presión se somete)

  Haga de cuenta que en una analogía usted está soportando una columna y entre más alta sea esa columna más fuerza debe soportar.

$$\mathrm{F} \propto h \quad \text{(Fuerza proporcional a la altura)}$$

- Entre más denso sea el fluido mucha más presión ejercerá el fluido sobre el cuerpo, por tanto, la fuerza:

$$\mathrm{F} \propto \rho \quad \text{(Fuerza proporcional a la densidad)}$$

- Todo depende de la gravedad en nuestro universo. Por la gravedad colapsan estrellas formando agujeros negros, pero también gracias a ella se forman galaxias y planetas (Neil Degrasse Tyson en la serie cosmos). Con esas palabras se plantea que, entre mayor sea la gravedad, mayor será la fuerza que el fluido ejercerá en la compuerta.

$$\mathrm{F} \propto g \quad \text{(Fuerza proporcional a la gravedad)}$$

- Entre más grande sea la compuerta que se introduce, abarcará más área de presión. Por tanto, entre más grande sea el área más grande será la fuerza que el fluido ejercerá sobre el cuerpo.

$$\mathrm{F} \propto \mathrm{A} \quad \text{(Fuerza proporcional al área)}$$

La fuerza que un fluido ejerce sobre una compuerta está dada por fórmula:

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{F} = \text{Densidad} * \text{Gravedad} * \text{Área} * \text{Altura} \\ \mathrm{F} = \rho \quad * g \quad * \mathrm{A} \quad * h\end{array}}$$

Si no se recuerda de la fórmula puede comprobarla analizando las dimensionales de la siguiente manera:

$$\mathrm{F} = \boldsymbol{\rho} \quad * \boldsymbol{g} \quad * \mathbf{A} \quad * \boldsymbol{h}$$

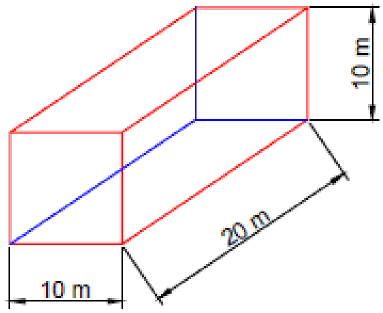
$$\mathrm{F} = \mathbf{Kg}/\cancel{\mathbf{m^3}} \; * \mathbf{m}/\mathbf{s^2} \; * \cancel{\mathbf{m^2}} \; * \cancel{\mathbf{m}}$$

$$\mathrm{F} = \mathbf{Kg} \; * \mathbf{m}/\mathbf{s^2} \; = \textbf{masa} * \textbf{gravedad} \; = \text{Newton}$$

NOTA: La fuerza que un fluido ejerce sobre la compuerta siempre se aplicará en el centroide (Centro Geométrico) de la compuerta o figura a analizar. (se verá en mecánica de fluidos).

Ejemplo 1

Se tiene un recipiente en forma de Paralepípedo rectangular, como se muestra en la figura. Dentro de él se tiene agua $\left(\rho = 1 \, {}^{gr}/_{cm^3} = 1{,}000 \, {}^{kg}/_{m^3}\right)$. Encuentre la fuerza que está ejerciendo dicho fluido sobre cada una de las compuertas.

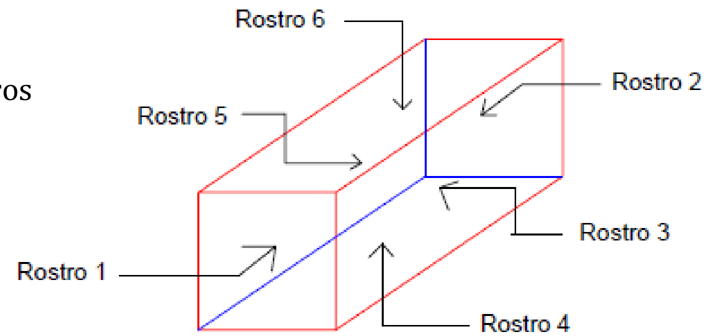


Planteando

Viendo la simetría de algunos rostros podemos decir que:

$$\text{Rostro } 1 = \text{Rostro } 2$$
$$\text{Rostro } 3 = \text{Rostro } 5$$

Esto en cuanto a fuerzas ejercidas en esos rostros



1. Calculando la fuerza en el rostro 1 y rostro 2

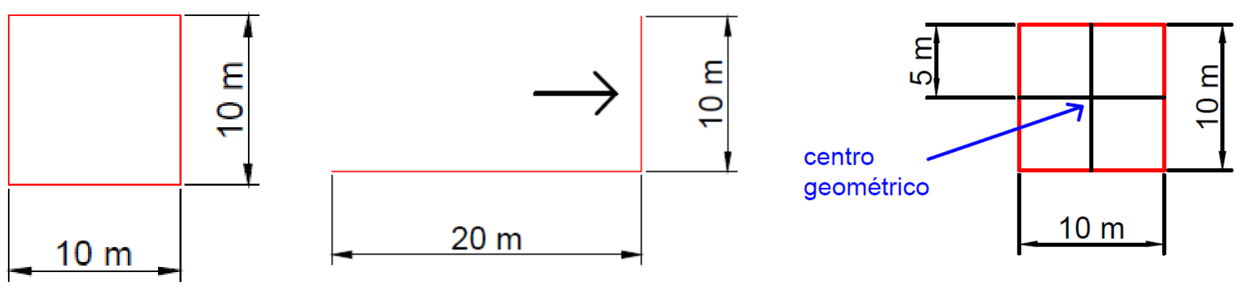


Figura 1 **Figura 2** **Figura 3**

1.1. La fuerza se ejerce en el centro geométrico de la compuerta (figura 3)

$$F = \rho * g * A * h$$

1.2. Los datos se obtienen viendo la figura 1 y la figura 2

$$F = 1{,}000 \, {}^{kg}/_{m^3} * 9.8 \, {}^{m}/_{s^2} * (10 \text{ m} * 10 \text{ m}) * 5\text{m}$$

$$F = 9{,}800 * 100 * 5$$

$$F = 4{,}900{,}000 \text{ N} = 4{,}900 \text{ KN}$$

2. Calculando la fuerza en el rostro 3 y rostro 5

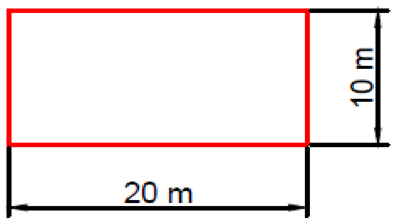


Figura 4

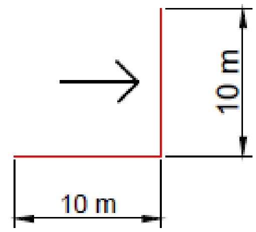


Figura 5

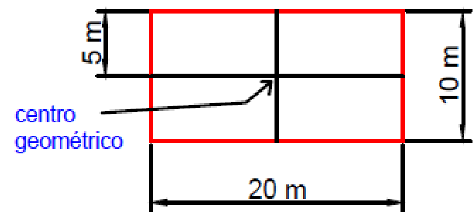


Figura 6

2.1. La fuerza se ejerce en el centro geométrico (Figura 6)

$$F = \rho * g * A * h$$

2.2. Los datos se obtienen de la Figura 4 y la Figura 5

$$F = 1,000\ {}^{kg}/_{m^3} * 9.8\ {}^{m}/_{s^2} * (20\ m * 10\ m) * 5m$$

$$F = 9{,}800 * 200 * 5$$
$$F = 9{,}800{,}000\ N = 9{,}800\ KN$$

3. Calculando la fuerza en el rostro 4

En este punto no se utiliza el centroide para calcular la altura (Debido a que esta acostado). Si aplica en el centroide la fuerza, pero la altura a utilizar es la altura total del recipiente.

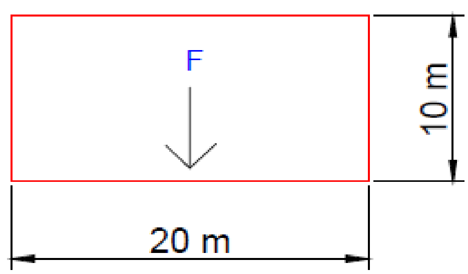


Figura 7 Planta del rostro 4

3.1. La fuerza que ejerce el fluido en el rostro 4 depende de la fórmula

$$F = \rho * g * A * h$$

3.2. Los datos se obtienen de la Figura 7 y los perfiles (ya sean la Figura 2)

$$F = 1,000\ {}^{kg}/_{m^3} * 9.8\ {}^{m}/_{s^2} * (20\ m * 10\ m) * 10\ m$$

$$F = 9{,}800 * 200 * 10$$
$$F = 19{,}600{,}000\ N = 19{,}600\ KN$$

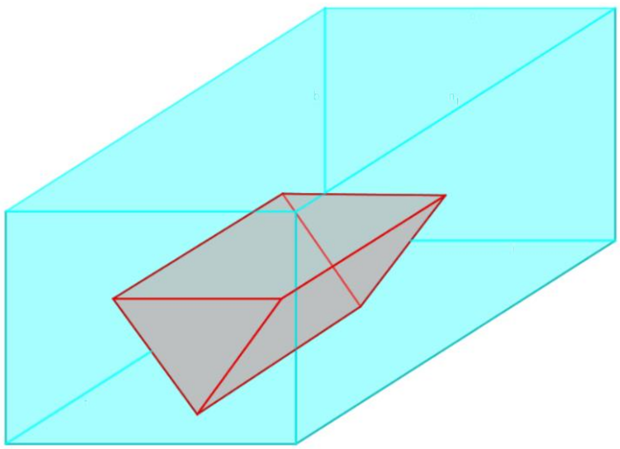
La utilización del centroide para la altura se verá en el curso Mecánica de los fluidos; además, en este manual el tema de centroides se verá en el siguiente capítulo. Si se vio un ejemplo utilizando este método fue para que usted querido lector asocie ambos cursos (matemática intermedia 1 y mecánica de los fluidos) y comprenda que en ambos cursos se enseña el mismo tema.

Orientado a la matemática intermedia 1

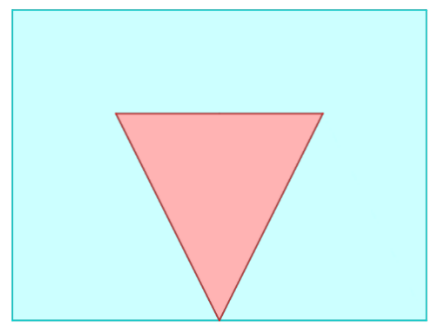
En esta matemática se ve el mismo tema solo que orientado a las integrales. Todo consiste en encontrar un diferencial de fuerza y después sumar (integrar) esos diferenciales. Sobre todo, con compuertas irregulares (círculos, semicírculos, triangulares, trapecios…)

¿De dónde se obtiene la fórmula?

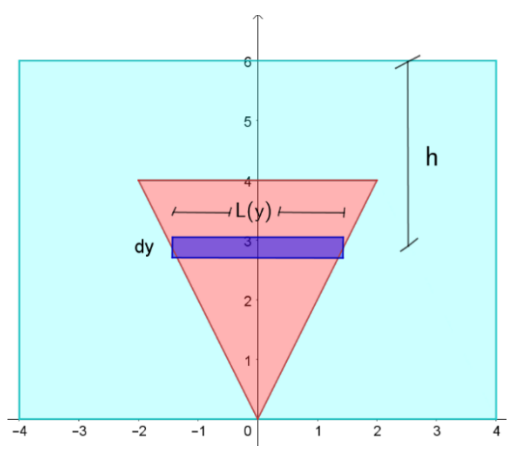
1. Analicemos el siguiente sólido sumergido en un fluido de densidad ρ



2. Analizando la compuerta frontal para encontrar la fuerza que en ella aplica el fluido.

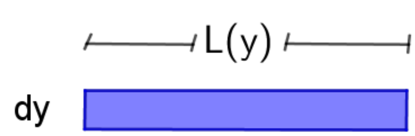


3. A la compuerta del paso 2 le ingresamos un diferencial de área y le asignamos un plano cartesiano.



4. El diferencial de área a analizar es:

$$dA = L(y)\,dy$$



5. Recordando la fórmula:

$$F = \rho * g * A * h$$

6. El diferencial de área está sometido bajo un diferencial de fuerza y ese diferencial de área es:

$$dF = \rho * g * \mathbf{dA} * h$$

6.1. Sustituyendo el diferencial de área

$$dF = \rho * g * \mathbf{L(y)} * \boldsymbol{dy} * h$$

6.2. Acá varía la altura del diferencial (h), el grosor del diferencial $\mathrm{L}(y)$. Como todo el diferencial de fuerza está en términos del diferencial dy entonces todo debe quedar en términos de la variable y.

$$dF = \rho * g * \mathrm{L}(y) * h(y) * dy$$

7. Integrando

$$\int dF = F$$

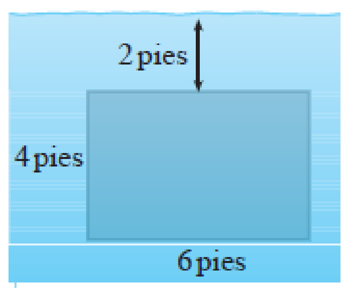
$$F = \int \rho * g * \mathrm{L}(y) * h(y) * dy$$

$$\boxed{F = \rho * g \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{L}(y) * h(y) * dy = \gamma \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{L}(y) * h(y) * dy}$$

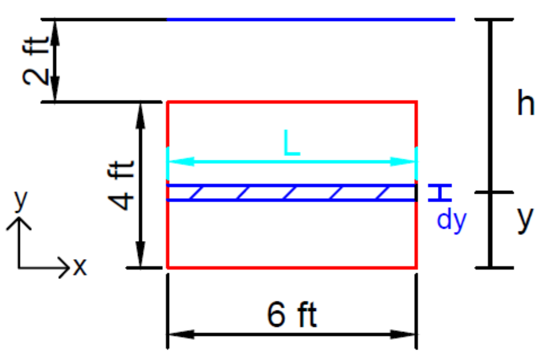
NOTA: Generalmente en los libros de texto los datos que le dan bajo el sistema internacional, el dato del fluido es la densidad ρ, mientras que para problemas con datos bajo el sistema inglés le darán el peso específico γ.

Ejemplo 2

Una placa vertical se sumerge en agua (o parcialmente sumergida) y tiene la forma indicada, ver figura. Encuentre la fuerza aplicada en dicha placa.



1. Realizamos un diagrama en donde se ingrese un plano cartesiano para poder relacionar el ancho respecto a la altura.



2. Viendo el diagrama planteamos el diferencial.

$$d\mathrm{F} = \rho * g * d\mathrm{A} * \mathrm{h}$$

2.1. Planteando el diferencial de área (ver el diagrama)

$$d\mathrm{A} = \mathrm{L} * dy \qquad\qquad \mathrm{L} = 6 \text{ (No cambia respecto a } y\text{)}$$

$$\boldsymbol{d\mathrm{A} = 6\,dy}$$

2.2. Planteando la función de altura (ver el plano cartesiano insertado xy)

$$\mathrm{h} = \text{Altura desde el nivel de agua}$$

$$\mathrm{h} = (4+2) - y$$

$$\boldsymbol{\mathrm{h} = 6 - y}$$

2.3. Como los datos son en el sistema inglés, utilizamos el peso específico.

$$\boldsymbol{\gamma = \rho * g = 62.5\ {}^{Lb}/_{ft^3}}$$

3. Sustituyendo los datos en el diferencial de fuerza.

$$d\mathrm{F} = \mathbf{62.5} * \boldsymbol{6\,dy} * (\boldsymbol{6 - y})$$

$$d\mathrm{F} = 375\,(6 - \mathrm{y})\ dy$$

4. Integrando

$$\mathrm{F} = 375 \int_0^4 6 - y\ dy$$

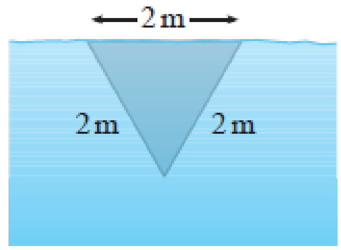
5. Dese cuenta de que los diferenciales de área se ingresarán solo en la placa que va desde 0 hasta 4 pies. Por lo tanto, los límites de integración serán:

$$\mathrm{F} = 375 * \left(6y - \frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_0^4 = 375 * (24 - 8)$$

$$\mathrm{F} = 6{,}000\ \mathrm{Lb}$$

Ejemplo 3

Una placa vertical se sumerge en agua (o parcialmente sumergida) y tiene la forma indicada. Encuentre la fuerza aplicada en dicha placa.



1. Realizamos un diagrama en donde se ingrese un plano cartesiano para poder relacionar el ancho respecto a la altura.

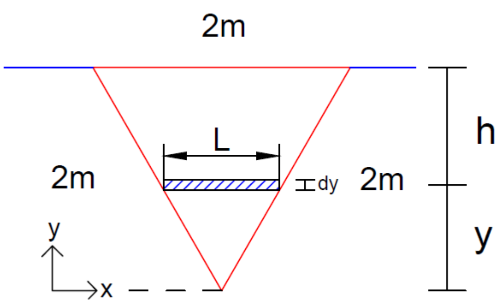


Fig. 1 Introducción del plano cartesiano

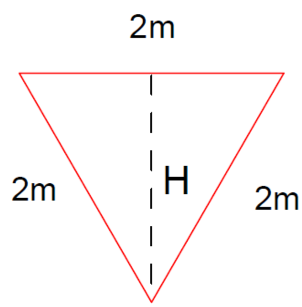


Fig. 2 Triángulo equilátero

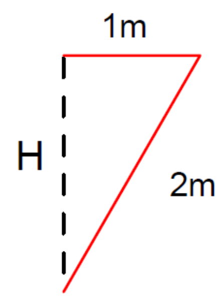


Fig. 3 Triangulo rectángulo

2. Encontrando el valor de H

$$\mathrm{H}^2 + 1^2 = 2^2$$
$$\mathrm{H}^2 = 4 - 1 = 3$$
$$\mathrm{H} = \sqrt{3}$$

3. Relacionando L con y

$$\frac{\text{base menor}}{\text{Base mayor}} = \frac{\text{altura menor}}{\text{Altura mayor}}$$

$$\frac{\mathrm{L}}{2} = \frac{y}{\mathrm{H}}$$

$$\mathrm{L} = \frac{2y}{\mathrm{H}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,y$$

4. Analizando el diferencial de Fuerza a través del diferencial de área

$$d\mathrm{F} = \rho * g * d\mathrm{A} * \mathrm{h}$$

4.1. Analizando el diferencial de área y analizando la altura (Ver diagrama del paso 1)

$$\boldsymbol{dA = \mathrm{L} * dy = \frac{2}{\sqrt{3}}\,y\,dy} \qquad \boldsymbol{\mathrm{h} = \sqrt{3} - y}$$

5. Sustituyéndolos en la fórmula de diferencial de fuerza

$$d\mathrm{F} = \rho * g * \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{3}}\,y\,dy} * \left(\boldsymbol{\sqrt{3} - y}\right)$$

$$dF = \rho * g * \frac{2}{\sqrt{3}}\, y\left(\sqrt{3} - y\right) dy$$

6. Aplicando la integral al diferencial de fuerza

$$F = \int_0^{\sqrt{3}} \rho * g * \frac{2}{\sqrt{3}}\, y\left(\sqrt{3} - y\right) dy$$
$$\frac{2}{\sqrt{3}}\rho g \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3}y - y^2\, dy$$

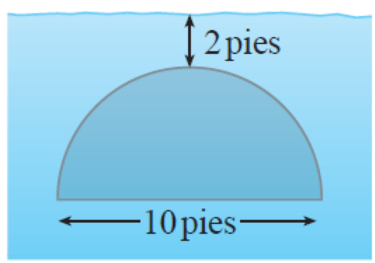
$$F = \frac{2}{\sqrt{3}}\rho g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\rho g\left(\frac{\sqrt{3}*3}{2} - \frac{\sqrt{3}*3}{3}\right)$$

$$F = 2 * 1000 * 9.8 * \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{3}\right) = 9.8 * 1000 = 9{,}800 \text{ Newton}$$

$$F = 9{,}800 \text{ Newton}$$

Ejemplo 4

Una placa vertical se sumerge en agua (o parcialmente sumergida) y tiene la forma indicada. Encuentre la fuerza aplicada en dicha placa



1. Realizamos un diagrama en donde se ingrese un plano cartesiano para poder relacionar el ancho respecto a la altura.

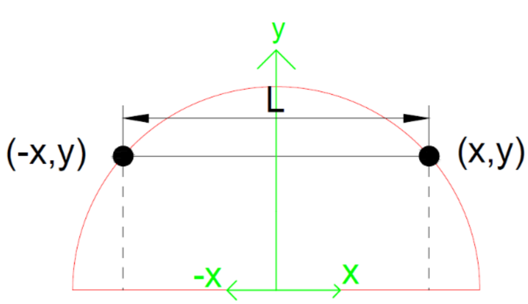


Figura a. Introducción del plano cartesiano

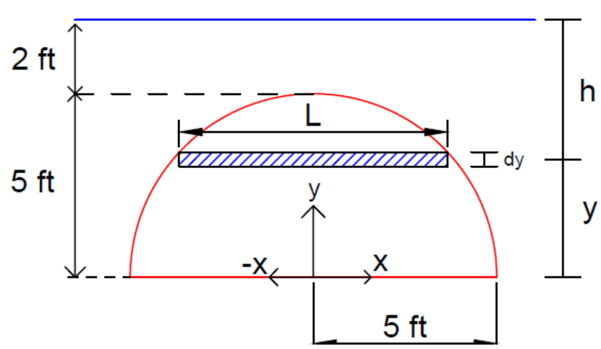


Figura b. Introducción del diferencial

2. Planteamos el diferencial de área

$$dA = L * dy$$

2.1. Dejando L en términos de y en la figura a. Se puede observar que la placa es una semicircunferencia, por lo que la ecuación que describiría la placa es:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{(Centro en el origen)}$$
$$x^2 + y^2 = 25$$
$$L = x - (-x) = x + x = 2x \qquad \text{Entonces:} \quad x = \frac{L}{2}$$

2.2. Sustituyéndolo en la ecuación de la circunferencia.

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2 = 25$$

$$L^2 + 4y^2 = 100$$

$$L = \sqrt{100 - 4y^2} \quad \text{L en términos de y}$$

2.3. Definiendo el diferencial de área

$$dA = L * dy$$

$$\boldsymbol{dA = \sqrt{100 - 4y^2}\, dy}$$

3. Planteando la función de altura en términos de y

$$h = (5 + 2) - y \qquad ; \qquad \mathbf{h = 7 - y}$$

4. Planteando el diferencial de fuerza

$$dF = \rho * g * \boldsymbol{dA} * \mathbf{h}$$

$$dF = \rho * g * \boldsymbol{\sqrt{100 - 4y^2}\, dy} * \mathbf{(7 - y)}$$

$$dF = \gamma * (7 - y)\sqrt{100 - 4y^2}\ dy$$

5. Entonces, como la placa va desde $y = 0$ hasta $y = 5$ procedemos a integrar:

$$F = \gamma \int_0^5 (7 - y)\sqrt{100 - 4y^2}\, dy$$

6. **Resolvemos por aparte la integral** ★ ♥

$$\int_0^5 (7 - y)\sqrt{100 - 4y^2}\, dy = 7\int_0^5 \sqrt{100 - 4y^2}\, dy - \int_0^5 y\sqrt{100 - 4y^2}\, dy$$

7. Procedemos a resolver la integral ★

$$7\int_0^5 \sqrt{100-4y^2}\,dy \;=\; 7\int_0^5 \sqrt{100\left(1-\frac{4}{100}y^2\right)}\,dy \;=\; 7\int_0^5 \sqrt{100} * \sqrt{1-\frac{1}{25}y^2}\,dy$$

$$= 70\int_0^5 \sqrt{1-\left(\frac{1}{5}y\right)^2}\,dy$$

7.1. Se procede a hacer una sustitución

$$\boldsymbol{u = \frac{1}{5}y} \quad ; \quad \frac{du}{dy} = \frac{1}{5} \qquad \text{por tanto:} \quad \boldsymbol{dy = 5du}$$

$$\text{Cuando } y = 0 \quad u = 0 \qquad \text{así como cuando:} \quad y = 5 \quad u = 1$$

7.2. Realizando la sustitución

$$70\int_0^5 \sqrt{1-\left(\boldsymbol{\frac{1}{5}y}\right)^2}\,\boldsymbol{dy} \;=\; 70\int_0^1 \sqrt{1-\boldsymbol{u^2}} * \boldsymbol{5\,du} \;=\; 350\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\;du$$

7.3. Se vuelve a hacer otra sustitución:

$$\boldsymbol{u = sen\theta} \quad ; \quad \frac{du}{d\theta} = cos\theta \quad ; \quad \boldsymbol{du = cos\theta * d\theta}$$

$$\text{Cuando: } u = 0 \text{ el ángulo } \theta = 0 \qquad \text{y cuando} \quad u = 1 \quad \theta = {}^{\pi}/_{2}$$

7.4. Realizando la sustitución nuevamente y manejando las identidades

$$350\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\boldsymbol{sen^2\theta}}\;\boldsymbol{cos\theta\,d\theta} \;=\; 350\int_0^{\pi/2} \sqrt{cos^2\theta} * cos\theta\,d\theta \;=\; 350\int_0^{\pi/2} \boldsymbol{cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= 350\int_0^{\pi/2} \boldsymbol{\frac{1}{2}[1+cos2\theta]}\,d\theta \;=\; 175\int_0^{\pi/2} 1+cos2\theta\;d\theta \;=\; 175\left[\theta + \frac{sen2\theta}{2}\right]$$

$$= 175\left[\theta + \frac{sen2\theta}{2}\right]\Bigg|_0^{\pi/2} \;=\; 175\left[\frac{\pi}{2}\right] \;=\; \frac{175\pi}{2}$$

8. Procedemos a resolver la integral ♥

$$\int_0^5 y\sqrt{100-4y^2}\;dy$$

8.1. Se hace una sustitución:

$$\boldsymbol{u = 100-4y^2} \quad ; \quad \frac{du}{dy} = -8y \quad ; \quad \boldsymbol{\frac{du}{-8y} = dy}$$

$$\text{Cuando } y = 0 \quad u = 100 \quad \text{así como cuando:} \quad y = 5 \quad u = 0$$

$$\int_0^5 y\sqrt{\mathbf{100 - 4y^2}}\ \boldsymbol{dy} = \int_{100}^{0} y\sqrt{\boldsymbol{u}} * \frac{\boldsymbol{du}}{\mathbf{-8}} = -\frac{1}{8}\int_{100}^{0} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{8}\int_0^{100} \sqrt{u}\, du =$$

$$\frac{1}{8} * \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3/2} = \frac{1}{12}\sqrt{u^3}\ \Bigg|_0^{100} = \frac{1}{12}\sqrt{100^3} = \frac{1}{12} * 100 * \sqrt{100} = \frac{25}{3} * 10 = \frac{250}{3}$$

9. Entonces la integral nos quedará

$$\int_0^5 (7-y)\sqrt{100-4y^2}\ dy = 7\int_0^5 \sqrt{100-4y^2}\ dy - \int_0^5 y\sqrt{100-4y^2}\ dy$$

$$\int_0^5 (7-y)\sqrt{100-4y^2}\ dy = 175\left[\frac{\pi}{2}\right] - \frac{250}{3} = \frac{175\pi}{2} - \frac{250}{3}$$

10. La fuerza es:

$$\mathrm{F} = 62.5\int_0^5 (7-y)\sqrt{100-4y^2}\ dy = 62.5 * \left[\frac{175\pi}{2} - \frac{250}{3}\right] = 11{,}972.3\ \mathrm{Lb}$$

Estas libras las podemos aproximar a: 12,000 Lb

11. Entonces la fuerza aplicada en la compuerta de forma de semicircunferencia será:

$$\mathrm{F} = 1.2 * 10^4\ \mathrm{Lb}$$

1.6.4. Centros de masa y centros de áreas

Existen muchos tipos de centros que a medida que usted avance en su carrera de ingeniería irá viendo, los cuales son:

1. Centro de masa
2. Centro de gravedad
3. Centro de rigidez
4. Centro plástico
5. Centro de área
6. Centro de una línea L

Cada uno de los 6 centroides se miden en la cantidad de longitud (metro, pie, pulgada…)

A. Masa de placas en dos dimensiones

Existen masas que son constantes y otras que son variables como ya se dijo en la introducción. En este caso analizaremos placas en dos dimensiones, donde analizamos una nueva densidad:

$$\rho = \frac{masa}{\text{área}}$$

$$\rho = \frac{d\mathrm{m}}{d\mathrm{A}}$$

$$\rho * d\mathrm{A} = dm$$

$$\boxed{m = \int \rho * d\mathrm{A} \ = \rho \int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x)\, dx} \qquad \textbf{Ecuación 1.9.1}$$

NOTA: En el curso de matemática intermedia 2 (Mate 5) verá la densidad variable. Para nuestro curso la densidad se toma constante.

B. Momentos

Al igual que existen varios tipos de centroides también existen varios tipos de momentos, los cuales son:

1. 1er Momento de masa $[\mathbf{kg} * \mathbf{m}]$
2. 1er Momento de área $[\mathbf{m^2} * \mathbf{m}]$
3. 1er momento de fuerza (Momento de fuerza respecto a un punto) $[\mathbf{N} * \mathbf{m}]$
4. 2do Momento de área $[\mathbf{m^2} * \mathbf{m^2}]$
5. 2do Momento de masa (Inercia) $[\mathbf{kg} * \mathbf{m^2}]$

Se les llama momentos debido a que depende del sistema de referencia, así como a veces también depende de la distribución espacial de la masa (un momento). Los cinco momentos vistos anteriormente van multiplicados por una cantidad de distancia para el 1er momento y va multiplicada por metro al cuadrado para el 2do momento.

Primer momento de masa de una lámina plana (para centro de masa)

El análisis parte con la palanca (“**Dadme** un punto de apoyo y **moveré** al **mundo**" Arquímedes) orientado al columpio como en la siguiente imagen:

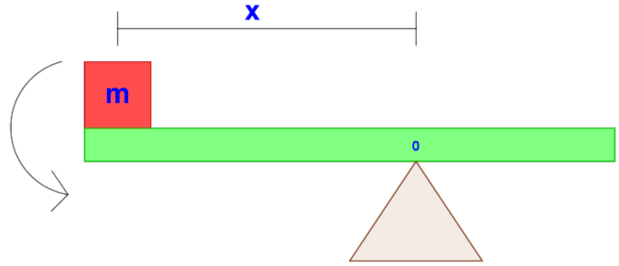


Figura 1. Masa colocada en un columpio

Al colocar la masa en la izquierda, el columpio bajará o rotará hacia la izquierda como lo indica la flecha.

El momento de fuerza es la capacidad que tiene una fuerza de rotar un objeto respecto a un punto (los físicos la llaman Torca)

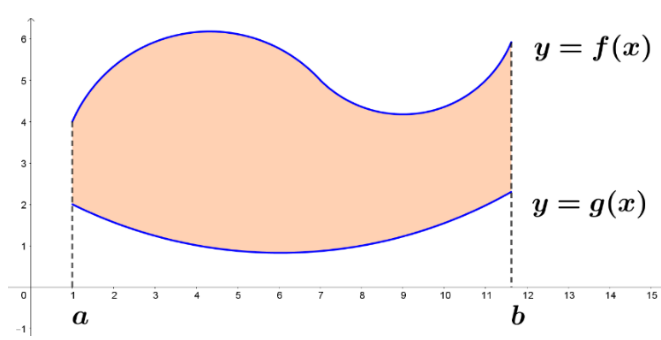
$$\text{1er Momento de fuerza} = \text{fuerza} * \text{distancia}$$
$$\mathrm{M} = \mathrm{F} * \mathrm{d}$$

El momento de masa es similar, es la capacidad que tiene una masa de rotar un objeto respecto a un punto.

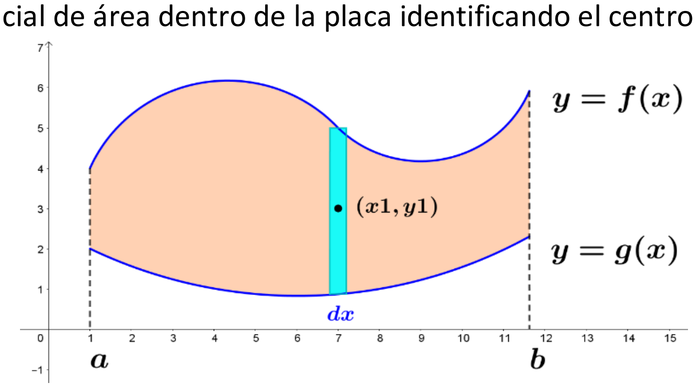
$$\text{1er Momento de masa} = \text{masa} * \text{distancia}$$
$$\mathrm{M} = \mathrm{m} * \mathrm{d}$$

¿De dónde se obtiene la fórmula?

1. Suponga que se tiene una placa (objeto bidimensional o en dos dimensiones) delimitada por las funciones *f* y *g* así como a y b. También esa placa contiene una densidad $\rho\ \left(\frac{\text{masa}}{\text{area}}\right)$



2. Ingresamos un diferencial de área dentro de la placa identificando el centro del diferencial



3. El momento del diferencial respecto al eje *x* se identifica como:

$$dM_x = \mathbf{masa} * \mathbf{distancia\ respecto\ a}\ \boldsymbol{x}$$

$$dM_x = \boldsymbol{\rho} * \mathbf{dA} * \mathbf{y1}$$

$$dM_x = \boldsymbol{\rho} * [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})] * \mathbf{dx} * \mathbf{y1}$$

$$dM_x = \boldsymbol{\rho} * [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})] * \mathbf{dx} * \left[\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}{\mathbf{2}}\right]$$

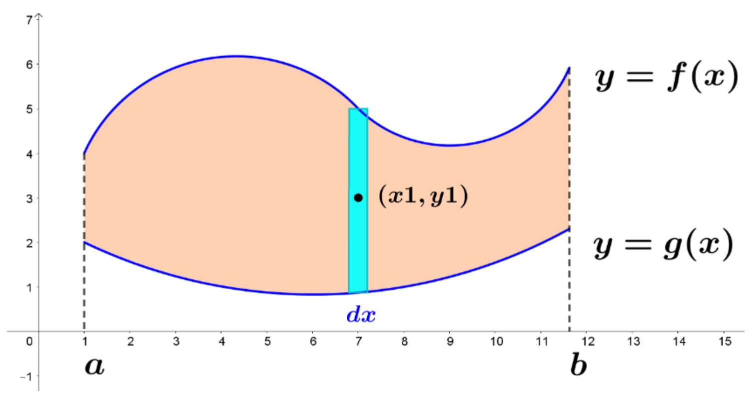
3.1. Integrando el diferencial

$$M_x = \frac{\rho}{2}\int [f(x) + g(x)] * [f(x) - g(x)]\, dx$$

3.2. Los límites de integración serán:

$$\boxed{M_x = \frac{\rho}{2}\int_a^b [f(x) + g(x)] * [f(x) - g(x)]\, dx} \quad \textbf{Ecuación 1.9.2}$$

4. Analizando el momento de masa respecto al eje *y*



5. El momento del diferencial respecto al eje *y* se identifica como:

$$dM_y = \mathbf{diferencial\ de\ masa} * \mathbf{distancia\ respecto\ a}\ \boldsymbol{x}$$

$$dM_y = \boldsymbol{\rho} * \boldsymbol{dA} * \mathbf{x1}$$

$$dM_y = \boldsymbol{\rho} * [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})] * \mathbf{dx} * \mathbf{x}$$

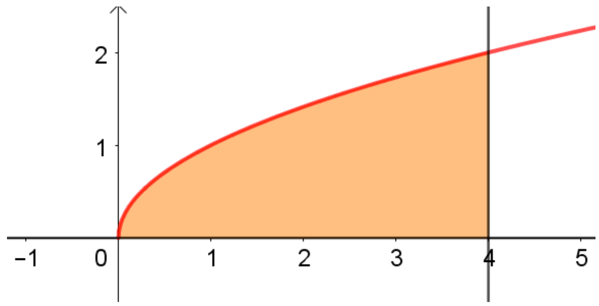
6. Integrando el diferencial

$$\boxed{M_y = \rho\int_a^b x * [f(x) - g(x)]\, dx} \quad \textbf{Ecuación 1.9.3}$$

Ejemplo 1

Encuentre el momento de masa respecto a *x* y respecto a *y* para la siguiente lámina con densidad $\left[\rho = 2\,{}^{\text{gr}}/_{\text{cm}^2}\right]$ y acotada por las gráficas de las ecuaciones:

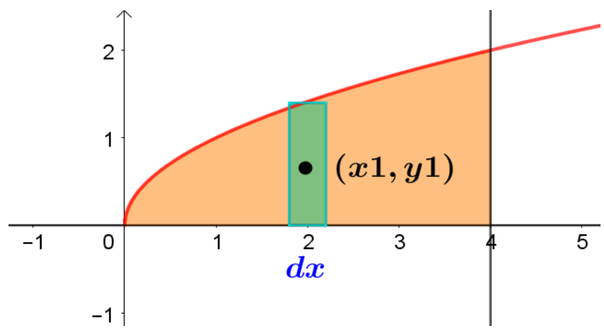
$$y = \sqrt{x} \;\;;\;\; y = 0 \;\;;\;\; x = 4 \qquad \text{donde: } x \text{ y } y \text{ se miden en centímetros}$$



1. Para buscar M_x y M_y

$$f(x) = \sqrt{x} \quad y \quad g(x) = 0$$

2. Ingresamos el diferencial de área



3. Utilizamos la **Ecuación 1.9.2** para encontrar el momento de masa respecto a *x*

$$M_x = \frac{\rho}{2}\int_a^b [f(x) + g(x)] * [f(x) - g(x)]\,dx$$

$$M_x = \frac{2}{2}\int_0^4 \left[\sqrt{x} + 0\right] * \left[\sqrt{x} - 0\right] dx$$

$$M_x = \int_0^4 \left[\sqrt{x}\right] * \left[\sqrt{x}\right] dx = \int_0^4 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^4 = 8$$

$$M_x = 8 \;\; \text{gr} * \text{cm}$$

4. Utilizamos la **Ecuación 1.9.3** para encontrar el momento de masa respecto a *y*

$$M_y = \rho\int_a^b x * [f(x) - g(x)]\;dx$$

$$M_y = 2\int_0^4 x * \left[\sqrt{x} - 0\right] dx = 2\int_0^4 x\sqrt{x}\,dx = 2\int_0^4 x^{3/2}\,dx = 2 * \frac{2}{5} * x^{5/2}\Bigg|_0^4 = 25.6$$

$$M_x = 25.6 \;\; \text{gr} * \text{cm}$$

Primer momento de área (Para centro de área)

El primer momento de área es una magnitud geométrica que se define para un área plana denotada con la letra Q.

Toda figura plana (en 2D) tiene un primer momento tanto en el eje x como en el eje y

$$(\text{1er momento de área en el eje } x) \quad Q_x = \text{Área} * \text{distancia en } x = A * y_1$$

$$(\text{1er momento de área en el eje } y) \quad Q_y = \text{Área} * \text{distancia en } y = A * x_1$$

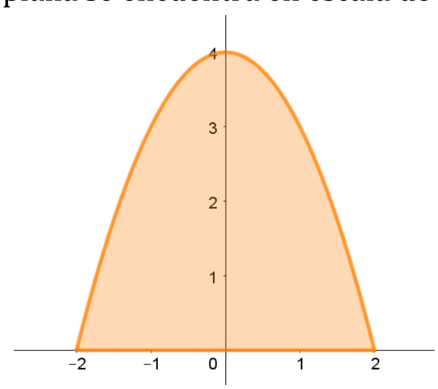
Si la figura es muy irregular se procede a integrar o sumar los diferenciales de 1er momento de área (ver ejemplo 1)

$$\boxed{Q_x = \int y_1 * dA} \quad \textbf{Ecuación 1.9.4} \qquad \boxed{Q_y = \int x_1\, dA} \quad \textbf{Ecuación 1.9.5}$$

Donde x_1 y y_1 son las distancias del centroide del diferencial al origen

Ejemplo 1

Encuentre el 1er momento respecto a x y respecto a y de la siguiente placa delimitada por:
$y = 4 - x^2$; $y = 0$ la figura plana se encuentra en escala de centimetros

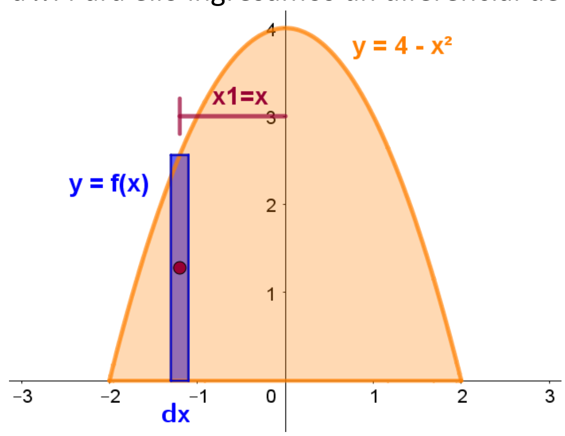


1. Formulamos el diferencial del primer momento respecto a x. Para ello ingresamos un diferencial de área dentro de la placa.

$$dQ_y = \boldsymbol{x_1} * \boldsymbol{dA}$$

$$dQ_y = \boldsymbol{x} * \boldsymbol{y} * \boldsymbol{dx}$$

$$dQ_y = \boldsymbol{x} * \boldsymbol{(4 - x^2)\, dx}$$



1.1. Integrando

$$Q_y = \int x * (4 - x^2)\, dx$$

1.2. La gráfica presenta los límites de integración que van desde -2 a 2

$$Q_y = \int_{-2}^{2} 4x - x^3 \, dx$$

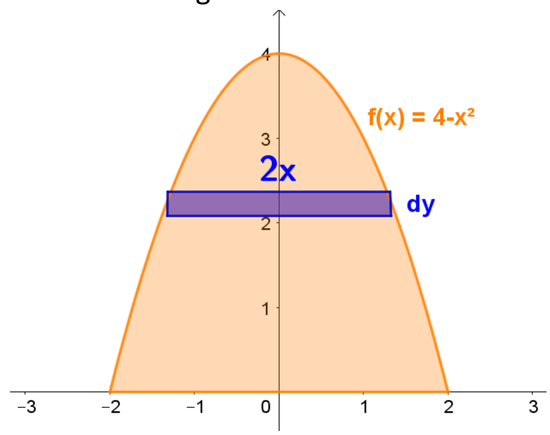
1.3. La resolución de la integral y la evaluación queda:

$$Q_y = 2x^2 - \frac{1}{4}x^4 \Bigg|_{-2}^{2} = 4 - 4 = 0$$

$$Q_y = 0 \text{ cm}^3$$

NOTA: En el paso 1, el diferencial no se dividió dentro de 2 debido a que el diferencial de área es paralelo al eje de rotación (eje y).

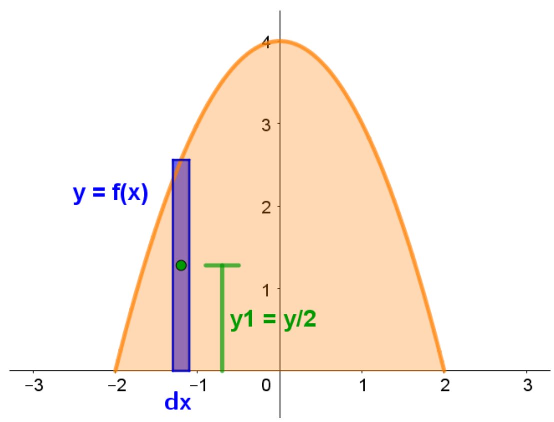
2. Formulamos el diferencial del primer momento respecto a x. Para ello ingresamos un diferencial de área dentro de la placa.



$$dQ_x = y_1 * \boldsymbol{dA}$$
$$dQ_x = y * \boldsymbol{2x} * \boldsymbol{dy}$$
$$dQ_x = 2\,x\,y\,dy$$
$$dQ_x = 2\,x\,y\,dy$$

El problema es que: $x = \pm\sqrt{4 - y}$
Por tanto, no se puede sustituir en el diferencial

3. **Intentamos nuevamente armar el diferencial**



$$dQ_x = \boldsymbol{y_1} * \boldsymbol{dA}$$

$$dQ_x = \boldsymbol{y} * \boldsymbol{\frac{1}{2}} * \boldsymbol{y} * \boldsymbol{dx}$$

$$dQ_x = \frac{1}{2} * y^2\,dx = \frac{1}{2} * (4 - x^2)^2\,dx$$

3.1. Integrando

$$Q_x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} 16 - 8x^2 + x^4\,dx$$

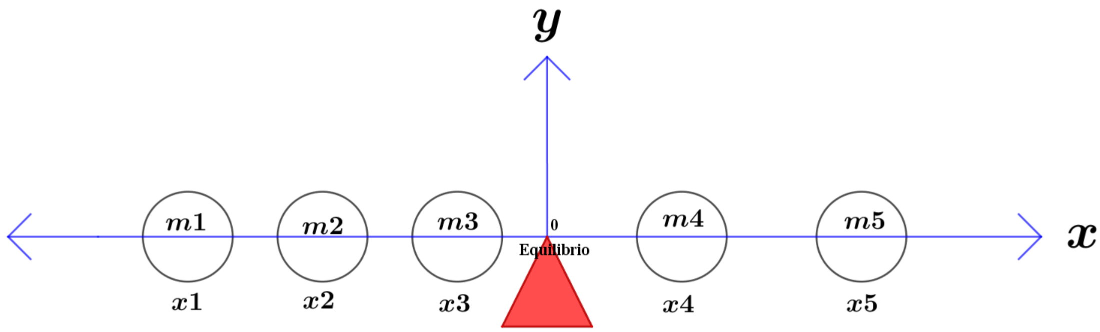
$$Q_x = \frac{1}{2}\left[16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{128}{15} - \left(-\frac{128}{15}\right) = \frac{256}{15}$$

$$Q_x = \frac{256}{15} \text{ cm}^3$$

NOTA: En el paso 3, el diferencial se dividió dentro de 2 debido a que el área se concentra en el centro del rectángulo y el diferencial de área es perpendicular al eje de rotación.

C. Centro de Masa

Suponga un sistema bidimensional (en dos dimensiones) de un conjunto de masas ubicadas en un plano cartesiano que se mantienen en equilibrio, como lo muestra la siguiente figura:



Como el sistema se encuentra en equilibrio significa que no tiene tendencia a rotar (No como en la figura 1 masa colocada en un columpio) y que el centro de masa se encuentra en 0, por lo tanto:

$$\sum \mathrm{M} = 0 \quad (\text{Tercera condición de estática})$$

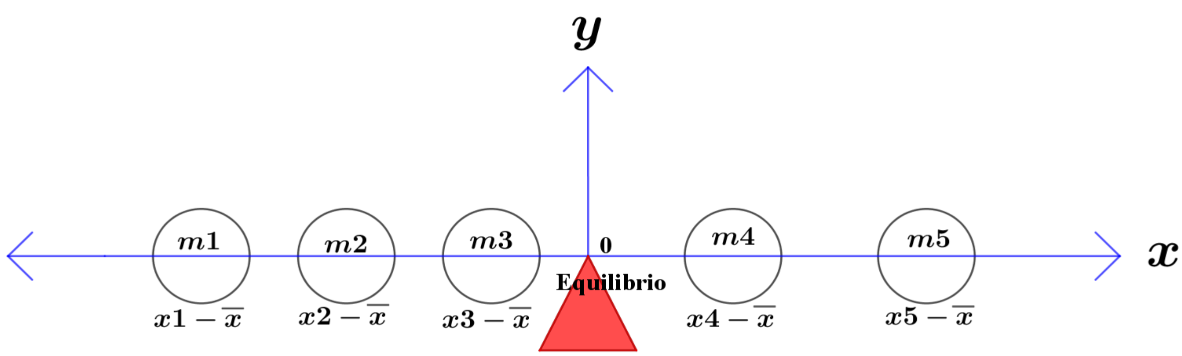
$$\mathrm{M0} = m1 * x1 \; + \; m2 * x2 \; + \; m3 * x3 \; + \; m4 * x4 \; + \; m5 * x5 = 0$$

$$\text{Momento de masa en } 0 \; = \; \mathrm{M0} = \sum m_n * x_n$$

Centro de masa en una dimensión

Ahora, si el sistema no se encuentra en equilibrio, **el centro de masa** es el punto $\bar{x}$ en donde se coloca un apoyo (como la base 0) para lograr el equilibrio.

Si es sistema de equilibrio de la figura 2 se trasladará $\bar{x}$ unidades



$$\mathrm{M0} = m1 * (x1 - \bar{x}) + m2 * (x2 - \bar{x}) + m3 * (x3 - \bar{x}) + m4 * (x4 - \bar{x}) + m5 * (x5 - \bar{x}) = 0$$

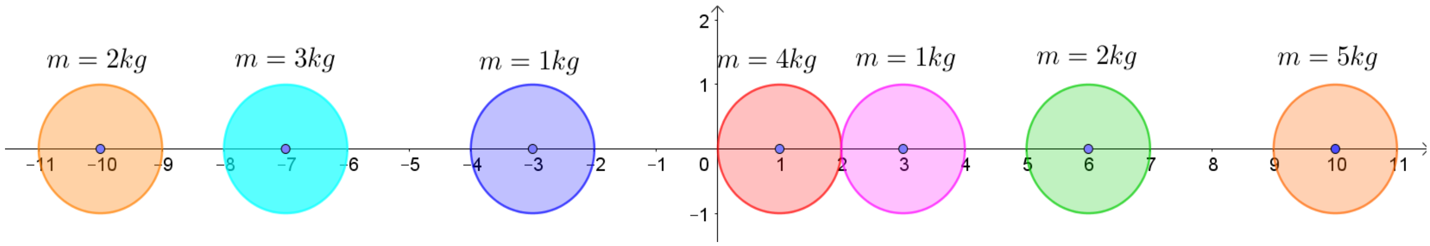
$$\mathrm{M0} = \sum m_n (x_n - \; \bar{x}) = \sum x_n m_n - \sum m_n \, \bar{x} = 0$$

Despejando $\bar{x}$ (centro de masa en x)

$$\bar{x} = \frac{\sum x_n m_n}{\sum m_n} = \frac{\text{momento del sistema respecto del origen}}{\text{masa total}} \qquad \textbf{Ecuación 1.9.6}$$

Ejemplo 1

El siguiente sistema muestra la distribución de masas, donde *x* y *y* se miden en metros. Encontrar el centro de masa del sistema mostrado.



1. Encontramos el momento sobre el origen (0,0)

$$M0 = \sum x_n m_n$$

$$M0 = (2)(-10) + (3)(-7) + (1)(-3) + (4)(1) + (1)(3) + (2)(6) + (5)(10)$$

$$M0 = 25\ kg * m$$

2. Encontramos el total de las masas

$$m_n = 2 + 3 + 1 + 4 + 1 + 2 + 5 = 18 \text{ Kg}$$

3. Utilizamos la Ecuación 1.9.6

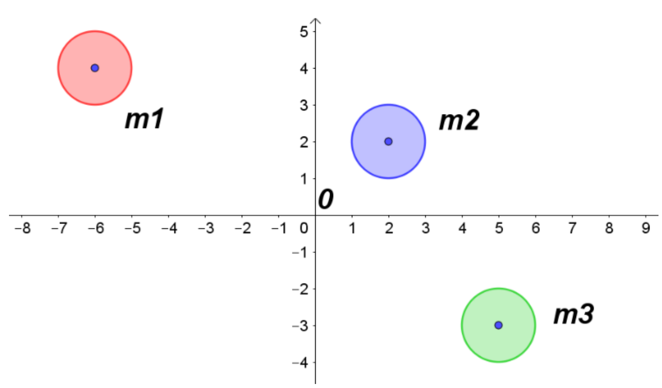
$$\bar{x} = \frac{\sum x_n m_n}{\sum m_n}$$

$$\bar{x} = \frac{25 \text{ K}g * m}{18 \text{ K}g}$$

$$\bar{x} = 1.389\ m$$

Centro de masa en dos dimensiones

Acá se analizan los dos ejes *x* y *y*



$$M_y = m1 * x1 + m2 * x2 + \cdots + x_n m_n \qquad M_x = m1 * y1 + m2 * y2 + \cdots + y_n m_n$$

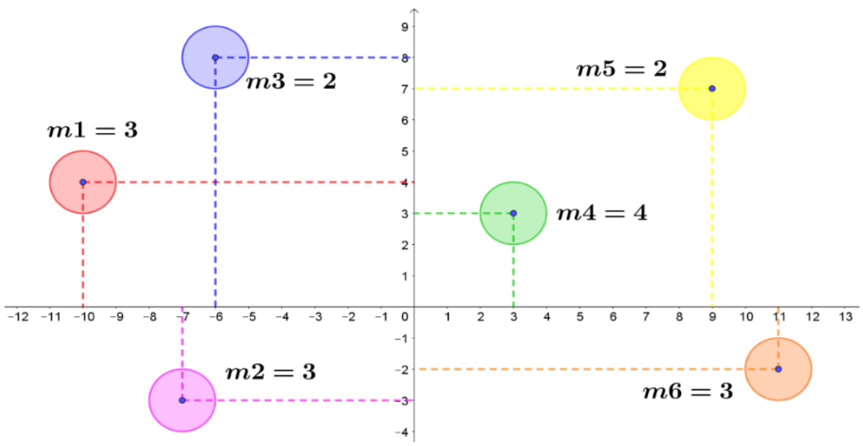
$$\bar{x} = \frac{\sum x_n m_n}{\sum m_n} \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_n m_n}{\sum m_n}$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{My}{m}} \quad \textbf{Ecuación 1.9.7} \qquad \boxed{\bar{y} = \frac{M_x}{m}} \quad \textbf{Ecuación 1.9.8}$$

Donde: Mx = sumatoria de momento de masa respecto a x
My = sumatoria de momento de masa respecto a y
m = sumatoria de todas las masas del sistema

Ejemplo 2

El siguiente sistema muestra la distribución bidimensional de masas, donde *x* y *y* se miden en metros y la masa se mide en kilogramos. Encontrar el centro de masa del sistema mostrado.



1. Encontramos el centroide en *y* $(\bar{y})$

1.1. Encontramos la masa total (m)

$$m = m1 + m2 + m3 + m4 + m5 + m6$$

$$m = 3 + 3 + 2 + 4 + 2 + 3 = 17 \text{ Kg}$$

1.2. Encontramos el momento respecto a x (M_x)

$$M_x = m1 * y1 + m2 * y2 + m3 * y3 + m4 * y4 + m5 * y5 + m6 * y6$$

$$M_x = (3)(4) + (3)(-3) + (2)(8) + (4)(3) + (2)(7) + (3)(-2) = 39 \text{ Kg} * \text{m}$$

1.3. Encontramos el centro de masa en el eje *y*

$$\bar{y} = \frac{Mx}{m} = \frac{39 \text{ Kg} * \text{m}}{17 \text{ Kg}} \quad \text{entonces} \quad \bar{y} = 2.2941 \text{ m}$$

2. Encontramos el centroide en *x* $(\bar{x})$

2.1. Encontramos el momento respecto a *y* (M_y)

$$M_y = m1 * x1 + m2 * x2 + m3 * x3 + m4 * x4 + m5 * x5 + m6 * x6$$

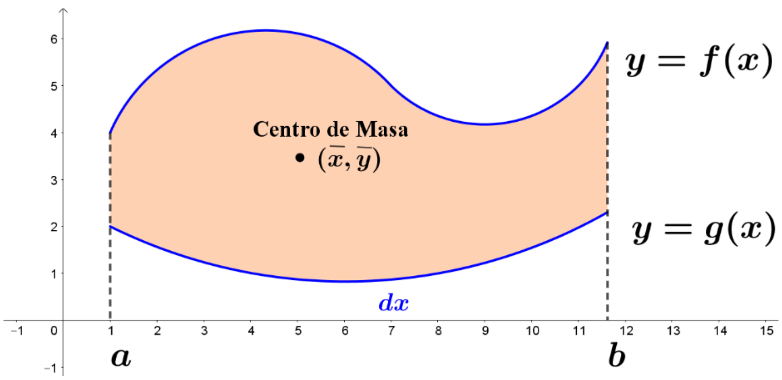
$$M_y = (3)(-10) + (3)(-7) + (2)(-6) + (4)(3) + (2)(9) + (3)(11) = 0 \text{ Kg} * \text{m}$$

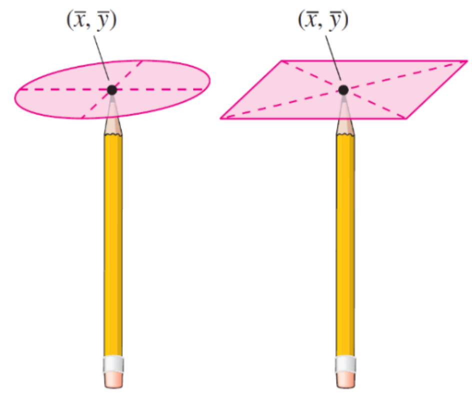
2.2. Encontramos el centroide en *x*

$$\bar{x} = \frac{My}{m} = \frac{0\ \mathrm{Kg} * \mathrm{m}}{17\ \mathrm{Kg}} \qquad \text{entonces} \qquad \bar{x} = 0\ \mathrm{m}$$

Centro de masa de una lámina plana

El centro de masa como ya se dijo es donde el objeto, que en este caso es una placa, puede permanecer en equilibrio.





La fórmula a utilizar toma en cuenta que el centro de masa en el eje es

$$\boxed{\bar{x} = \frac{My}{m}} \quad \textbf{Ecuación 1.9.7} \qquad \boxed{\bar{y} = \frac{M_x}{m}} \quad \textbf{Ecuación 1.9.8}$$

Debemos recordarnos de la Ecuación 1.9.1, Ecuación 1.9.2, Ecuación 1.9.3

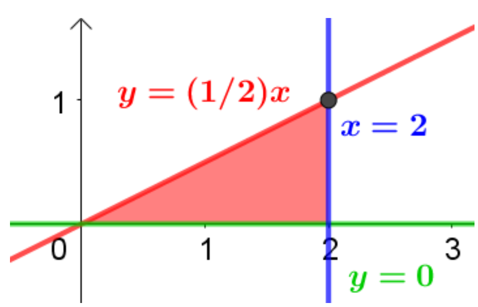
$$\boxed{m = \int_a^b \rho * dA} \quad \textbf{Ecuación 1.9.1} \qquad \boxed{M_x = \frac{\rho}{2}\int_a^b [f(x) + g(x)] * [f(x) - g(x)]\ dx} \quad \textbf{Ecuación 1.9.2}$$

$$\boxed{M_y = \rho \int_a^b x * [f(x) - g(x)]\ dx} \quad \textbf{Ecuación 1.9.3}$$

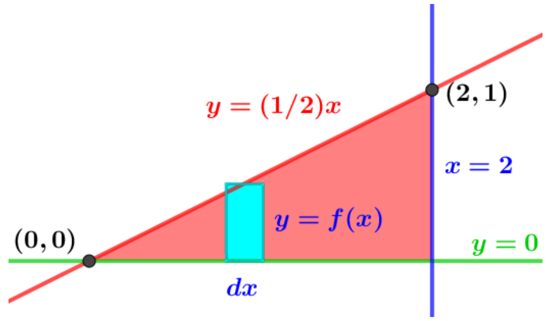
Ejemplo 3

Encuentre el centro de masa de la siguiente lámina limitada por las siguientes funciones y con densidad $\rho\ (masa/área)$

$$y = \frac{1}{2}x \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad x = 2$$



1. Encontramos inicialmente la masa de la placa. Utilizamos la ecuación 1.9.1



$$dm = \rho dA$$
$$dm = \rho * y * dx$$

$$dm = \rho * \left(\frac{1}{2}x\right) * dx$$

$$m = \rho \int_0^2 \frac{1}{2}x\, dx \; = \; \frac{\rho}{2}\int_0^2 x\, dx \; = \; \frac{\rho}{2} * \frac{x^2}{2} \; = \; \frac{\rho}{4}x^2 \; \Big|_0^2 = \; \frac{\rho}{4} * 4 - 0$$

$$\boldsymbol{m = \rho}$$

2. Procedemos a encontrar los momentos respecto a x (Mx) y respecto a y (My)
   2.1. Encontramos el momento respecto a *x* utilizando la ecuación 1.9.2

$$M_x = \frac{\rho}{2}\int_a^b [f(x) + g(x)] * [f(x) - g(x)]\, dx$$

$$M_x = \frac{\rho}{2}\int_0^2 \left[\frac{1}{2}x + 0\right] * \left[\frac{1}{2}x - 0\right] dx \; = \frac{\rho}{2}\int_0^2 \left[\frac{1}{2}x\right] * \left[\frac{1}{2}x\right] dx = \frac{\rho}{2}\int_0^2 \frac{1}{4}x^2\, dx$$

$$M_x = \frac{\rho}{8}\int_0^2 x^2\, dx \; = \; \frac{\rho}{8} * \frac{x^3}{3} \; = \frac{\rho}{24}x^3 \; \Big|_0^2 = \; \frac{\rho}{3}$$

$$\boldsymbol{M_x = \frac{\rho}{3}}$$

   2.2. Encontramos el momento respecto a *y* utilizando la ecuación 1.9.3

$$M_y = \rho \int_a^b x * [f(x) - g(x)]\, dx$$

$$M_y = \rho \int_0^2 x * \left[\frac{1}{2}x - 0\right] dx = \rho \int_0^2 x * \left[\frac{1}{2}x\right] dx = \frac{\rho}{2}\int_0^2 x^2\, dx = \frac{\rho}{2} * \frac{x^3}{3}$$

$$M_y \; = \frac{\rho}{2} * \frac{x^3}{3} \; = \frac{\rho}{6}x^3 \; \Big|_0^2 = \; \frac{4}{3}\rho$$

$$\boldsymbol{M_y = \frac{4}{3}\rho}$$

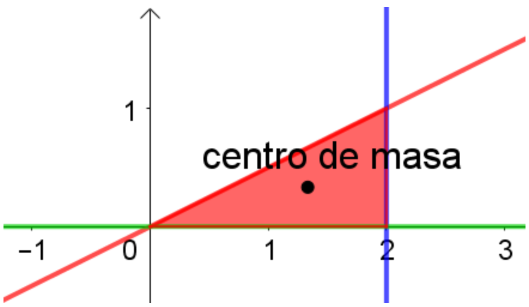
3. Encontrando el centro de masa

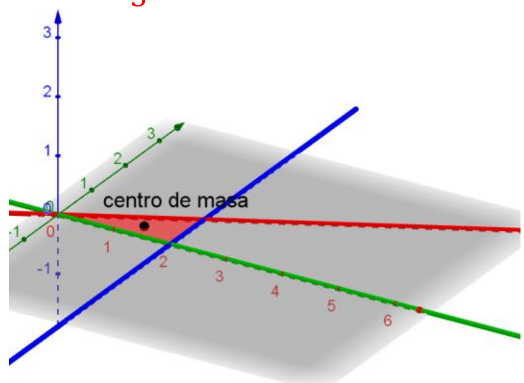
$$\bar{x} = \frac{\boldsymbol{My}}{\boldsymbol{m}} \qquad\qquad \bar{y} = \frac{\boldsymbol{M_x}}{\boldsymbol{m}}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}} = \frac{4}{3} \qquad\qquad \bar{y} = \frac{\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{\rho}} = \frac{1}{3}$$

4. La respuesta de la ubicación de los centros de masa será:

$$\bar{x} = \frac{4}{3} \qquad\qquad \bar{y} = \frac{1}{3}$$



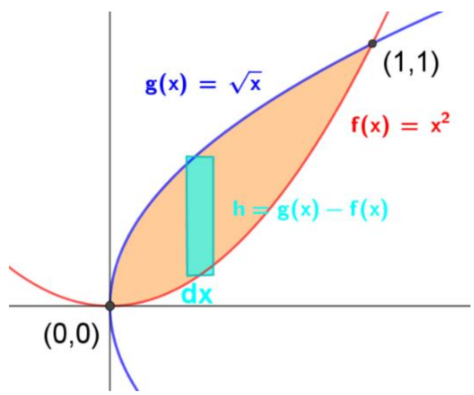


Ejemplo 4

Encuentre el centro de masa de la placa con densidad $\rho\left({}^{masa}/_{área}\right)$ limitada por las funciones:

$y = x^2 \quad ; \quad x = y^2$

1. Trazamos la gráfica e ingresamos el diferencial



2. Encontramos inicialmente la masa de la placa. Utilizamos la ecuación 1.9.1

$$dm = \rho * \boldsymbol{dA}$$

$$dm = \rho * [\boldsymbol{g(x)} - \boldsymbol{f(x)}]\boldsymbol{dx}$$
$$dm = \rho * [\boldsymbol{g(x)} - \boldsymbol{f(x)}]\boldsymbol{dx}$$

$$dm = \rho * [\boldsymbol{\sqrt{x}} - \boldsymbol{x^2}]\boldsymbol{dx}$$

$$\boldsymbol{m} = \rho\int_0^1 \sqrt{x} - x^2\,dx = \rho\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{3}x^3\right]\Bigg|_0^1 = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{\rho}$$

3. Encontramos los momentos respecto a *x* y respecto a *y*

$$M_y = \rho \int_a^b x * [f(x) - g(x)]\ dx$$

NOTA: Acá $f(x) = g(x)\ y\ g(x) = f(x)$ Debido a que $g(x)$ está arriba de $f(x)$

$$M_y = \rho \int_0^1 x * [g(x) - f(x)]\ dx$$

$$M_y = \rho \int_0^1 x * [\sqrt{x} - x^2]\ dx = \rho \int_0^1 x^{3/2} - x^3\ dx = \rho * \left[\frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{1}{4}x^4\right] \Bigg|_0^1 = \frac{3}{20}\rho$$

$$\boldsymbol{M_y = \frac{3}{20}\rho}$$

$$M_x = \frac{\rho}{2} \int_a^b [f(x) + g(x)] * [f(x) - g(x)]\, dx$$

$$M_x = \frac{\rho}{2} \int_0^1 [g(x) + f(x)] * [g(x) - f(x)]\, dx$$

$$M_x = \frac{\rho}{2} \int_0^1 [\sqrt{x} + x^2] * [\sqrt{x} - x^2]\, dx = \frac{\rho}{2} \int_0^1 [\sqrt{x} + x^2] * [\sqrt{x} - x^2]\, dx$$

$$M_x = \frac{\rho}{2} \int_0^1 x - x^{5/2} + x^{5/2} - x^4\, dx = \frac{\rho}{2} \int_0^1 x - x^4\, dx = \frac{\rho}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right] = \frac{3}{20}\rho$$

$$\boldsymbol{M_x = \frac{3}{20}\rho}$$

4. Encontrando los centros de masa

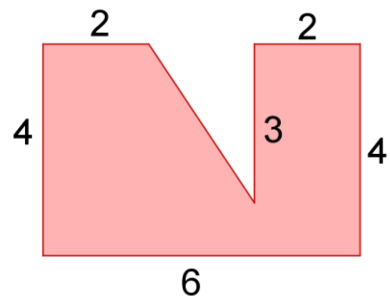
$$\bar{x} = \frac{My}{m} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{3}{20}\rho}{\frac{1}{3}\rho} = \frac{9}{20} \qquad \bar{y} = \frac{\frac{3}{20}\rho}{\frac{1}{3}\rho} = \frac{9}{20}$$

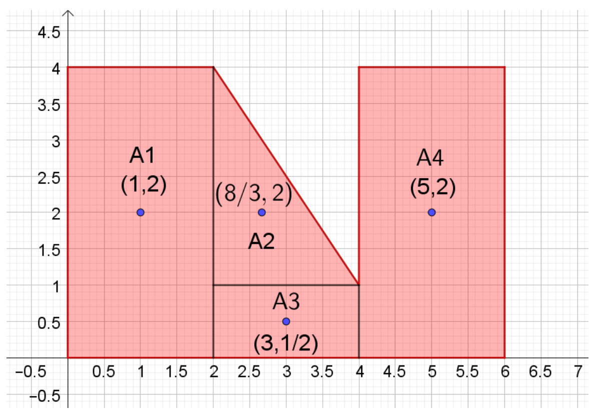
$$\bar{x} = \frac{9}{20} \qquad \bar{y} = \frac{9}{20}$$

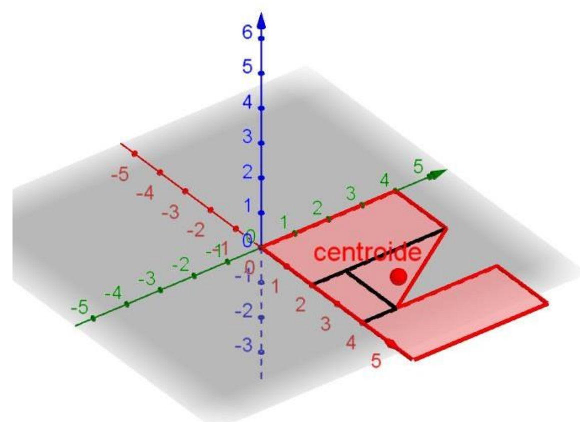
Ejemplo 5

Se tiene la siguiente placa con densidad ρ $(masa/área)$. Encuentre el centro de masa.



1. Ingresamos un plano cartesiano
2. Desmembramos la placa utilizando figuras regulares conocidas (sabiendo sus centros de masa)





3. Procedemos a recordar que:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{A_1 * \rho * x_1 + A_2 * \rho * x_2 + A_3 * \rho * x_3}{m}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{A_1 * \rho * y_1 + A_2 * \rho * y_2 + A_3 * \rho * y_3}{m}$$

4. Procedemos a encontrar la masa (m)

$$m = \mathrm{A1} * \rho + \mathrm{A2} * \rho + \mathrm{A3} * \rho + \mathrm{A4} * \rho$$

$$m = (2 * 4)\rho + \frac{1}{2}(2 * 3)\rho + (2 * 1)\rho + (2 * 4)\rho$$

$$m = 21\,\rho$$

5. Encontramos el centro de masa respecto a *x*

$$\bar{x} = \frac{(2 * 4)\rho * \mathbf{1} + \frac{1}{2}(2 * 3)\rho * \mathbf{\frac{8}{3}} + (2 * 1)\rho * \mathbf{3} + (2 * 4)\rho * \mathbf{5}}{21\,\rho} = \frac{62\,\rho}{21\,\rho}$$

$$\bar{x} = 2.9523$$

$$\bar{y} = \frac{(2 * 4)\rho * \mathbf{2} + \frac{1}{2}(2 * 3)\rho * \mathbf{2} + (2 * 1)\rho * \mathbf{\frac{1}{2}} + (2 * 4)\rho * \mathbf{2}}{21\,\rho} = \frac{39\,\rho}{21\,\rho}$$

$$\bar{y} = 1.8571$$

D. Centro de Área

El centro de área o también llamado centroide de área es el lugar geométrico promedio de las áreas donde nuevamente se busca el equilibrio de una figura con un área dada.

La fórmula es similar a la de centro de masa. Es una medida de tendencia central de la siguiente forma:

- Centro de área en x y centro de área en y que están dados por:

$$\bar{x} = \frac{\text{1er momento de área respecto a } y}{\text{área total}} = \frac{Qy}{\mathrm{A}} = \frac{\int x_1 dA}{\int dA}$$

$$\bar{y} = \frac{\text{1er momento de área respecto a } x}{\text{área total}} = \frac{Qx}{\mathrm{A}} = \frac{\int y_1 dA}{\int dA}$$

x_1 y y_1 son las distancias del centroide del diferencial al origen

$$\boxed{\bar{x} = \frac{Q_y}{\mathrm{A}}} \quad \textbf{Ecuación 1.9.9}$$

$$\boxed{\bar{y} = \frac{Q_x}{\mathrm{A}}} \quad \textbf{Ecuación 1.9.10}$$

$$\boxed{\mathrm{A} = \int_a^b f(x) - g(x)\, dx} \quad \textbf{Ecuación 1.9.11}$$

$$\boxed{Q_x = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x) - g(x)]^2\, dx} \quad \textbf{Ecuación 1.9.12}$$

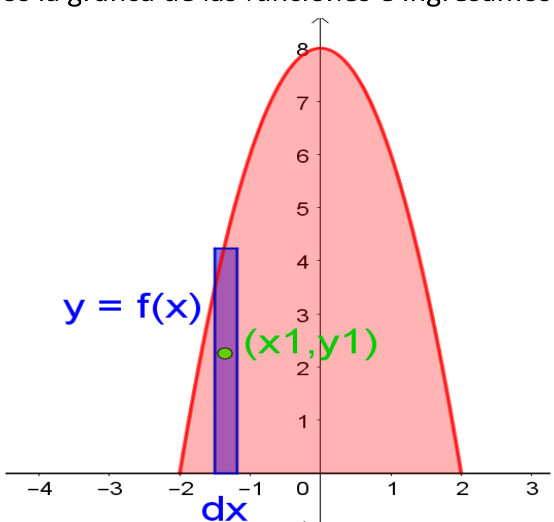
$$\boxed{Q_y = \int_a^b x[f(x) - g(x)]\, dx} \quad \textbf{Ecuación 1.9.13}$$

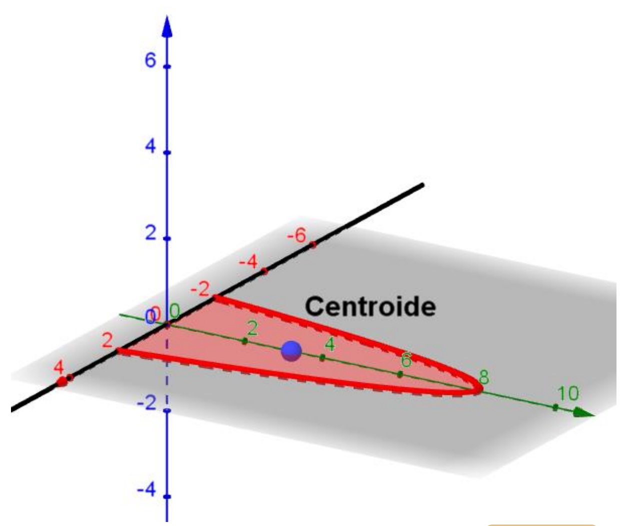
Ejemplo 1

Encuentre el centro de área de la siguiente placa delimitada por las funciones:

$$y = -2x^2 + 8 \quad ; \quad y = 0$$

1. Trazamos la gráfica de las funciones e ingresamos el diferencial





2. Encontramos el área de la función

$$dA = f(x) * dx$$

$$dA = (-2x^2 + 8) * dx$$

$$A = \int_{-2}^{2} -2x^2 + 8\,dx = -\frac{2}{3}x^3 + 8x \Bigg|_{-2}^{2} = \frac{32}{3} - \left(-\frac{32}{3}\right) = \frac{64}{3}$$

$$A = \frac{64}{3}$$

3. Encontramos el primer momento de área respecto a *x*

$$dQ_x = y_1 * dA = \frac{1}{2} * y * dA$$

$$Q_x = \frac{1}{2}\int y * dA = \frac{1}{2}\int y * y * dx = \frac{1}{2}\int y^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} (-2x^2 + 8)^2\,dx$$

$$Q_x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} 64 - 32x^2 + 4x^4\,dx = 32x - \frac{16}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 \Bigg|_{-2}^{2} = \frac{512}{15} + \frac{512}{15}$$

$$Q_x = \frac{1024}{15}$$

4. Encontramos el primer momento de área respecto a *x*

$$dQ_y = x_1 * dA = x * dA$$

$$dQ_y = x * dA = x * y * dx = x * (8 - 2x^2)\,dx = 8x - 2x^3\,dx$$

$$Q_y = \int_{-2}^{2} 8x - 2x^3\,dx = 4x^2 - \frac{1}{2}x^4 \Bigg|_{-2}^{2} = 8 - 8 = 0$$

$$Q_y = 0$$

5. Los centros de área serán:

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} \qquad \bar{y} = \frac{Q_x}{A}$$

$$\bar{x} = \frac{0}{64/3} \qquad \bar{y} = \frac{\frac{1024}{15}}{64/3}$$

6. La respuesta será:

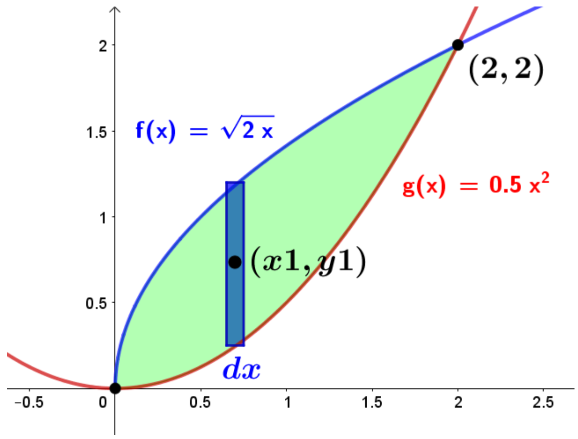
$$\bar{x} = 0 \qquad \bar{y} = 3.2$$

Ejemplo 2

Encuentre el centro de área de la siguiente placa delimitada por las funciones:

$$y = \sqrt{2x} \qquad ; \qquad y = \frac{1}{2}x^2$$

1. Trazamos la gráfica de las funciones para analizar la placa.
2. A la misma gráfica le ingresamos el diferencial, al mismo diferencial le ingresamos su centro geométrico (x_1, y_1)



3. Encontramos el área del sólido.

$$dA = [f(x) - g(x)]\, dx$$

$$dA = \left[\sqrt{2x} - 0.5x^2\right] dx$$

$$\mathbf{A} = \int_0^2 \sqrt{2x} - 0.5x^2 \; dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{6}x^3 \Bigg|_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

4. Encontramos el primer momento de área respecto a *x*

$$dQ_x = \boldsymbol{y_1} * \boldsymbol{dA} = \frac{\boldsymbol{f(x) + g(x)}}{\mathbf{2}} * \boldsymbol{dA} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left[\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{x}} + \mathbf{0.5}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\right] \boldsymbol{dA}$$

$$dQ_x = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left[\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{x}} + \mathbf{0.5}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\right] * \left[\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{x}} - \mathbf{0.5}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\right] * \boldsymbol{dx}$$

$$Q_x = \int_0^2 \frac{1}{2}\left[\sqrt{2x} + 0.5x^2\right] * \left[\sqrt{2x} - 0.5x^2\right] * dx = \frac{1}{2}\int_0^2 2x - \frac{1}{4}x^4 \, dx$$

$$\boldsymbol{Q_x} = \frac{1}{2}\left[x^2 - \frac{1}{20}x^5\right] \Bigg|_0^2 = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}$$

5. Encontramos el primer momento de área respecto a *y*

$$dQ_y = \boldsymbol{x_1} * \boldsymbol{dA}$$

$$dQ_y = \boldsymbol{x} * [\boldsymbol{f(x)} - \boldsymbol{g(x)}]\, \boldsymbol{dx}$$

$$dQ_y = \boldsymbol{x} * \left[\sqrt{2x} - 0.5x^2\right] dx$$

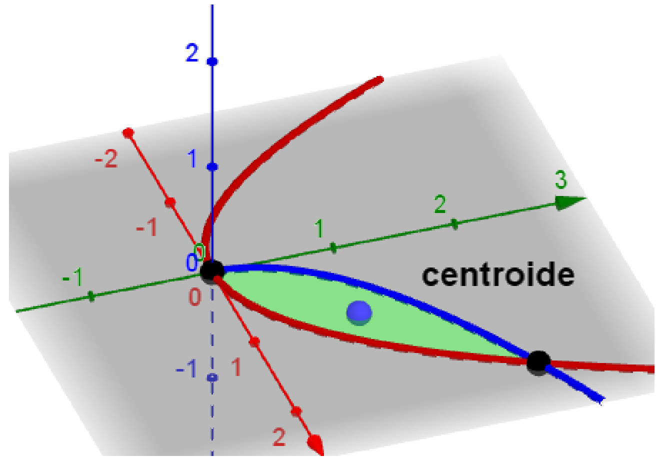
$$Q_y = \int_0^2 \sqrt{2} * x^{3/2} - 0.5x^3\, dx = \frac{2\sqrt{2}}{5}\sqrt{x^5} - \frac{1}{8}x^4 = \frac{16}{5} - 2 = \frac{6}{5}$$

6. Encontramos los centros de área

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} \qquad \bar{y} = \frac{Q_x}{A}$$

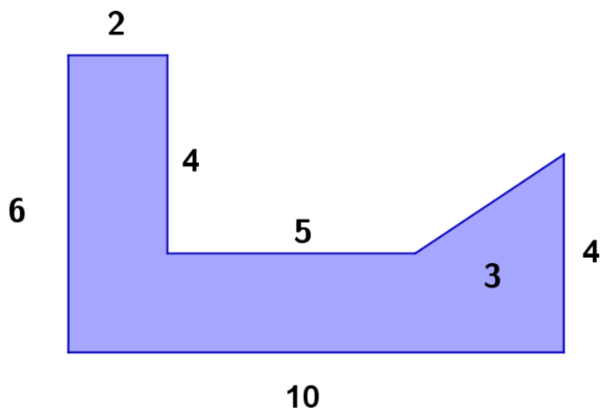
$$\bar{x} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{4}{3}} \qquad \bar{y} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{4}{3}}$$

$$\bar{x} = \frac{9}{10} \qquad \bar{y} = \frac{9}{10}$$

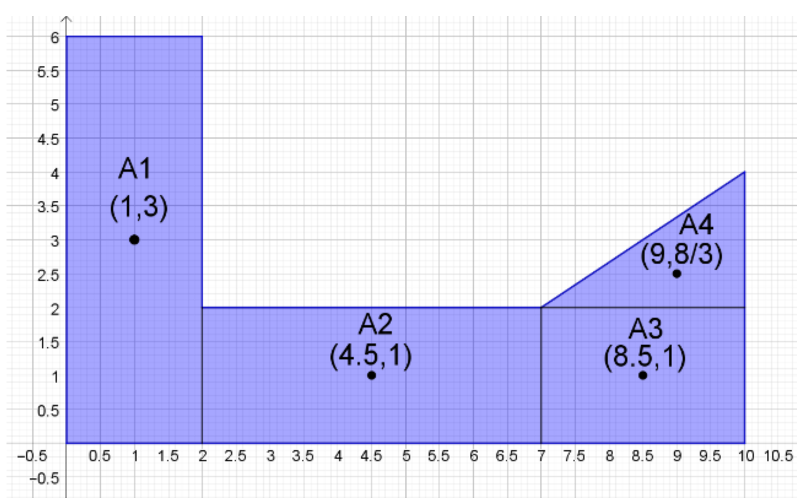


Ejemplo 3

Se tiene la siguiente placa con densidad $\rho\ (masa/área)$ constante. Encuentre el centro de área.



1. Aplicamos un plano cartesiano y se aplica coordenadas a cada vértice de la placa.
2. Desmembramos la placa en figuras regulares conocidas, para obtener 4 áreas.
3. En cada área ubicamos el centroide.



4. Encontramos el área total

$$A_t = \mathbf{A1} + \mathbf{A2} + \mathbf{A3} + \mathbf{A4}$$

$$A_t = (\mathbf{2} * \mathbf{6}) + [(\mathbf{7} - \mathbf{2}) * \mathbf{2}] + [(\mathbf{10} - \mathbf{7}) * \mathbf{2}] + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[(\mathbf{10} - \mathbf{7}) * (\mathbf{4} - \mathbf{2})] = 31$$

5. Encontramos el momento de área respecto a *x*

$$Q_x = \mathbf{A1} * y1 + \mathbf{A2} * y2 + \mathbf{A3} * y3 + \mathbf{A4} * y4$$

$$Q_x = (\mathbf{12} * 3) + (\mathbf{10} * 1) + (\mathbf{6} * 1) + \left(\mathbf{3} * \left(2 + \frac{2}{3}\right)\right) = 60$$

6. Encontramos el momento de área respecto a *y*

$$Q_y = \mathbf{A1} * x1 + \mathbf{A2} * x2 + \mathbf{A3} * x3 + \mathbf{A4} * x4$$

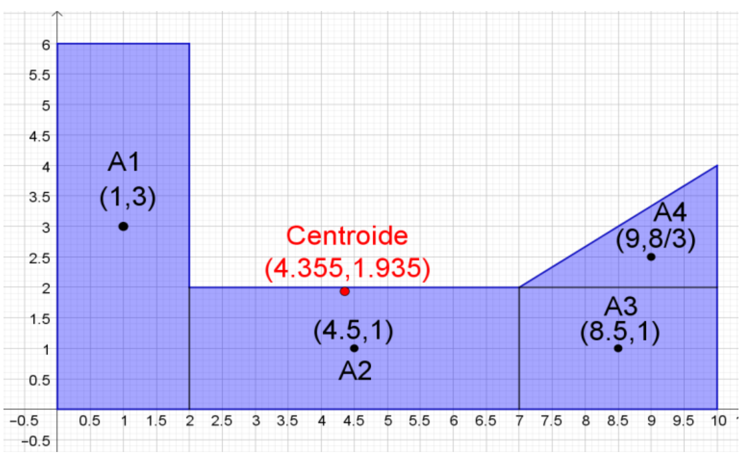
$$Q_y = (\mathbf{12} * 1) + (\mathbf{10} * 4.5) + (\mathbf{6} * 8.5) + (\mathbf{3} * 9) = 135$$

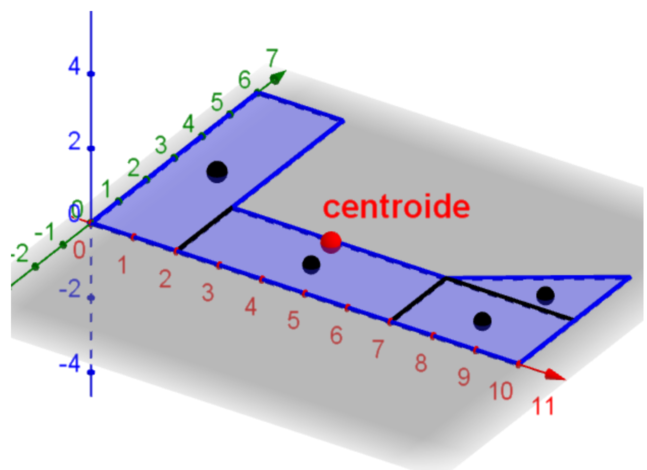
7. Los centroides en x y en y serán

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} \qquad \bar{y} = \frac{Q_x}{A}$$

$$\bar{x} = \frac{135}{31} \qquad \bar{y} = \frac{60}{31}$$

$$\bar{x} = 4.355 \qquad \bar{y} = 1.935$$



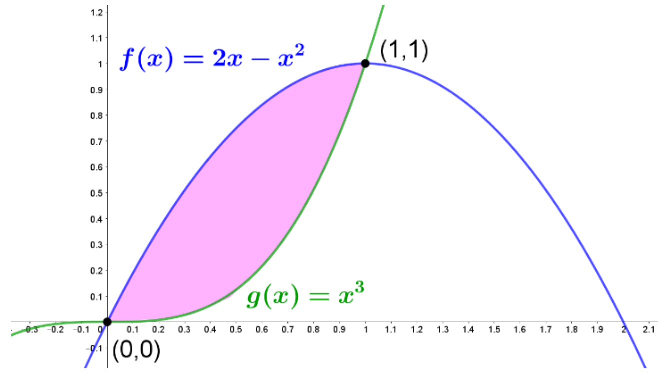


NOTA:

- Cuando la placa es irregular en su forma geométrica se integra. Si es una placa donde se puede desmembrar en figuras regulares, entonces se aplica lo del ejemplo 4, se encuentran el centroide de cada desmembración.
- Nótese que si la placa tiene densidad constante ($\rho = {}^{masa}/_{area}$) el centro de masa es igual al centro de área.
- Cuando la densidad sea variable $\rho = f(x, y)$, o sea, la densidad cambie cuando x y y cambien, se resolverá el problema utilizando intermedia 2 (mate 5)

Ejemplo 4

Compare el centro de masa y el centro de área de la placa delimitada por: $y = x^3$; $y = 2x - x^2$ y el primer cuadrante.



1. Se encuentran los interceptos de la placa Y la gráfica.
   $x^3 = 2x - x^2$
   $x^3 + x^2 - 2x = 0$
   $x = 0$; $x = 1$; $x = -2$

Centro de área

2. Área Total

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\ dx = \int_0^1 2x - x^2 - x^3\ dx = \frac{5}{12}$$

3. Los primeros momentos de área serán:

$$Q_x = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2 - [g(x)]^2\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 [2x - x^2]^2 - [x^3]^2\ dx = \frac{41}{210}$$

$$Q_y = \int_a^b x[f(x) - g(x)]\, dx = \int_0^1 x * [2x - x^2 - x^3]\ dx = \frac{13}{60}$$

4. Los centros de área serán:

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\frac{13}{60}}{\frac{5}{12}} = \frac{13}{25} = 0.52 \qquad ; \qquad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\frac{41}{210}}{\frac{5}{12}} = \frac{82}{175} = 0.468571$$

Centro de masa

5. masa total (el problema no da el valor de ρ, por tanto, se conserva como constante en los cálculos)

$$m = \rho\int_a^b f(x) - g(x)\ dx = \rho\int_0^1 2x - x^2 - x^3\ dx = \frac{5}{12}\rho$$

6. Los primeros momentos de área serán:

$$M_x = \frac{\rho}{2}\int_a^b [f(x)]^2 - [g(x)]^2\, dx = \frac{\rho}{2}\int_0^1 [2x - x^2]^2 - [x^3]^2\ dx = \frac{41}{210}\rho$$

$$M_y = \rho\int_a^b x[f(x) - g(x)]\, dx = \rho\int_0^1 x * [2x - x^2 - x^3]\ dx = \frac{13}{60}\rho$$

7. Los centros de área serán:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{13}{60}\cancel{\rho}}{\frac{5}{12}\cancel{\rho}} = \frac{13}{25} = 0.52 \qquad ; \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{41}{210}\cancel{\rho}}{\frac{5}{12}\cancel{\rho}} = \frac{82}{175} = 0.468571$$

8. En ambos casos las respuestas son:

$$\bar{x} = \frac{13}{25} \qquad ; \qquad \bar{y} = \frac{82}{175}$$

2-INTEGRALES IMPROPIAS

2. INTEGRALES IMPROPIAS

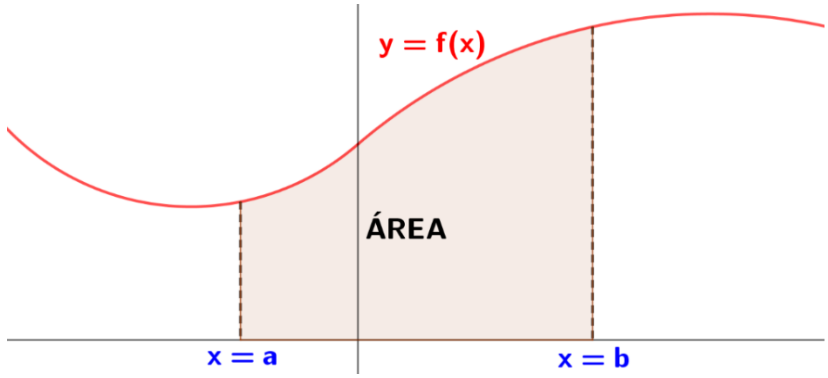
Una vez vistas las técnicas de integración y las aplicaciones entramos al capítulo 2, llamado *Integrales impropias*. Acá se aprenderá a integrar funciones:

- No continuas
- Que no están definidas en el intervalo que se establecen con los límites de integración.
- Funciones definidas solo por la derecha o solamente definidas por la izquierda y que en el otro límite de integración tengan el símbolo infinito.

Es importante que recuerde como resolver límites, pues es una parte fundamental para la resolución de las integrales impropias. Si en caso no se recuerda de límites, debe verificar el manual de matemática Básica 2 publicado en Ingeniería CUNOC.

En la portada usted observa una leona jugando y protegiendo a una niña. De esa manera lo hará el siguiente capitulo por usted una vez haya comprendido los temas, solo debe tener paciencia y dedicación.

1. Recuerde que para encontrar el área de una función continua entre a y b



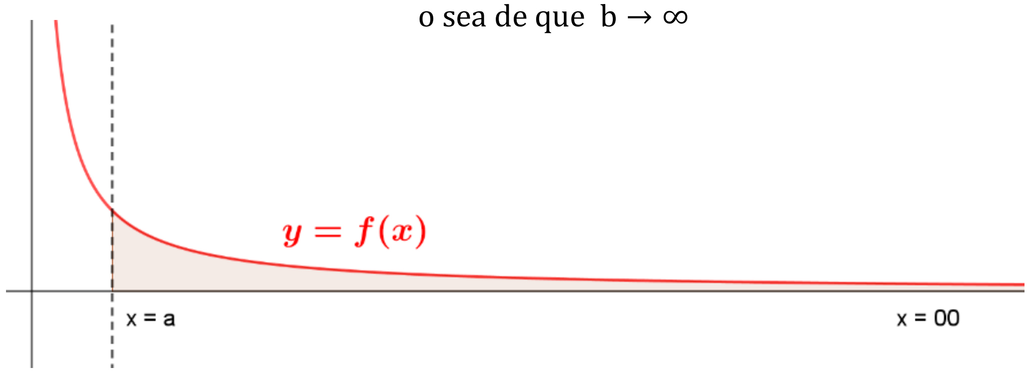
1.1. El área estará definida por:

$$\text{Área} = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

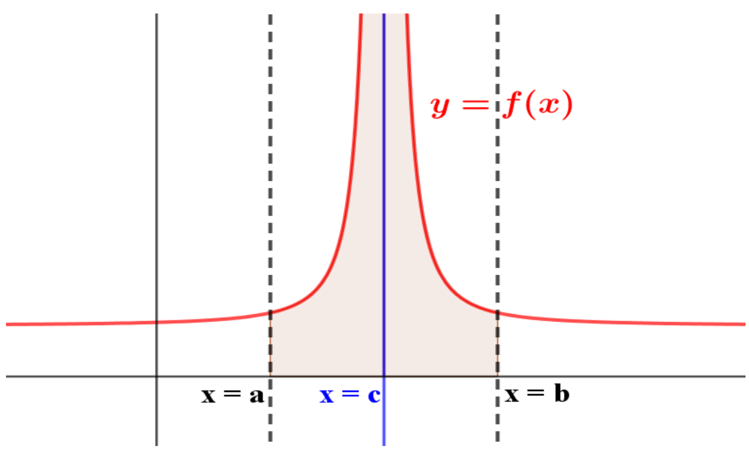
2. Ahora veamos los dos casos siguientes de la integral impropia, donde no se cumple el área definida.

Caso No. 1 Integral de una función que nunca toca el eje x y que se busca esa área encerrada

o sea de que $b \to \infty$



Caso No. 2 Integral de una función que nunca toca el eje x y que se busca esa área encerrada.



Los casos anteriormente mostrados se clasifican en tipos. Así pues, el Caso No. 1 es conocido como el integral tipo 1 y el caso No. 2 es conocido como el integral tipo 2.

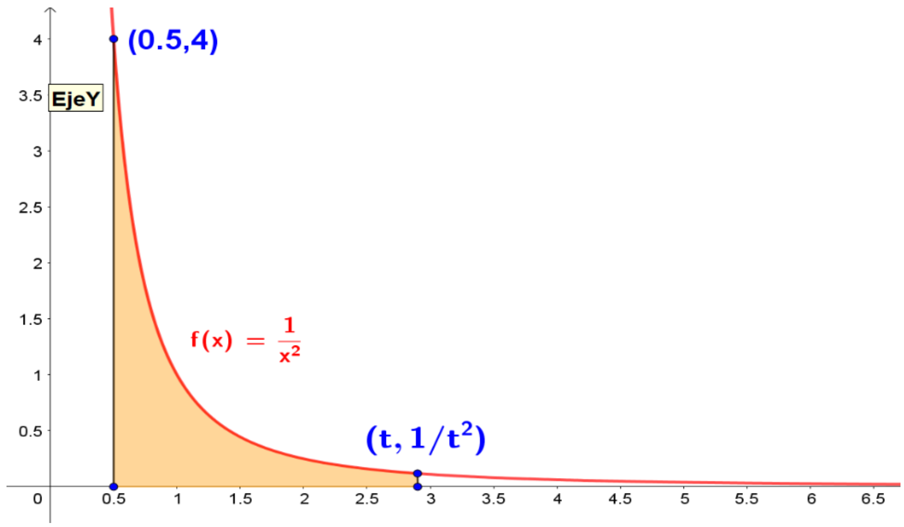
A continuación, veremos cada una de las integrales

2.1. Integral tipo 1. Intervalos infinitos (Caso No. 1)

1. Pensemos que queremos encontrar el área de la función $y = \frac{1}{x^2}$ entre los valores

$$0.5 \leq x \leq \mathrm{t}$$

2. La gráfica de la función será



3. El área entre 0.5 y t estará definida por la integral

$$dA = f(x) * dx$$

$$dA = \frac{1}{x^2} * dx$$

$$A = \int_{0.5}^{t} \frac{1}{x^2}\, dx = \int_{0.5}^{t} x^{-2}\, dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} \Bigg|_{0.5}^{t} = -\frac{1}{t} - \left(-\frac{1}{0.5}\right) = -\frac{1}{t} + 2$$

4. Entonces podemos decir que tenemos una función Área respecto a t (un punto variable) y respecto a 0.5

$$A(t) = 2 - \frac{1}{t}$$

5. Para ver qué pasa con A(t) cuando t tiende al infinito podemos realizar la siguiente tabla:

$\mathbf{t \to \infty}$	$\mathbf{A(t) = 2 - \frac{1}{t}}$
9	1.888888889
99	1.98989899
99	1.98989899
999	1.998998999
999	1.998998999
9999	1.99989999
99999	1.99999
999999	1.999999
9999999	1.9999999

6. En otras palabras, podemos **utilizar los límites diciendo:**

$$A(\mathrm{t}) = \lim_{\mathrm{t}\to\infty} 2 - \frac{1}{\mathrm{t}} = 2$$

7. Para simplificar un poco más el proceso de análisis podemos establecer que para encontrar esta área también se podía:

$$A(\mathrm{t}) = \int_{0.5}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{\mathrm{t}\to\infty} \int_{0.5}^{\mathrm{t}} \frac{1}{x^2} dx$$

Definición de la integral impropia tipo 1

a) $$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{\mathrm{t}\to\infty} \int_a^{\mathrm{t}} f(x) dx \qquad \mathrm{t} \geq a$$

b) $$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{\mathrm{t}\to -\infty} \int_{\mathrm{t}}^{b} f(x) dx \qquad t \leq b$$

c) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{a} f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{\mathrm{t}\to -\infty} \int_{\mathrm{t}}^{a} f(x)\, dx + \lim_{\mathrm{u}\to \infty} \int_a^{\mathrm{u}} f(x)\, dx$$

$$\mathrm{t} \leq a \qquad \mathrm{u} \geq a$$

NOTA: Si el límite existe (el resultado es un número concreto) se dice que la integral **converge** y en caso no suceda se dice que el límite diverge.

Ejemplo 1

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + x}\, dx$$

1. Llevamos la cuadrática a la forma estándar

$$x^2 + x = x^2 + x + k^2 - k^2$$

1.1. Para que sea trinomio cuadrado perfecto $x^2 + x + k^2$ debemos encontrar k

$$2x * k = x$$
$$k = {}^1\!/_2$$

1.2. Entonces el trinomio cuadrado perfecto será

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

1.3. Uniendo el trinomio cuadrado perfecto con el resto.

$$x^2 + x = x^2 + x + k^2 - k^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

2. La nueva integral será

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + x}\, dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}\, dx$$

3. Realizamos una sustitución

$$\boldsymbol{u = x + \frac{1}{2}} \qquad \text{entonces:} \quad \boldsymbol{du = dx}$$

$$\text{Cuando:} \;\; x \to 1 \quad u \to {}^{3}/_{2} \qquad ; \quad \text{cuando:} \;\; x \to \infty \quad u \to \infty$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\left(\boldsymbol{x + \frac{1}{2}}\right)^2 - \frac{1}{4}} \boldsymbol{dx} = \int_{3/2}^{\infty} \frac{1}{\boldsymbol{u}^2 - \frac{1}{4}} \boldsymbol{du} = \int_{3/2}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{4}[4u^2 - 1]} du = 4 \int_{3/2}^{\infty} \frac{1}{(2u)^2 - 1} du$$

4. Volvemos a realizar una sustitución

$$\boldsymbol{m = 2u} \qquad \text{entonces:} \quad dm = 2du \quad ; \quad \boldsymbol{du = \frac{dm}{2}}$$

$$\text{Cuando:} \; u \to {}^{3}/_{2} \quad m \to 3 \qquad \text{Cuando:} \quad u \to \infty \quad m \to \infty$$

$$4 \int_{3/2}^{\infty} \frac{1}{(\boldsymbol{2u})^2 - 1} \boldsymbol{du} = 4 \int_{3}^{\infty} \frac{1}{\boldsymbol{m}^2 - 1} * \frac{\boldsymbol{dm}}{\boldsymbol{2}} = 2 \int_{3}^{\infty} \frac{dm}{m^2 - 1}$$

5. Resolviendo la integral por aparte

$$2 \int \frac{dm}{m^2 - 1}$$

5.1. Descomponemos la fracción racional en parciales

$$\frac{2}{m^2 - 1} = \frac{2}{(\boldsymbol{m - 1}) * (\boldsymbol{m + 1})} = \frac{\mathbf{A}}{\boldsymbol{m - 1}} + \frac{\mathbf{B}}{\boldsymbol{m + 1}}$$

$$2 = \left[\frac{\mathbf{A}}{\boldsymbol{m - 1}} + \frac{\mathbf{B}}{\boldsymbol{m + 1}}\right] * (\boldsymbol{m - 1})(\boldsymbol{m + 1})$$

$$2 = \mathbf{A}(\boldsymbol{m + 1}) + \mathbf{B}(\boldsymbol{m - 1})$$

$$2 = \mathrm{A}m + \mathrm{A} + \mathrm{B}m - \mathrm{B}$$

5.2. Los valores de A y B serán

$$\mathbf{A = 1} \qquad \mathbf{B = -1}$$

5.3. Volviendo a la integral

$$2 \int \frac{dm}{m^2 - 1} = \int \frac{1}{m - 1} - \frac{1}{m + 1} \, dm = \ln(m - 1) - \ln(m + 1) = \ln\left(\frac{m - 1}{m + 1}\right)$$

6. Planteando la integral tipo 1

$$2 \int_{3}^{\infty} \frac{dm}{m^2 - 1} = \lim_{t \to \infty} \int_{3}^{t} \frac{dm}{m^2 - 1} = \lim_{t \to \infty} \left[\ln\left(\frac{m - 1}{m + 1}\right)\right] = \lim_{t \to \infty} \left[\ln\left(\frac{t - 1}{t + 1}\right)\right] - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\lim_{t \to \infty} \left[\ln\left(\frac{t - 1}{t + 1}\right)\right] + \ln(2) = \mathbf{ln}\left(\lim_{t \to \infty} \frac{\mathbf{t - 1}}{\mathbf{t + 1}}\right) + \mathrm{Ln}(2) = \mathbf{ln(1)} + \ln(2) = \ln(2)$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + x} dx = \ln(2) \qquad \text{converge}$$

Ejemplo 2

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx$$

1. Realizamos una sustitución

$$u = \ln x \qquad \text{derivamos: } \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \text{por ende: } dx = x\, du$$

$$\text{Cuando: } x \to \infty \quad u \to \infty \qquad Cuando: \ x \to 1 \quad u \to 0$$

2. Sustituyendo

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx = \int_{0}^{\infty} \frac{u}{x} * x\, du = \int_{0}^{\infty} u\ du$$

3. Planteamos la integral tipo 1

$$\int_{0}^{\infty} u\ du = \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} u\ du = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{u^2}{2}\right]\Bigg|_{0}^{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2} t^2 = \infty - 0 = \infty$$

4. La respuesta será

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx = \infty \quad \text{diverge}$$

Ejemplo 3

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9 + x^6}\, dx$$

1. Realizamos el siguiente cambio:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9 + x^6}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9 + (x^3)^2}\, dx$$

2. Sustituimos

$$u = x^3 \qquad \text{Derivando: } \frac{du}{dx} = 3x^2 \quad \text{por tanto: } dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$\text{Cuando: } x - \infty \quad u \to -\infty \qquad \text{Cuando: } x \to \infty \quad u \to \infty$$

3. Sustituyendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9 + (x^3)^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9 + (x^3)^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9 + u^2} * \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{9 + u^2} * du$$

4. Realizamos el siguiente cambio

$$\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{9 + u^2} * du = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{9\left[1 + \frac{1}{9}u^2\right]} * du = \frac{1}{27}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{u}{3}\right)^2\right]} * du$$

5. Realizamos otra sustitución

$$m = \frac{u}{3} \qquad \text{Derivando: } \frac{dm}{du} = \frac{1}{3} \qquad \text{por tanto: } du = 3\,dm$$

$$\text{Cuando: } u \to -\infty \quad m \to -\infty \qquad \text{Cuando: } u \to \infty \quad m \to \infty$$

6. Realizando la nueva sustitución

$$\frac{1}{27}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left[1+\left(\frac{u}{3}\right)^2\right]} * du = \frac{1}{27}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[1+m^2]} * 3\,dm = \frac{1}{9}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+m^2}\,dm$$

7. Planteamos la integral tipo 1 (Tomamos $m = 0$ como punto parte análisis. Eso es arbitrario)

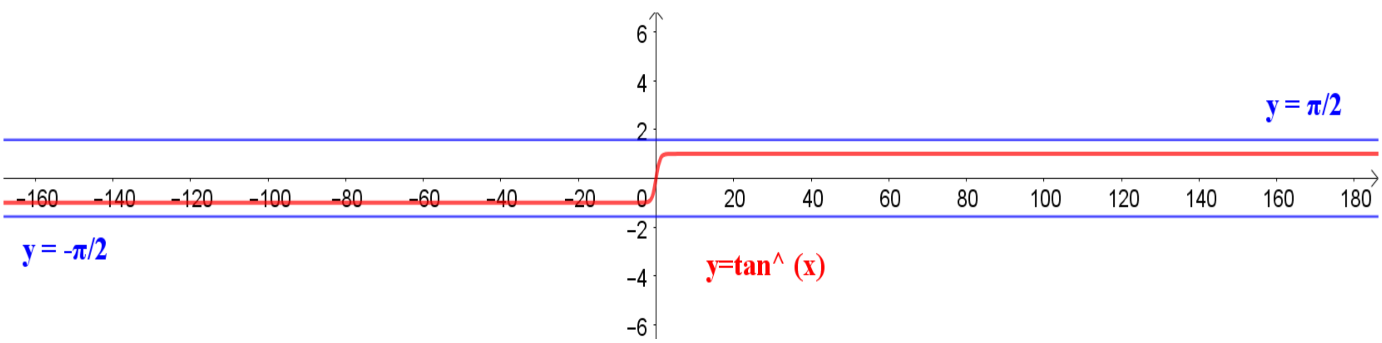
$$\frac{1}{9}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+m^2}\,dm = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{9}\int_{t}^{0} \frac{1}{1+m^2}\,dm + \lim_{z\to\infty} \frac{1}{9}\int_{0}^{z} \frac{1}{1+m^2}\,dm$$

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{1}{9} tan^{-1}m \Bigg|_{t}^{0} + \lim_{z\to\infty} \frac{1}{9} tan^{-1}m \Bigg|_{0}^{z}$$

$$\lim_{t\to-\infty} 0 - \frac{1}{9}(tan^{-1}t) + \lim_{z\to\infty} \frac{1}{9}(tan^{-1}z) - 0$$

$$\lim_{t\to-\infty} -\frac{1}{9}\, tan^{-1}\, t + \lim_{z\to\infty} \frac{1}{9}\, tan^{-1}z$$

8. Analizamos la función $y = tan^{-1}\, x$



Entonces vemos que: $\lim_{x\to-\infty} tan^{-1}(x) = -{}^{\pi}/_{2}$; $\lim_{x\to\infty} tan^{-1}(x) = {}^{\pi}/_{2}$

9. Regresando al análisis

$$\lim_{t\to-\infty} -\frac{1}{9} tan^{-1}\, t + \lim_{z\to\infty} \frac{1}{9}\, tan^{-1}z$$

$$\frac{1}{9} * \frac{\pi}{2} + \frac{1}{9} * \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{9}$$

10. La respuesta entonces será:

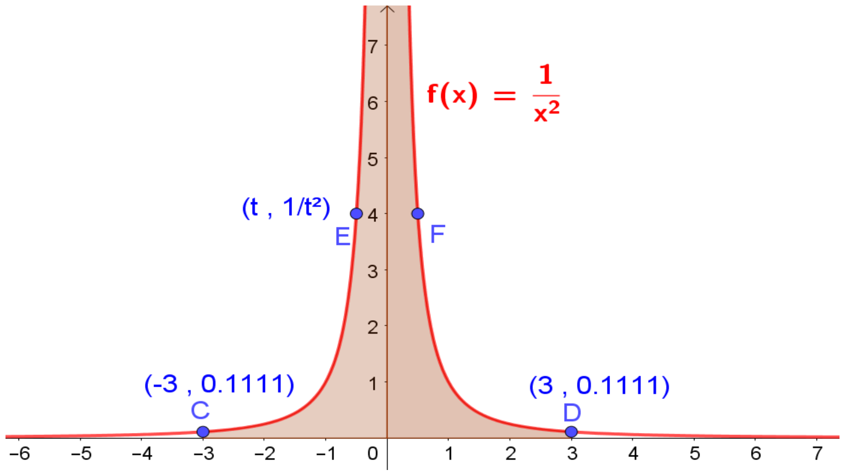
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9+x^6}\,dx = \frac{\pi}{9} \quad \text{converge}$$

2.2. Integral tipo 2. Integrando discontinuos (Caso No. 2)

1. Pensemos que se quiere encontrar el área de la función $y = \frac{1}{x^2}$ entre los valores

$$-3 \leq x \leq 3$$

2. La gráfica de la función será



3. Como puede ver en la gráfica, esa función es discontinua (en $x = 0$ no está definida), por lo tanto, es una integral del tipo 2.

4. Podríamos integrar en dos fases, tomando el análisis del caso tipo 1.

$$\textbf{ENTRE PUNTO C a E} \quad + \quad \textbf{ENTRE PUNTO F a D}$$

$$\mathrm{A} \;=\; \mathbf{A_1} + \mathbf{A_2} \;=\; \int_{-3}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{0}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; \int_{-3}^{t} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{u}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx$$

5. Similar al análisis de la integral tipo 1 a t lo comenzamos a aproximar a cero por la izquierda y a u la aproximamos a cero por la derecha.

$$\mathrm{A} \;=\; \int_{-3}^{t} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{u}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; \lim_{t\to 0^-} \int_{-3}^{t} \frac{1}{x^2}\,dx + \lim_{u\to 0^+} \int_{u}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx$$

6. Resolviendo la integral nos quedará:

$$\mathrm{A} \;=\; \lim_{t\to 0^-} \int_{0}^{t} \frac{1}{x^2}\,dx + \lim_{u\to 0^+} \int_{u}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; \lim_{t\to 0^-} -\frac{1}{x}\Bigg|_{-3}^{t} + \lim_{u\to 0^+} -\frac{1}{x}\Bigg|_{u}^{3}$$

$$\mathrm{A} \;=\; \lim_{t\to 0^-} -\frac{1}{t} - \frac{1}{-3} \;+\; \lim_{u\to 0^+} -\frac{1}{3} - \frac{1}{-3}$$

7. Analizamos por aparte el límite

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t} \qquad y \qquad \lim_{u\to 0^+} \frac{1}{u}$$

$t \to 0^-$	$\frac{1}{t}$
-0.1	-10
-0.01	-100
-0.001	-1000
-0.0001	-10000
-0.00001	-100000
-0.000001	-1000000

$u \to 0^+$	$\frac{1}{u}$
0.1	10
0.01	100
0.001	1000
0.0001	10000
0.00001	100000
0.000001	1000000

8. Como se puede ver en la tabla, las tendencias son menos infinito y más infinito.

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t} = -\infty \qquad y \qquad \lim_{u\to 0^+} \frac{1}{u} = \infty$$

9. Retornando a la respuesta tenemos:

$$A = \lim_{t\to 0^-} -\frac{1}{t} - \frac{1}{-3} + \lim_{u\to 0^+} -\frac{1}{3} - \frac{1}{-3}$$

$$A = -(-\infty) - \frac{1}{3} + \infty + \frac{1}{3}$$

$$A = \infty + \infty$$

$$\mathbf{A = \infty}$$

Como puede observar querido estudiante, se trata de analizar la gráfica de la función y también analizar el dominio de la misma. De estos modos tendremos la definición de la integral tipo 2:

Definición de la integral tipo 2

a) $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$

Para $f(x)$ definida $[a,b)$

b) $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$

Para $f(x)$ definida $(a,b]$

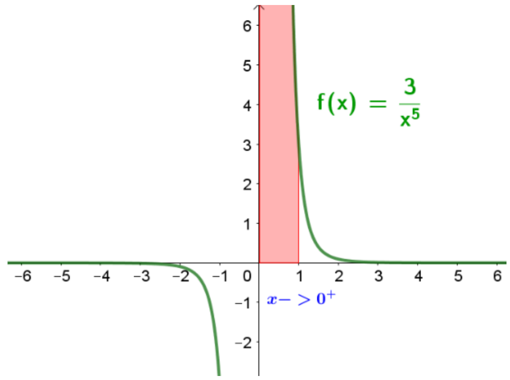
c) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)\,dx + \lim_{u\to c^+} \int_u^b f(x)\,dx$

Ejemplo 1

$$\int_0^1 \frac{3}{x^5}\,dx$$

1. Analizamos el dominio de la función que se está integrando

$$\text{Para } \frac{3}{x^5} \quad ; \quad x \neq 0$$



2. Vemos que el límite de integración inferior no está definido dentro del dominio, por lo tanto, se tendrá que aplicar el caso **b)**

$$\int_0^1 \frac{3}{x^5}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{3}{x^5}\,dx$$

3. Resolvemos la integral

$$\int \frac{3}{x^5}\,dx = 3\int x^{-5}\,dx = 3 * \frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{3}{4x^4}$$

4. Evaluando la integral con el límite

$$\lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{3}{x^5}\,dx = \lim_{t\to 0^+} -\frac{3}{4x^4} = \lim_{t\to 0^+} -\frac{3}{4} - \left(\frac{-3}{4\,t^4}\right)\Bigg|_t^1 = \lim_{t\to 0^+} -\frac{3}{4} + \frac{3}{4\,t^4}$$

5. Recordamos el límite:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^4} = \infty$$

6. Por tanto, la respuesta será:

$$\lim_{t\to 0^+} -\frac{3}{4} + \frac{3}{4\,t^4} = -\frac{3}{4} + \infty = \infty$$

$$\int_0^1 \frac{3}{x^5}\,dx = \infty \quad \text{Diverge}$$

Ejemplo 2

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Analizamos el dominio de la función. Específicamente los valores donde se indefine

$$x \neq 1 \qquad \text{porque realiza la forma: } \frac{1}{\sqrt{0}} = \frac{1}{0} \ \ \text{(Forma indeterminada)}$$

2. Planteamos la integral tomando la referencia del caso **a)**

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to1^-}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. Resolvemos la integral, para ello debemos recordarnos de la **tabla 1.5.a**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \;\; ; \; a>0$$

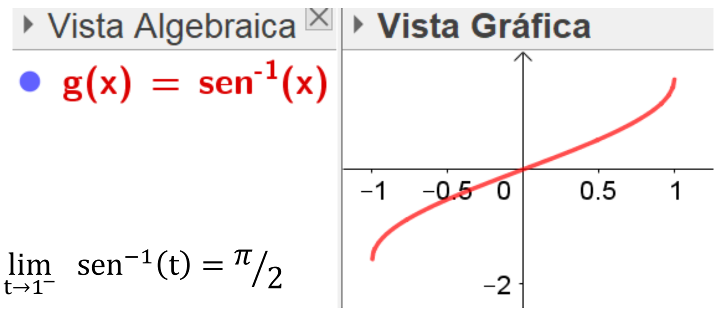
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}(x)$$

4. Retornando a la evaluación de la integral

$$\lim_{t\to1^-}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to1^-} \operatorname{sen}^{-1}(x)\Big|_0^t = \lim_{t\to1^-} \operatorname{sen}^{-1}(t) - 0 = \lim_{t\to1^-} \operatorname{sen}^{-1}(t)$$

5. Analizamos por aparte la función seno inverso.

$$\lim_{x\to1^-} \operatorname{sen}^{-1}(x) = {}^{\pi}/_{2}$$



6. La respuesta será:

$$\lim_{t\to1^-} \operatorname{sen}^{-1}(t) = {}^{\pi}/_{2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = {}^{\pi}/_{2} \quad \text{Converge}$$

Ejemplo 3

$$\int_0^5 \frac{w}{w-2}\,dw$$

1. Analizamos el dominio de la función, específicamente los valores donde se indefine

$$\frac{w}{w-2} \qquad w \neq 2 \qquad \text{por qué realiza: } \frac{2}{2-2} = \frac{2}{0} \;\; \text{(Forma indeterminada)}$$

2. Como $w = 2$ se encuentra dentro del intervalo $[0\,,5]$ tomamos de referencia el caso **c)**

$$\int_0^5 \frac{w}{w-2}\,dw = \lim_{t\to2^-}\int_0^t \frac{w}{w-2}\,dw + \lim_{u\to2^+}\int_u^5 \frac{w}{w-2}\,dw$$

3. Resolvemos la integral

$$\int \frac{w}{w-2}\,dw$$

3.1. Realizamos una sustitución

$$\boldsymbol{m = w - 2} \quad ; \quad \frac{dm}{dw} = 1 \qquad \text{por tanto:} \quad \boldsymbol{dm = dw}$$

$$\boldsymbol{m + 2 = w}$$

3.2. Sustituyendo

$$\int \frac{\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w-2}}\,\boldsymbol{dw} = \int \frac{\boldsymbol{m+2}}{\boldsymbol{m}}\,\boldsymbol{dm} = \int \frac{m}{m}\,dm + \int \frac{2}{m}\,dm = m + 2\ln\,(m)$$

3.3. Retornando a la variable original

$$\boldsymbol{m} + 2\ln \boldsymbol{m} = \boldsymbol{w-2} + 2\ln\,(\boldsymbol{w-2})$$

4. Regresando a la evaluación de la integral

$$\lim_{t\to 2^-}\int_0^t \frac{w}{w-2}\,dw + \lim_{u\to 2^+}\int_u^5 \frac{w}{w-2}\,dw$$

$$\lim_{t\to 2^-} w - 2 + 2\ln(w-2)\Bigg|_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} + \lim_{u\to 2^+} w - 2 + 2\ln(w-2)\Bigg|_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{5}}$$

$$\lim_{t\to 2^-} \boldsymbol{t - 2 + 2\ln(t-2)} - [\boldsymbol{-2 + 2\ln(-2)}] + \lim_{u\to 2^+} \boldsymbol{5 - 2 + 2\ln(5-2)} - [\boldsymbol{u - 2 + 2\ln(u-2)}]$$

$$\lim_{t\to 2^-} t - 2 + 2\ln(t-2) + 2 - 2\ln(-2) + \lim_{u\to 2^+} 5 - 2 + 2\ln(3) - u + 2 - 2\ln(u-2)$$

$$\lim_{t\to 2^-} t + 2\ln(t-2) - 2\ln(-2) + \lim_{u\to 2^+} 5 + 2\ln(3) - u - 2\ln(u-2)$$

4.1. Utilizamos la propiedad de los logaritmos:

$$\ln(A) - \ln(B) = \ln\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$\lim_{t\to 2^-} t + 2\ln(t-2) - 2\ln(-2) + \lim_{u\to 2^+} 5 + 2\ln(3) - u - 2\ln(u-2)$$

$$\lim_{t\to 2^-} t + 2\ln\left(\frac{t-2}{-2}\right) + \lim_{u\to 2^+} 5 - u + 2\ln\left(\frac{3}{u-2}\right)$$

$$\lim_{t\to 2^-} t + 2\ln\left(\frac{2-t}{2}\right) + \lim_{u\to 2^+} 5 - u + 2\ln\left(\frac{3}{u-2}\right)$$

4.2. Debemos analizar los siguientes límites, luego sumamos los límites.

t→ 2^-	$2\ln\left(\frac{2-t}{2}\right)$
1.9	-5.991464547
1.99	-10.59663473
1.999	-15.20180492
1.9999	-19.80697511
1.99999	-24.41214529
1.999999	-29.01731548
1.9999999	-33.62248566
1.99999999	-38.22765586
1.999999999	-42.83282587

u→ 2^+	$2\ln\left(\frac{3}{u-2}\right)$
2.1	6.802394763
2.01	11.40756495
2.001	16.01273514
2.0001	20.61790532
2.00001	25.22307551
2.000001	29.82824569
2.0000001	34.43341588
2.00000001	39.03858608
2.000000001	43.64375609

$2\ln\left(\frac{2-t}{2}\right)+2\ln\left(\frac{3}{u-2}\right)$
0.810930216
0.810930216
0.810930216
0.810930216
0.810930216
0.810930216
0.810930221
0.810930216
0.810930216

Como puede notar querido estudiante, la suma de ambos límites es 0.810930216. Otra forma de encontrar este valor es analizando los límites algebraicamente.

4.3. Este valor se puede obtener de operar ambos límites

$$\lim_{t\to 2^-} 2\ln\left(\frac{2-t}{2}\right) + \lim_{u\to 2^+} 2\ln\left(\frac{3}{u-2}\right) = 2*\left[\lim_{t\to 2^-}\ln\left(\frac{2-t}{2}\right)+\lim_{u\to 2^+}\ln\left(\frac{3}{u-2}\right)\right]$$

4.3.1. Utilizamos la propiedad de logaritmos

$$\ln A + \ln B = \ln(A*B)$$

4.3.2. Como t y u tienden a 2, podemos decir que $t = u$

$$2*\left[\lim_{t\to 2^-}\ln\left(\frac{2-t}{2}\right)+\lim_{u\to 2^+}\ln\left(\frac{3}{u-2}\right)\right] = 2*\left[\lim_{t\to 2^-}\ln\left(\frac{2-t}{2}\right)+\lim_{u\to 2^+}\ln\left(\frac{3}{t-2}\right)\right]$$

$$\frac{2-t}{u-2} = 1 \quad \text{(hacer la prueba con la calculadora)}$$

$$= 2*\left[\ln\left(\lim_{t\to 2^-}\frac{\cancel{2-t}}{2} * \lim_{u\to 2^+}\frac{3}{\cancel{u-2}}\right)\right] = 2*\left[\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right] = 2\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

5. Volviendo al límite del paso 4.1.

$$\lim_{t\to 2^-} \mathbf{t} + 2\ln\left(\frac{2-t}{2}\right) + \lim_{u\to 2^+} \mathbf{5-u} + 2\ln\left(\frac{3}{u-2}\right) = \mathbf{2+5-2} + 2\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= 5 + 2\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

6. La respuesta será:

$$\int_0^5 \frac{w}{w-2}\,dw = 5 + 2\ln\left(\frac{3}{2}\right) = 5.8109302 \quad \text{converge}$$

2.3. Teorema de comparación

Algunas integrales donde uno de los límites de integración tiende al infinito presentan un camino tedioso de resolución, así como también algunas integrales son imposibles de resolver. Para esos dos casos lo que interesa es una respuesta (saber si converge o no converge)

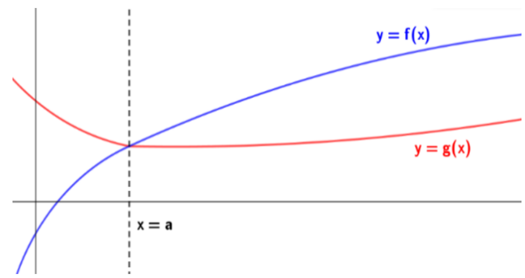
El análisis del teorema de comparación expresa que:

DEFINICIÓN TEOREMA COMPARACIÓN

$f(x)$ y $g(x)$ son continuas con $\;f(x) \geq g(x) \geq 0\;$ para toda $x \geq a$

a) si: $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente $\quad\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ es convergente

b) si: $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ es divergente $\quad\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ es divergente



En otras palabras, lo que se hace es comparar (por eso el nombre del teorema) dos integrales, lo que hace más fácil llegar al resultado.

$$\boxed{\int_a^{\infty} f(x)\,dx \;\geq\; \int_a^{\infty} g(x)\,dx}$$

Ejemplo: Suponga que nos piden resolver la integral

$$2\pi \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx$$

Para resolver esa integral se necesitan por lo menos 3 sustituciones, se llega a una parte donde se resuelven fracciones parciales y por último una nueva sustitución. Demasiado larga para resolverla, para llegar a la respuesta de que es infinito (no converge).

Para ello es más fácil resolver esa integral comparándola con otra integral

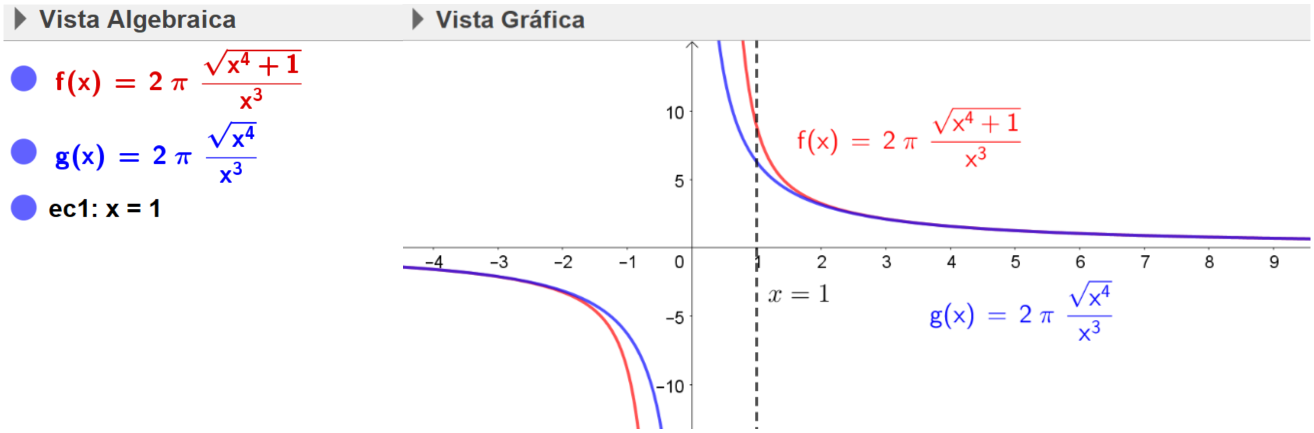
$$2\pi \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx \;>\; 2\pi \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^4}}{x^3}\,dx$$

$$2\pi \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^4}}{x^3}\,dx \;=\; 2\pi \int_1^{\infty} \frac{x^2}{x^3}\,dx \;=\; 2\pi \int_1^{\infty} \frac{x^2}{x^3}\,dx \;=\; 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx \;=\; 2\pi \ln x \,\Big|_1^{\infty} \;=\; \infty - 0 = \infty$$

Por tanto, concluimos que:

$$2\pi \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx \;>\; \infty \qquad \text{que es lo mismo decir:} \qquad 2\pi \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx = \infty$$

Se puede observar que cumple con el teorema de comparación gráficamente en $x \geq 1$



Ejemplo 1

Indique si la siguiente integral converge o diverge

$$\int_{1}^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4 - x}}\, dx$$

1. Si usted evalúa el valor de $x = 1$ la función se indeterminará**.**

2. Vemos que la integral es complicada de resolver, por tanto, utilizamos el teorema de comparación para ver si el resultado converge o diverge.

$$\int_{1}^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4 - x}}\, dx = \int_{1}^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x(x^3-1)}}\, dx = \int_{1}^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x\,(x-1)\,(x^2+x+1)}}\, dx$$

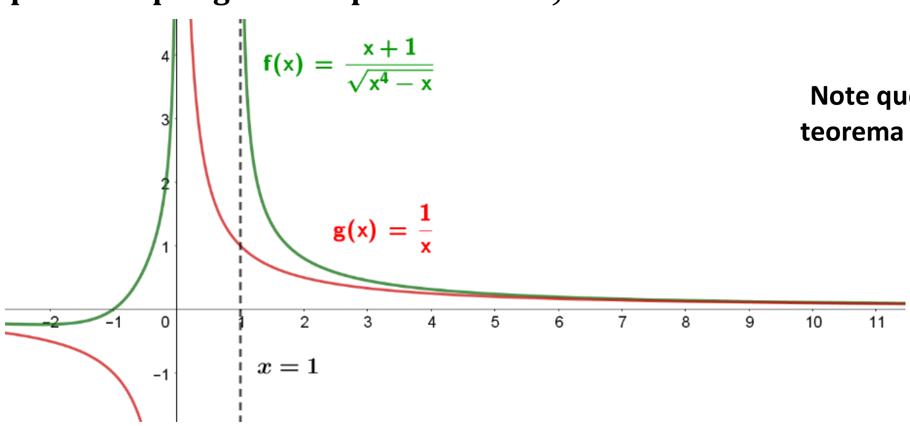
3. El planteo de la comparación en las integrales será:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4 - x}}\, dx \geq \lim_{t \to 1^+} \int_{t}^{\infty} g(x)\, dx$$

4. Buscamos $g(x)$. Recuede que puede ser cualquiera siempre y cuando $0 < g(x) < f(x)$ para toda $1 < x < \infty$

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{debido a que para todo valor de } x \geq 1$$

(**Puede comprobarlo por gráfica o por una tabla**)



Note que cumple con el teorema de comparación

5. Por tanto, comparando la integral

$$\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}}\,dx \;>\; \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$$

6. La resolución de la integral de $g(x)$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)\Big|_1^\infty = \ln(\infty)-\ln(1) = \infty - 0 = \infty$$

7. Siendo la respuesta

$$\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}}\,dx > \infty$$

$$\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}}\,dx = \infty \quad \text{diverge}$$

Ejemplo 2

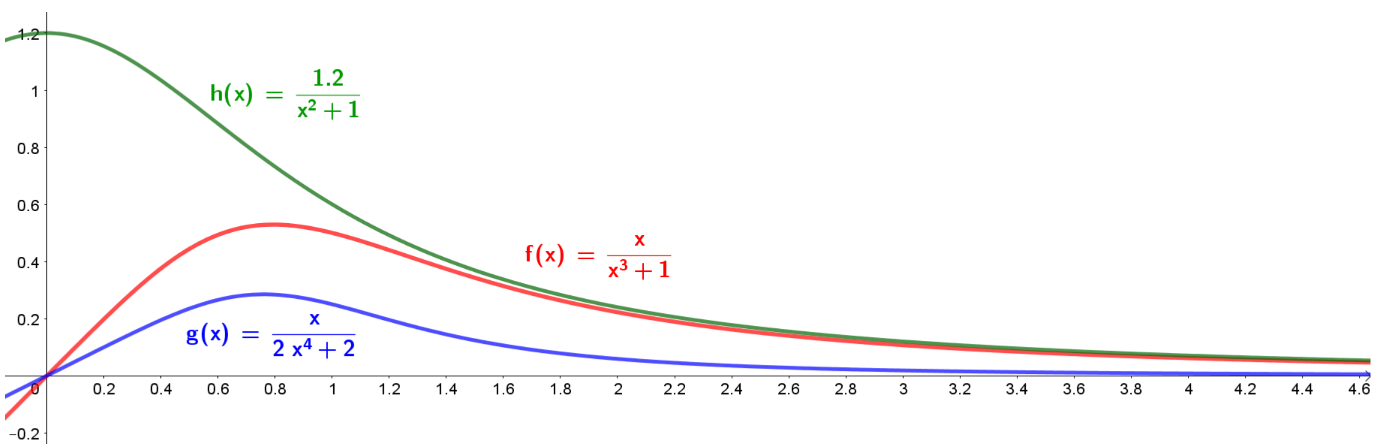
Indique si la siguiente integral converge o diverge

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx$$

1. La resolución de esa integral es complicada. Como el límite superior es infinito se puede utilizar el teorema de comparación.

2. Recuede que puede ser cualquiera siempre y cuando $g(x) < f(x) < h(x)$ para toda $0 \le x \le \infty$

$$\boldsymbol{g(x) = \frac{x}{2x^4+2}} \qquad \boldsymbol{h(x) = \frac{1.2}{x^2+1}}$$ Porque es fácil de integrar y cumple con el teormea



3. La comparación de integrales es:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\,dx < \int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx < \int_0^\infty \frac{1.2}{x^2+1}\,dx$$

4. Resolvemos la integral g(x)

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{x}{x^4+1}\,dx$$

4.1. Comenzamos realizando una sustitución

$u = x^2$; Derivando: $\frac{du}{dx} = 2x$ por tanto: $\frac{du}{2x} = dx$

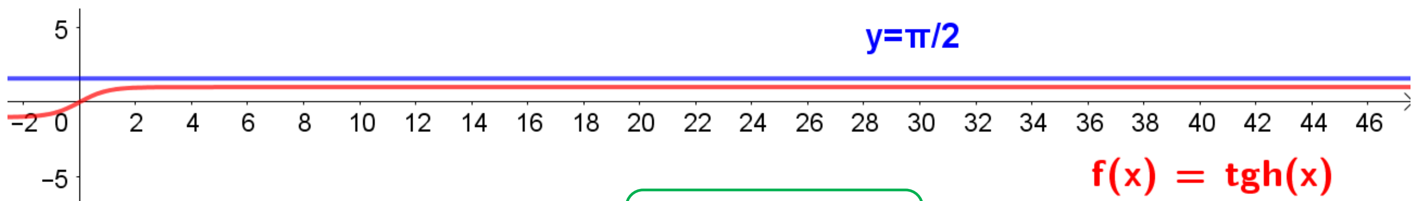
$u^2 = x^4$

Cuando: $x = \infty$; $u = \infty$ y cuando: $x = 0$; $u = 0$

4.2. Sustituyendo

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{x}{u^2+1}*\frac{du}{2x} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\frac{du}{u^2+1} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}*tan^{-1}u\,\Bigg|_{0}^{t} = \frac{\pi}{4}$$

4.3. Recuerde que:



$$\boxed{\lim_{x\to\infty} tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}}$$

4.4. Por tanto, la integral es:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}*tan^{-1}u\,\Bigg|_{0}^{t} = \frac{1}{2}*\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

5. La comparación de la integral es

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{\pi}{4} \quad \text{(converge)}$$

6. La integral h(x) será:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{1.2}{x^2+1}\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{6}{5}\int_{0}^{n}\frac{dx}{x^2+1} = \lim_{n\to\infty} tan^{-1}x\,\Bigg|_{0}^{\infty} = \frac{6}{5}*\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{5} \quad \text{(converge)}$$

7. La respuesta por tanto será:

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{x}{x^4+1}\,dx < \int_{0}^{\infty}\frac{x}{x^3+1}\,dx < \int_{0}^{\infty}\frac{1.2}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{4} < \int_{0}^{\infty}\frac{x}{x^3+1}\,dx < \frac{3\pi}{5}$$

8. La respuesta será:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x}{x^3+1}\,dx \quad \text{(converge)}$$

3. ECUACIONES PARAMÉTRICAS

En este punto del curso es importante haber comprendido los capítulos 1 y 2 de este texto. En el presente capítulo seguiremos viendo aplicaciones de la integral. Nuevamente veremos longitud de arco y área de una superficie, pero orientado al tema de **ecuaciones paramétricas,** utilizando un parámetro t como se definirá más adelante.

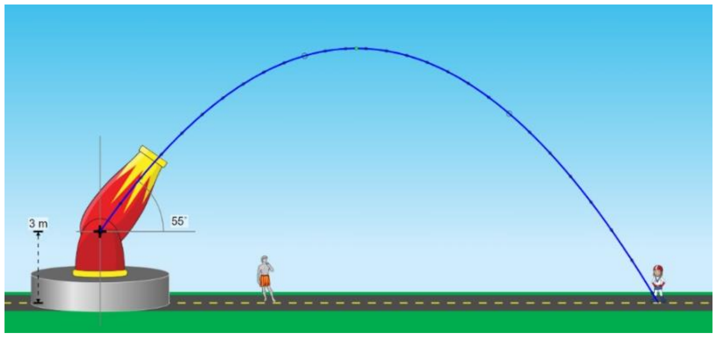
En este capítulo veremos trazo de gráficas que no se logran describir con funciones que hemos estado trabajando hasta este momento $[y = f(x)]$ o también $[x = g(y)]$. Veremos curvas muy conocidas como cicloide, cardioide entre otras, que están regidas bajo un parámetro que veremos a continuación:

En la portada puede usted observar dos elefantes, realmente son creaturas encantadoras y un tanto temibles, por su tamaño. Pues de esa misma manera son las paramétricas, se observan temibles por sus cálculos, pero una vez comprendido el tema, vera que se pueden utilizar en muchas aplicaciones de la ingeniería.

3.1. DEFINICIÓN DE PARAMETRO

Recordemos querido lector el tema llamado **TIRO PARABÓLICO**, el cual trata de cinemática (estudia el movimiento de las partículas) y es parte de la rama de la física llamada mecánica.

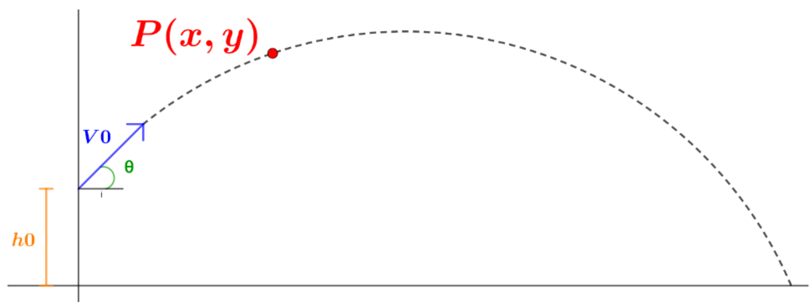
Dicho tema se presenta en dos dimensiones como lo es el $eje\ x$ y el $eje\ y$. Para comprender esta idea aterricemos con la siguiente figura.



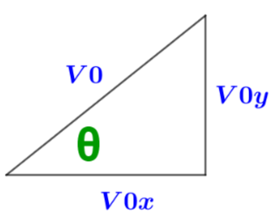
Como puede notar el movimiento va en dirección al $eje\ x$ $\longrightarrow$ y en dirección al eje y $\uparrow$

¿De qué factores depende la posición de la partícula?

- Velocidad inicial V_0
- Gravedad g
- Del ángulo de inclinación θ
- Altura inicial de la partícula h_0



Recuerde que para encontrar las componentes de las velocidades en los ejes es:



$$\text{Velocidad inicial en } x = V_{0x} = V_0 * \cos(\theta)$$

$$\text{Velocidad inicial en } y = V_{0y} = V_0 * \text{sen}(\theta)$$

Movimiento rectilineo uniforme

$$x = V_{0x} * t$$

$$x = V_0 \cos(\theta)\, t$$

Movimiento rectilineo uniformemente variado

$$y = y_0 + V_{0y} * t + \frac{1}{2} * a_y * t^2$$

$$y = h_0 + V_0 \text{sen}(\theta)\, t + \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

Donde: $V_{0x}, V_{0y}, \theta, h_0$ y g son constantes

Las únicas variables son:

$\boldsymbol{x}$ = Posición en el eje x $\boldsymbol{y}$ = Posición en el eje y $\mathbf{t}$ = tiempo de vuelo

$$P(x, y) = P\left(V_0\cos(\theta)\,t\,, h_0 + V_0\text{sen}(\theta)\,t + \frac{1}{2}\,g\,t^2\right)$$

NOTESE: Tanto la variable x y la variable y están en función de la variable t (tiempo), por tanto, podemos decir que el tiempo es un parámetro del movimiento tiro parabólico.

Lo anterior se describe matemáticamente de la siguiente manera:

$$x(t) = f(t) \quad ; \quad y(t) = g(t)$$

Expresan que tanto x como y dependen de un parámetro t

Al análisis anterior pongámosle datos y tracemos su gráfica entre otros datos más profundos.

Ejemplo 1

Una pelota se lanza desde el edificio del módulo G de Ingeniería CUNOC a una altura de 20 metros y a una velocidad inicial de $10\ {}^{m}/_{s}$ con un ángulo de 30° respecto a la horizontal.

a) Encuentre una ecuación paramétrica respecto al tiempo que describa la posición de la pelota.
b) Calcule el tiempo en que tarda en caer la pelota.
c) Encuentre la altura máxima que alcanza.
d) Trace la gráfica de la ecuación paramétrica del inciso a).

INCISO a)

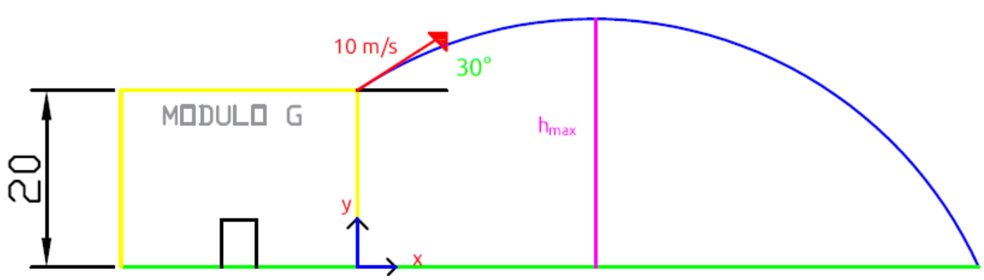
1. Comenzamos realizando el diagrama de lo descrito, así como resumiendo los datos.

$V_0 = 10\,{}^{m}/_{s}$

$\theta = 30°$

$h_0 = 20\ m$

$g = -9.8\ {}^{m}/_{s^2}$



2. Recordamos las fórmulas de tiro parabólico para x (MRU) y para y (MRUV)

$$x = V_0\cos(\theta) * t \qquad\qquad y = h_0 + V_0\ \text{sen}(\theta) * t\ + \frac{1}{2}g * t^2$$

3. Sustituimos los datos

$$x = 10 * \cos(30°) * t \qquad\qquad y = 20 + 10\ \text{sen}(30°) * t - \frac{1}{2} * 9.8 * t^2$$

$$x = 5\sqrt{3} * t \qquad\qquad y = 20 + 5\,t - 4.9 * t^2$$

4. La ecuación paramétrica será:

$$x = 5\sqrt{3} * \mathrm{t} \qquad ; \qquad y = 20 + 5\,\mathrm{t} - 4.9 * \mathrm{t}^2$$

INCISO b)

5. Analizando el plano cartesiano vemos que la pelota cae cuando $y = 0$

$$0 = 20 + 5\,\mathrm{t} - 4.9 * \mathrm{t}^2$$

5.1. Resolvemos la ecuación cuadrática

$$\mathrm{t} = 2.5939 \text{ segundos}$$

INCISO c)

6. Se alcanza la altura máxima cuando $\frac{dy}{dt} = 0$

$$y = 20 + 5\,\mathrm{t} - 4.9 * \mathrm{t}^2$$

$$\frac{dy}{dt} = 5 - 9.8 * \mathrm{t} = 0$$

$$5 - 9.8 * \mathrm{t} = 0 \quad \text{Despejando para t :} \quad \mathrm{t} = \frac{5}{9.8}$$

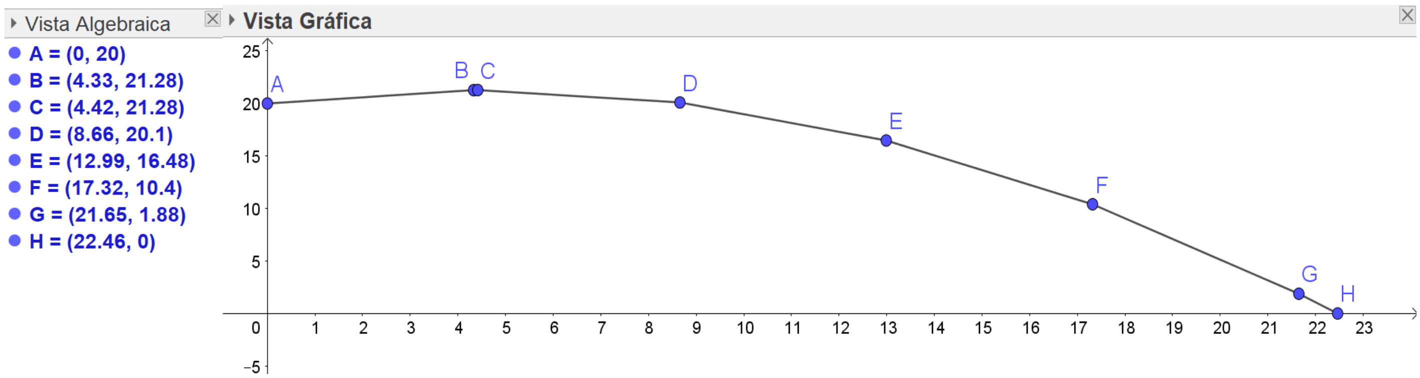
$$\mathrm{t} = 0.5102 \text{ segundos}$$

INCISO d)

7. Para trazar la gráfica de esta ecuación paramétrica debemos realizar la siguiente tabla:

Parámetro	Variable	Variable	
t	$x = 5\sqrt{3}\,t$	$y = 20 + 5t - 4.9t^2$	
0	0.000	20	
0.5	4.330	21.275	
0.5102	4.418	21.2755102	Inciso c) Altura máxima
1	8.660	20.1	
1.5	12.990	16.475	
2	17.321	10.4	
2.5	21.651	1.875	
2.5939	22.464	0	Inciso b) para punto De caida
3	25.981	-9.1	
3.5	30.311	-22.525	

Comenzamos a trazar en un plano cartesiano los puntos de x y de y. Recuerde que entre más puntos plotee más exacta será su gráfica y que las distancias negativas ya no existen en el problema.



Esta será la gráfica del tiro parabólico utilizando ploteo. Existe una segunda forma para la resolución de esta misma gráfica al utilizar la relación de funciones usando el parámetro t como puente entre x y y.

TRAZANDO LA ECUACIÓN PARAMÉTRICA RELACIONANDO VARIABLES

$$x = 5\sqrt{3}\,\mathrm{t} \quad \text{(Ecuación 1)} \qquad ; \qquad y = 20 + 5\,\mathrm{t} - 4.9\,\mathrm{t}^2 \quad \text{(Ecuación 2)}$$

8. Despejamos de la Ecuación 1 el valor de t

$$x = 5\sqrt{3}\,\mathrm{t}$$

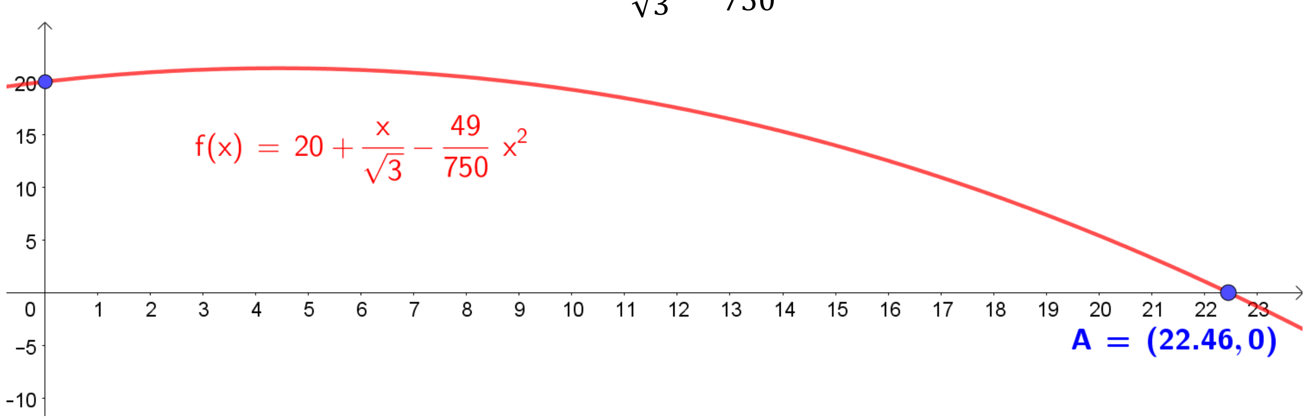
$$\mathbf{t} = \frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{5\sqrt{3}}} \quad \text{(Ecuación 3)}$$

9. Sustituyendo la Ecuación 3 en la Ecuación 2

$$y = 20 + 5\,\mathrm{t} - 4.9\,\mathrm{t}^2$$

$$y = 20 + 5\,\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{5\sqrt{3}}} - 4.9\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{5\sqrt{3}}}\right)^2$$

$$y = 20 + \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{49}{750}x^2$$



Esas dos formas son para trazar gráficas de ecuaciones paramétricas, ploteando o relacionando las variables.

Ejemplo 2

Bosqueje la curva ubicando puntos por medio de las ecuaciones paramétricas. Indique con una flecha la dirección en que se traza la curva cuando t crece.

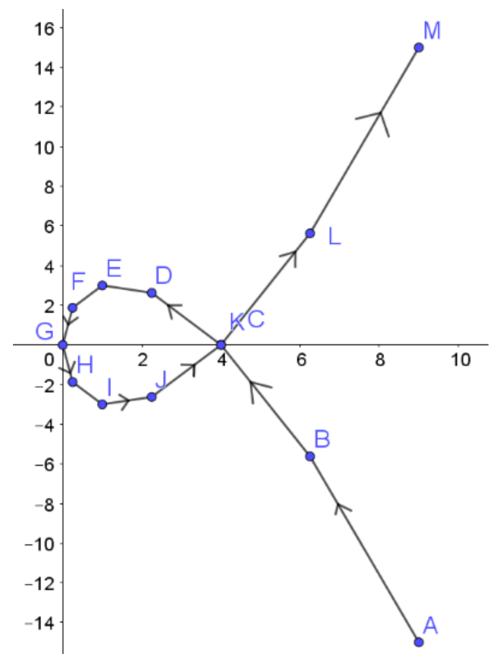
$$x = t^2 \quad , \quad y = t^3 - 4t \quad -3 \leq t \leq 3$$

1. Comenzamos realizando la tabla de ploteo. Note que en el problema me están dando el intervalo del parámetro y recuerde que entre más puntos se realicen más exacta será la gráfica.

t	$x = t^2$	$y = t^3 - 4t$	PUNTO
-3	9	-15	A
-2.5	6.25	-5.625	B
-2	4	0	C
-1.5	2.25	2.625	D
-1	1	3	E
-0.5	0.25	1.875	F
0	0	0	G
0.5	0.25	-1.875	H
1	1	-3	I
1.5	2.25	-2.625	J
2	4	0	K
2.5	6.25	5.625	L
3	9	15	M

2. Una vez ploteado los valores procedemos a ubicarlos en un plano cartesiano.

   NÓTESE: Que el problema solicita indicar con una flecha la dirección de la curva. Esto se hace uniendo los puntos en orden, o sea, una flecha irá de A a B (siguiendo el orden). Otra flecha unirá el punto B al punto C y así sucesivamente.



NOTA: Observe que si realizáramos la prueba de la recta vertical en el problema anterior no cumpliría con que es una función. Esa es otra de las ventajas de las ecuaciones paramétricas.

Ejemplo 3

a) Elimine el parámetro para hallar una ecuación cartesiana de la curva.

b) Bosqueje la curva e indique con una flecha la dirección en que se traza la curva cuando crece el parámetro.

$$x = e^{2t} \quad , \quad y = t + 1$$

1. Dejamos para el parámetro t en términos de la variable y

$$\boldsymbol{t = y - 1}$$

2. Sustituimos el despeje del paso 1. En la variable x

$$x = e^{2t} = e^{2(y-1)} = e^{2y-2}$$

3. Despejamos para y dejando la variable y en términos de x

$$x = e^{2y-2}$$

$$x = \frac{e^{2y}}{e^2}$$

$$e^2 x = e^{2y}$$

4. Aplicamos logaritmo

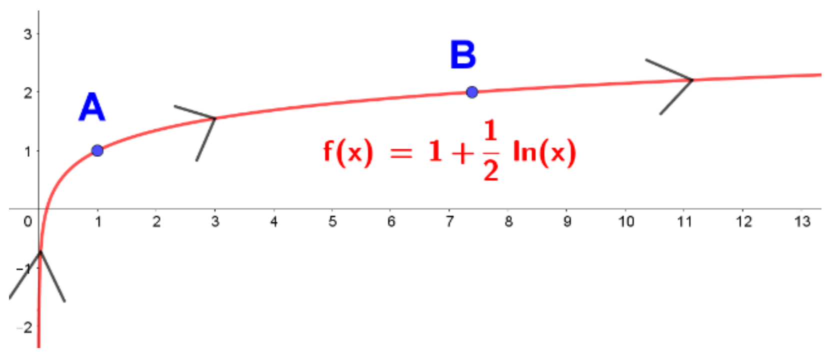
$$\ln(e^2 x) = \ln e^2 + \ln x = \ln(e^{2y}) = 2y \ln e = 2y$$

$$2 + \ln x = 2y$$

$$y = 1 + \frac{1}{2}\ln x$$

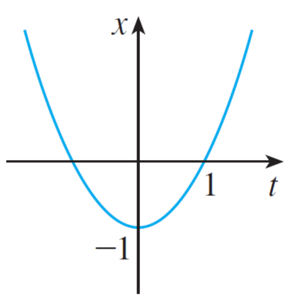
5. Para el inciso b) debemos analizar las flechas de dirección. Se debe llenar una tabla de datos para conocer el orden que toma la ecuación paramétrica. A continuación, trazamos la gráfica del inciso a) tomando en cuenta la tabla.

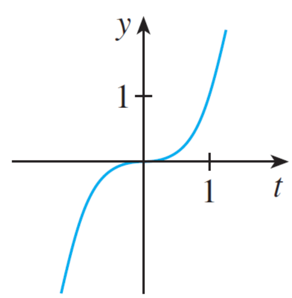
t	$x = e^{2t}$	$y = t + 1$	PUNTO
0	1	1	A
1	7.38905159	2	B
2	54.5980835	3	C
3	403.428056	4	D
4	2980.95072	5	E
5	22026.3987	6	F



Ejemplo 4

Use la gráfica de $x = f(t)$ y $y = g(t)$ para bosquejar la curva paramétrica $x = f(t), y = g(t)$. Indique con flechas la dirección en que se traza la curva cuando t crece.





1. Solamente nos piden un bosquejo, por tanto, no debemos realizar una gráfica exacta. Debe comprender que, según las gráficas, el plano cartesiano xy está cambiando en el eje x parabólicamente. Mientras que en el eje y el cambio se está dando cúbicamente.

2. Analicemos que pasa con x y con y cuando t es positiva.

2.1. Cuando t aumenta $[x = f(t)]$ x también lo hace cuadráticamente. Así mismo cuando t aumenta $[y = g(t)]$ y también lo hace solo que cúbicamente.

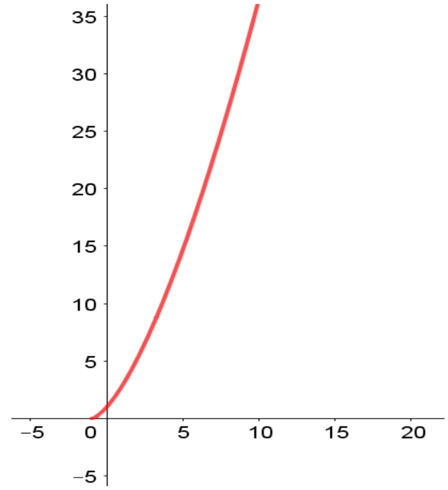
NOTA: Si y fuera cuadrática la gráfica sería lineal en el eje positivo

tabla 1	
t	$x = f(t)$
0	-1
1	0

tabla 2	
t	y= $g(t)$
0	0
1	1

tabla 3	
x	y
-1	0
0	1

De la tabla 1 y tabla 2 obtenemos la tabla 3. Estos datos son importantes para el trazo de este trayecto.



LA GRÁFICA DE LA DERECHA ES PARA t POSITIVO

3. Ahora vemos las gráficas cuando t sea menor a cero

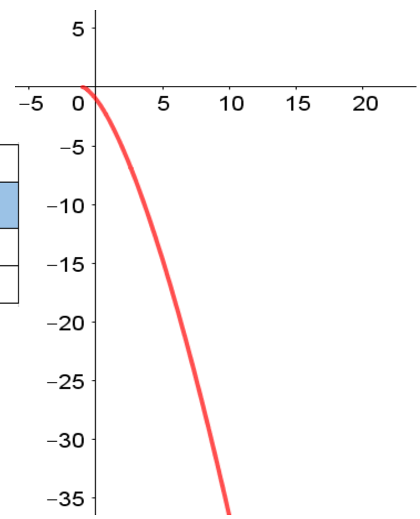
3.1. Cuando t es negativa x es positiva. Mientras que cuando t es negativa y es negativa

Nótese que x es cuadrática y y es cúbica.

tabla 4	
t	$x = f(t)$
0	-1
-1	0

tabla 5	
t	y= $g(t)$
0	0
-1	-1

tabla 6	
x	y
-1	0
0	-1



LA GRÁFICA DE LA DERECHA ES PARA t NEGATIVO

4. La gráfica será

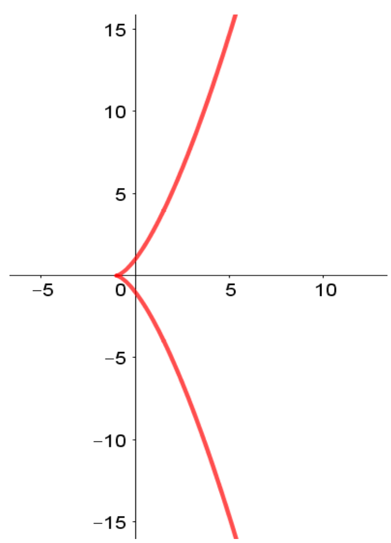
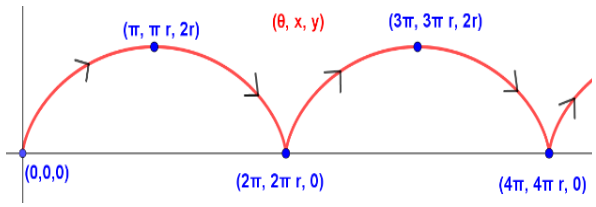
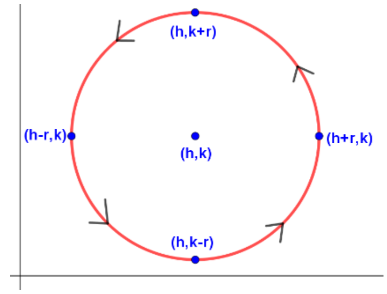
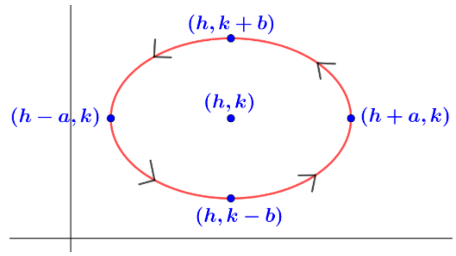
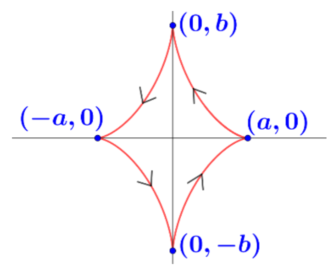
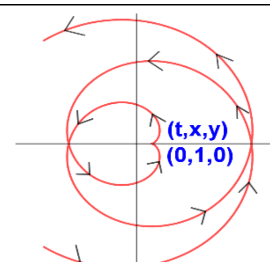
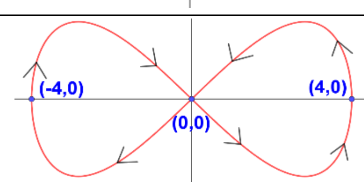
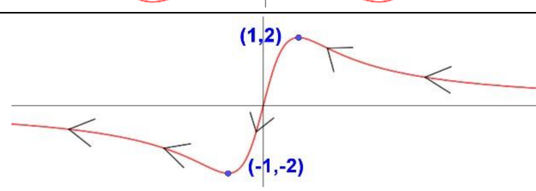


Tabla 3.1. a

No.	Nombre	Ecuación matemática	Geometría	Periodo
1	Cicloide	$x = r(\theta - sen\theta)$ $y = r(1 - cos\theta)$		$-\infty \leq \theta \leq \infty$
2	Círculo	$x = h + rcost$ $y = k + rsent$		$0 \leq t \leq 2\pi$
3	Elipse	$x = h + a\,cost$ $y = k + b\,sent$		$0 \leq t \leq 2\pi$
4	Astroide	$x = acos^3\theta$ $y = b\,sen^3\theta$		$0 \leq \theta \leq 2\pi$
5	Evolvente o Involuta de un círculo	$x = cost + t\,sent$ $y = sent - t\,cost$		$-\infty \leq t \leq \infty$
6	Curva de Lissajous	$x = 4\cos t$ $y = 2\,sen(2t)$		$0 \leq t \leq 2\pi$
7	Curva Serpentina	$x = \cot\theta$ $y = 4\,sen\theta * cos\theta$		$0 < t < 2\pi$ $t \neq 0, \pi, 2\pi$

3-APLICACIÓN DE ECUACIONES PARAMÉTRICAS

3.2. APLICACIÓN DE ECUACIONES PARAMÉTRICAS

A continuación, veremos las aplicaciones que tiene nuestro tema llamado Ecuaciones Paramétricas. Primero comenzaremos viendo el cálculo en dicho tema para luego ver las aplicaciones que este conlleva.

Las aplicaciones que veremos serán: área entre superficies, longitud de arco y área superficial. Además, veremos máximos y mínimos de las paramétricas, así como pendientes infinitas, por tanto, si a usted se le dificulta el tema derivadas o integrales, le sugiero repasar el capítulo 1 de este texto o repasar el **manual de Matemática Básica 2.**

En el mundo de la ingeniería este tema tiene mucho uso, como en el área estructural aplicado al tema círculo de Mohr en donde el parámetro es el ángulo de rotación y se relacionan esfuerzos cortantes y esfuerzos normales. En ingeniería civil se utiliza para trazar carreteras o también en trayectorias de montañas rusas, utilizando una gráfica llamada Clotoide así que como este libro es orientado a la ingeniería es muy importante su comprensión.

En la portada usted observa como una señorita acaricia al elefante para beneficio de ambos. Esto mismo es la representación de que al tema de paramétricas no hay que tenerle miedo y que estos temas están para apoyo y servicio de usted.

3.2.1. Tangentes

La derivada es la pendiente de la recta tangente en un punto cualesquiera. Existen puntos de la función donde no es derivable y por tanto eso es lo que usted debe analizar, donde es derivable una función.

1. La primera derivada (para análisis de pendientes) la describimos como:

$$m = \frac{dy}{dx}$$

2. Si multiplicamos por $\frac{1}{dt}$ dividimos por $\frac{1}{dt}$

$$m \;=\; \frac{dy}{dx} * \frac{\frac{1}{dt}}{\frac{1}{dt}} \;=\; \frac{\boldsymbol{\frac{dy}{dt}}}{\boldsymbol{\frac{dx}{dt}}}$$

3. Si tenemos una ecuación descrita por paramétrica por:

$$x = f(t) \qquad , \qquad y = g(t)$$

4. Entonces la derivamos x y derivamos y tendremos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{df(t)}{dt} \qquad , \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dg(t)}{dt}$$

5. Teniendo la fórmula para tangentes paramétricas.

$$\boxed{m = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{df(t)}{dt}}{\frac{dg(t)}{dt}}} \quad \textbf{Ecuación 4.1}$$

$*$ **Si se quiere encontrar el máximo o mínimo (tangente horizontal):** $\boldsymbol{\frac{dy}{dt} = 0}$

$*$ **Si se quiere encontrar el punto donde la curva tiene tangente vertical:** $\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = 0}$

SEGUNDA DERIVADA (Análisis de concavidades)

$$\frac{dm}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) * \frac{\frac{1}{dt}}{\frac{1}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}} \quad \textbf{Ecuación 4.2}$$

Ejemplo 1

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente al valor del parámetro dado.

$$x = \theta cos\theta \quad , \quad y = \theta sen\theta \quad ; \quad \theta = \pi$$

1. El parámetro es θ. Una vez identificado el parámetro procedemos a derivar x y y respecto a θ.

$$x = \theta\ cos\theta \quad , \quad y = \theta\ sen\theta$$

   1.1. Observe que se debe derivar por regla del producto.

$$\frac{dx}{d\theta} = cos\theta - \theta\ sen\theta \quad ; \quad \frac{dy}{d\theta} = sen\theta + \theta\ cos\theta$$

2. Utilizamos la Ecuación 4.1

$$m = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{sen\theta + \theta\ cos\theta}{cos\theta - \theta\ sen\theta}$$

3. Evaluamos el valor del parámetro que nos dan en el problema.

$$m = \frac{sen\theta + \theta\ cos\theta}{cos\theta - \theta\ sen\theta} = \frac{sen(\pi) + \pi * cos(\pi)}{cos(\pi) - \pi\ sen(\pi)} = \frac{-\pi}{-1} = \pi$$

4. Recordamos que la ecuación de una recta es:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

5. Para encontrar los valores (x_0, y_0) evaluamos en las ecuaciones originales.

$$x = \theta cos\theta \quad , \quad y = \theta sen\theta$$

$$x = \pi * cos\pi \quad , \quad y = \pi * sen\pi$$

$$x = -\pi \quad ; \quad y = 0$$

$$(x_0, y_0) = (-\pi, 0)$$

6. Sustituyendo los datos en la ecuación del paso 4.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 0 = \pi * (x - (-\pi))$$

$$y = \pi\, x + \pi^2$$

Ejemplo 2

Encuentre $dy/_{dx}$ y $d^2y/_{dx^2}$. ¿Para cuáles valores de t la curva es cóncava hacia arriba?

$$x = e^t \quad , \quad y = te^{-t}$$

1. Derivamos x y y respecto t

$$\frac{dx}{dt} = e^t \qquad \frac{dy}{dt} = e^{-t} - te^{-t} = e^{-t}\,(1 - t)$$

2. Los resultados del paso 1, los sustituimos en la Ecuación 4.1

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\boldsymbol{\frac{dy}{dt}}}{\boldsymbol{\frac{dx}{dt}}} = \frac{\boldsymbol{e^{-t}(1-t)}}{\boldsymbol{e^{t}}} = \frac{(1-t)}{e^{2t}} = e^{-2t}(1-t)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-2t}(1-t)$$

3. Ahora encontraremos la segunda derivada, por tanto, analizamos la Ecuación 4.2

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}}{\boldsymbol{\frac{dx}{dt}}}$$

4. Derivamos ${}^{dy}/_{dt}$ respecto a t

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{d}{dt}[e^{-2t}(1-t)] = -2e^{-2t}(1-t) - e^{-2t} = \boldsymbol{e^{-2t}(2t-3)}$$

5. Sustituimos los resultados en el paso 3.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\boldsymbol{e^{-2t}(2t-3)}}{\boldsymbol{e^{t}}} = \frac{1}{e^{3t}}(2t-3)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-3t}(2t-3)$$

6. Para saber los valores donde la curva tiene concavidad positiva, se iguala a cero la segunda derivada para encontrar valores críticos

$$e^{-3t}e^{-3t}(2t-3) = 0$$

$$2t - 3 = 0$$

$$t = {}^{3}/_{2}$$

7. Procedemos a realizar la siguiente tabla para el análisis de desigualdades.

$\boldsymbol{t}$	$(-\infty, {}^{3}/_{2})$	$({}^{3}/_{2}, \infty)$
$\boldsymbol{e^{-3t}(2t-3)}$	**-**	**+**

8. Por tanto, la concavidad es positiva a partir de que el parámetro es:

$$t > \frac{3}{2}$$

Ejemplo 3

Encuentre los puntos sobre la curva donde la recta tangente es horizontal o vertical. Si dispone de un dispositivo de graficación, grafique la curva para verificar su trabajo.

$$x = \cos\theta \qquad ; \qquad y = cos(3\theta)$$

1. Se deriva x y y respecto a θ

$$\frac{dx}{d\theta} = -sen\theta \qquad ; \qquad \frac{dy}{d\theta} = -3\ sen(3\theta)$$

2. Planteamos la pendiente de la recta tangente utilizando la Ecuación 4.1

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{-3\ sen(3\theta)}{-sen\theta} = \frac{3\ sen(3\theta)}{sen\theta}$$

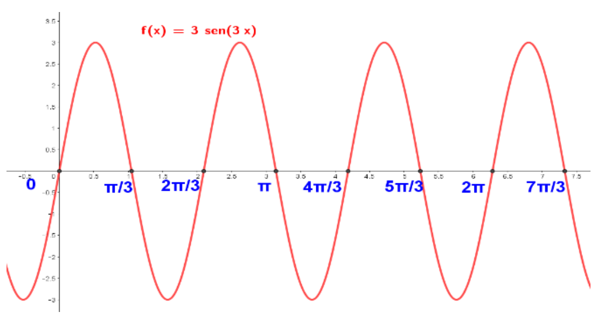
3. Para encontrar los puntos donde la curva tiene rectas tangentes horizontales, debemos igualar m a cero.

$$\frac{3\ sen(3\theta)}{sen\theta} = 0 \qquad => \qquad 3\ sen(3\theta) = 0$$

$$sen(3\theta) = 0$$

$$\theta = \frac{sen^{-1}0}{3} \quad \text{sabiendo que:} \quad sen(0) = 0 \ \text{ y } \ sen(\pi) = 0 \quad \text{por tanto:} \quad \theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{y} \quad \theta = 0$$

4. Trazamos la gráfica



5. Como la función seno se hace cero a cada periodo, analizamos la gráfica para determinar puntos donde la recta tangente es cero:

$$\theta = \frac{\pi}{3}n \qquad ; \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$$

6. **ENCONTRANDO LAS RECTAS TANGENTES VERTICALES (CUANDO $^{dx}/_{d\theta} = 0$)**

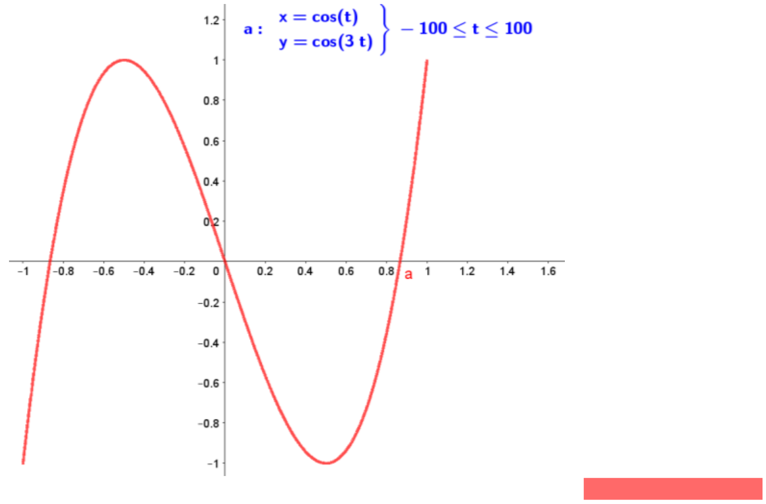
$$sen\theta = 0$$

7. Eso se produce cuando: $\theta = 0 \quad y \quad \theta = 2\pi$
8. La solución general será:

$$\theta = \pi\, k \qquad ; \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$$

9. La gráfica la ingresamos en el software Geogebra 5.

	θ	$x = \cos(\theta)$	$y = \cos(3\theta)$
0	0	1	1
$\pi/6$	0.523598775	0.87	0.00
$\pi/3$	1.04719755	0.50	-1.00
$\pi/2$	1.570796325	0.00	0.00
$2\pi/3$	4.712388975	0.00	0.00
$5\pi/6$	2.617993875	-0.87	0.00
π	3.14159265	-1.00	-1.00
$7\pi/6$	3.665191425	-0.87	0.00
$4\pi/3$	4.1887902	-0.50	1.00
$3\pi/2$	4.712388975	0.00	0.00
$5\pi/3$	5.23598775	0.50	-1.00
$11\pi/6$	5.759586525	0.87	0.00
2π	6.2831853	1.00	1.00
$13\pi/6$	6.806784075	0.87	0.00
$7\pi/3$	7.33038285	0.50	-1.00
$5\pi/2$	7.853981625	0.00	0.00
$8\pi/3$	8.3775804	-0.50	1.00
$17\pi/6$	8.901179175	-0.87	0.00
3π	9.42477795	-1.00	-1.00

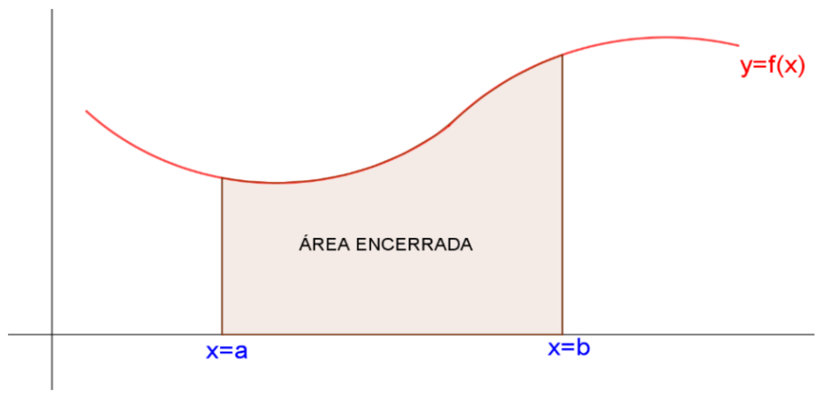


3.2.2. Áreas Entre Curvas

En el curso introducción al Cálculo se aprendió a armar el diferencial de un área, para luego integrarlo.

$$\mathrm{A}_{\text{encerrada}} = \int_{a}^{b} y\, dx$$

Ecuación 4.3



1. Recuerde que

$$x = f(t) \quad , \quad \boldsymbol{y = g(t)}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{df(t)}{dt} \quad , \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dg(t)}{dt}$$

$$\boldsymbol{dx = f'(t) * dt} \quad , \quad \boldsymbol{\frac{dy}{dt} = \frac{dg(t)}{dt}}$$

2. Sustituyendo en la Ecuación 4.3

$$\mathrm{A}_{\text{encerrada}} = \int_{a}^{b} y\, dx$$

$$\mathrm{A}_{\text{encerrada}} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{g(t)} * \boldsymbol{f'(t)\, dt}$$

$$\boxed{\mathrm{A}_{\text{encerrada}} = \int_{t_1}^{t_2} g(t) * f'(t)\, dt} \qquad \textbf{Ecuación 4.4}$$

Ejemplo 1

Encuentre el área encerrada por el eje x y la curva $x = 1 + e^{-t}$ y $y = t - t^2$.

1. El eje x nos sirve para encontrar los límites de integración. Como el eje x corta la gráfica comprendemos que eso sucede cuando $y = 0$

$$y = t - t^2$$
$$0 = t - t^2 \qquad \text{factorizando:} \qquad 0 = t(1 - t)$$
$$t = 0 \quad ; \quad t = 1$$

2. Para identificar t_1 y t_2 debemos evaluar las soluciones de la ecuación del paso 1.

$$x(0) = 2 \qquad x(1) = 1.3678794$$
$$t_1 = 1 \text{ (la que me da la } x \text{ más pequeña)} \qquad t_2 = 0 \text{ (me da la } x \text{ mas grande)}$$

recuerde que se integra de izquierda a derecha

3. Derivamos x respecto a t

$$x = 1 + e^{-t}$$
$$\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{f'(t) = -e^{-t}}$$

3. Sustituyendo los datos en la Ecuación 4.4

$$\mathrm{A_{encerrada}} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{g(t)} * \boldsymbol{f'(t)}\, dt$$
$$\mathrm{A_{encerrada}} = \int_{1}^{0} (\boldsymbol{t - t^2}) * \boldsymbol{-e^{-t}}\, dt = \int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} \boldsymbol{t^2e^{-t} - te^{-t}\, dt}$$

4. Integrando por aparte y por el método por partes

$$\int t^2 e^{-t}\, dt$$

$$\text{Según Alpes:} \quad \boldsymbol{u = t^2} \qquad \boldsymbol{dv = e^{-t}\, dt}$$
$$\boldsymbol{du = 2t\, dt} \qquad \mathbf{v} = \int e^{-t}\, dt = \boldsymbol{-e^{-t}}$$

4.1. Sustituyendo los datos en la fórmula

$$\int u dv = uv - \int v du$$
$$\int \boldsymbol{t^2 e^{-t}\, dt} = \boldsymbol{t^2 - e^{-t}} - \int \boldsymbol{-e^{-t}} * \boldsymbol{2t\, dt} = -t^2e^{-t} + 2\int t\, e^{-t}\, dt$$

4.2. Integrando por aparte nuevamente:

$$\int t\, e^{-t}\, dt$$

$$\text{Según la palabra Alpes:} \quad \boldsymbol{u = t} \qquad \boldsymbol{dv = e^{-t}\, dt}$$
$$\boldsymbol{du = dt} \qquad \mathbf{v} = \int e^{-t}\, dt = \boldsymbol{-e^{-t}}$$

4.3. Sustituyendo los datos en la fórmula

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int t\, e^{-t}\, dt \;=\; t\, -e^{-t} - \int -e^{-t}\, dt \;=\; -t\, e^{-t} + \int e^{-t}\, dt \;=\; -t\, e^{-t} - e^{-t}$$

4.4. Uniendo la integral

$$\int t^2 e^{-t}\, dt \;=\; -t^2 e^{-t} + 2\int t\, e^{-t}\, dt \;=\; -t^2 e^{-t} - 2\, t\, e^{-t} - 2\, e^{-t}$$

5. Retornando a la integral inicial

$$\int \boldsymbol{t^2 e^{-t} - te^{-t}\, dt} \;=\; -t^2 e^{-t} - 2\, t\, e^{-t} - 2\, e^{-t} - (-t\, e^{-t} - e^{-t})$$

$$\int \boldsymbol{t^2 e^{-t} - te^{-t}\, dt} \;=\; -t^2 e^{-t} - 2\, t\, e^{-t} - 2\, e^{-t} + t\, e^{-t} + e^{-t} \;=\; \boldsymbol{-t^2 e^{-t} - t\, e^{-t} - e^{-t}}$$

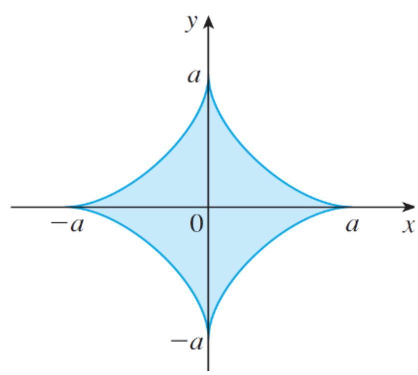
6. Evaluando la integral

$$\int_1^0 t^2 e^{-t} - te^{-t}\, dt \;=\; -t^2 e^{-t} - t\, e^{-t} - e^{-t} \Big|_1^0 \;=\; -1 - (-e^{-1} - e^{-1} - e^{-1}) = 3e^{-1} - 1$$

$$\mathrm{A}_{\text{encerrada}} = 3e^{-1} \;-\; 1 = 0.10364\, u^2$$

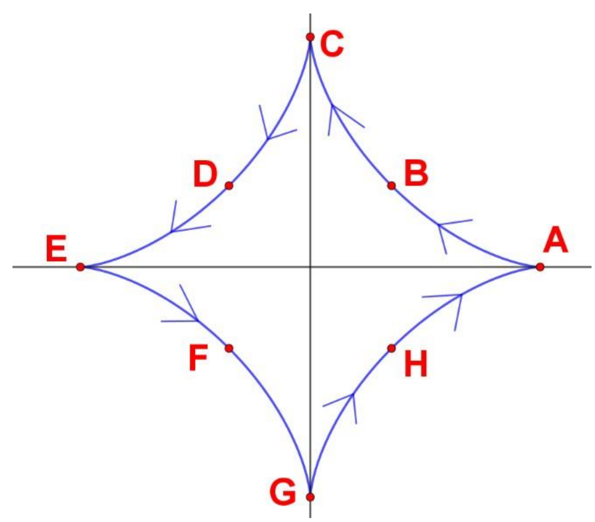
Ejemplo 2

Encuentre el área de la región encerrada por el astroide $x = a\, cos^3\theta$, $y = asen^3\theta$.



1. Identificamos la dirección de la paramétrica. Para ello ploteamos una tabla y trazamos una gráfica aproximada.

θ	$x = acos^3\theta$	y= $asen^3\theta$	PUNTO
0	a	0	A
$\pi/4$	$0.353553a$	$0.353553a$	B
$\pi/2$	0	a	C
$3\pi/4$	$-0.353553a$	$0.353553a$	D
π	$-a$	0	E
$5\pi/4$	$-0.353553a$	$-0.353553a$	F
$3\pi/2$	0	$-a$	G
$7\pi/4$	$0.353553a$	$-0.353553a$	H
2π	a	0	I



2. Identificamos t_1 y t_2

Como en x se integra de izquierda a derecha y el área es simétrica respecto a los ejes decimos:

$$\text{cuando } x = 0 \quad \theta = {}^{\pi}/_{2} \quad (\text{punto C}) \quad ; \quad \text{cuando } x = a \quad \theta = 0 \quad (\text{punto A})$$

$$\theta_1 = {}^{\pi}/_{2} \quad \text{y} \quad \theta_2 = 0$$

3. Procedemos a derivar el valor de x

$$x = a\,cos^3\theta \qquad\qquad \boldsymbol{g(\theta) = y = a\,sen^3\theta}$$

$$\boldsymbol{f'(\theta) = \frac{dx}{d\theta} = 3a * cos^2\theta * -sen\theta}$$

4. Sustituimos los datos en la Ecuación 4.4 y como es simétrica se multiplica la integral por 4.

$$\mathrm{A_{encerrada}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \boldsymbol{g(\theta)} * \boldsymbol{f'(\theta)}\, d\theta$$

$$\mathrm{A_{encerrada}} = \boldsymbol{4} * \int_{\pi/2}^{0} \boldsymbol{a\,sen^3\theta} * \boldsymbol{3a * cos^2\theta * -sen\theta}\, d\theta \;=\; -12a^2 \int_{\pi/2}^{0} sen^4\theta * cos^2\theta\, d\theta$$

$$\mathrm{A_{encerrada}} = 12a^2 \int_{0}^{\pi/2} sen^4\theta * cos^2\theta\, d\theta$$

5. Resolviendo la integral

para ello se utiliza las identidades: $cos^2\theta = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\theta)]$; $sen^2\theta = 1 - cos^2\theta$

$$\int_0^{\pi/2} \boldsymbol{sen^4\theta} * cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} (\boldsymbol{1 - cos^2\theta})^{\boldsymbol{2}} * cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} (1 - 2cos^2\theta + cos^4\theta) * cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} cos^2\theta - 2cos^4\theta + cos^6\theta\, d\theta \;=\; \underbrace{\int_0^{\pi/2} cos^2\theta\, d\theta}_{♥} - 2\underbrace{\int_0^{\pi/2} cos^4\theta\, d\theta}_{▲} + \underbrace{\int_0^{\pi/2} cos^6\theta\, d\theta}_{☾}$$

5.1. Resolviendo la integral 1 ♥

$$\int_0^{\pi/2} cos^2\theta\, d\theta \;=\; \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1 + cos(2\theta)\, d\theta \;=\; \frac{1}{2}\theta + \frac{sen(2\theta)}{4} \;=\; \frac{\pi}{4} - 0 \;=\; \frac{\pi}{4}$$

5.2. Resolviendo la integral 2 ▲

$$\int_0^{\pi/2} cos^4\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} (\boldsymbol{cos^2\theta})^2\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \left\{\boldsymbol{\frac{1}{2}[1 + cos(2\theta)]}\right\}^2 = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} 1 + 2\,cos(2\theta) + cos^2(2\theta)\; d\theta$$

5.2.1. Resolviendo la integral

$$\int_0^{\pi/2} cos^2(2\theta)\, d\theta \;=\; \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1 + cos(4\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{sen(4\theta)}{8} = \frac{\pi}{4} \qquad \textbf{ver tabla 1.2 a}$$

5.2.2. Regresando a la integral

$$\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} 1 + 2\,cos(2\theta) + cos^2(2\theta)\; d\theta \;=\; \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{4}sen(2\theta) + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{sen(4\theta)}{8}\right] = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} = \frac{3\pi}{16}$$

5.3. Resolviendo la integral 3

$$\int_0^{\pi/2} cos^6\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} (\boldsymbol{cos^2\theta})^3 d\theta = \int_0^{\pi/2} \left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[\mathbf{1} + \boldsymbol{cos}(\mathbf{2}\boldsymbol{\theta})]\right\}^3 d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} [\mathbf{1} + \boldsymbol{cos}(\mathbf{2}\boldsymbol{\theta})]^3\, d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} 1 + 3cos(2\theta) + 3cos^2(2\theta) + cos^3(2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\theta \;+\; \frac{1}{8} * \frac{3}{2} * sen(2\theta) \;+\; \frac{1}{8} * 3 * \left(\frac{1}{2}\theta + \frac{sen(4\theta)}{8}\right) \;+\; \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} cos^3(2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{16} + \frac{3}{8}\left[\frac{\pi}{4}\right] \;+\; \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} cos^3(2\theta)\, d\theta \quad = \quad \frac{5\pi}{32} + \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} cos^3(2\theta)\, d\theta$$

5.3.1. Resolviendo por aparte la integral

$$\int_0^{\pi/2} cos^3(2\theta)\, d\theta$$

5.3.1.1. Se realiza una sustitución

$$\boldsymbol{u = 2\theta} \quad \text{derivando} \quad \frac{du}{d\theta} = 2 \quad \text{por tanto} \quad \frac{\boldsymbol{du}}{\mathbf{2}} = \boldsymbol{d\theta}$$

5.3.1.2. Realizando la sustitución

$$\int_0^{\pi/2} cos^3(\mathbf{2}\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{d\theta} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\int_0^{\pi} cos^3(\boldsymbol{u})\, \boldsymbol{du} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} cos(u) * cos^2(u)\, du = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} cos(u)[1 - sen^2(u)]\, du$$

5.3.1.3. Se realiza una sustitución nueva

$$\boldsymbol{m = sen(u)} \quad \text{derivando} \quad \frac{dm}{du} = cos(u) \quad \text{por tanto:} \quad \frac{\boldsymbol{dm}}{\boldsymbol{cos(u)}} = \boldsymbol{du}$$

5.3.1.4. Sustituyendo

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} cos(u)[1 - \boldsymbol{sen}^2(\boldsymbol{u})]\; \boldsymbol{du} \;=\; \frac{1}{2}\int_0^{0} cos(u)[1 - m^2]\; \frac{\boldsymbol{dm}}{\boldsymbol{cos(u)}} \;=\; \frac{1}{2}\int_0^{0} 1 - m^2\, dm$$

5.3.2. La integral 3 evaluada será:

$$\frac{5\pi}{32} \;+\; \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} cos^3(2\theta)\, d\theta \quad = \quad \frac{5\pi}{32} + 0 \quad = \quad \frac{5\pi}{32}$$

5.4. Retornando A toda la integral

$$\int_0^{\pi/2} cos^2\theta\, d\theta \;-\; 2\int_0^{\pi/2} cos^4\theta\, d\theta \;+\; \int_0^{\pi/2} cos^6\theta\, d\theta \quad = \quad \frac{\pi}{4} - 2 * \frac{3\pi}{16} + \frac{5\pi}{32} \quad = \quad \frac{\pi}{32}$$

6. El área encerrada será:

$$A_{\text{encerrada}} = 12a^2\int_0^{\pi/2} sen^4\theta * cos^2\theta\, d\theta \quad = 12a^2 * \frac{\pi}{32} \quad = \quad 3a^2 * \frac{\pi}{8}$$

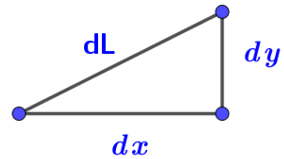
$$A_{\text{encerrada}} = \frac{3\,\pi}{8}a^2$$

3.2.3. Longitud de arco

En la sección 1.6 Se analizó y comprendió el tema de Longitud de arco para funciones expresadas de forma $y = f(x)$ o $x = g(y)$.

Ahora veremos la longitud de arco para una ecuación paramétrica.

¿De dónde se obtiene la fórmula?



1. Partimos del diferencial planteado en la sección 1.6

$$dL^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

2. Dividimos todo dentro del diferencial de t al cuadrado $(dt)^2$

$$\frac{dL^2}{dt^2} = \frac{(dx)^2}{dt^2} + \frac{(dy)^2}{dt^2}$$

$$\frac{dL^2}{(dt)^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$dL^2 = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] * dt^2$$

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ \ dt$$

3. Integrando

$$\boxed{L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ \ dt} \quad \textbf{Ecuación 4.3}$$

Ejemplo 1

Encuentre la longitud exacta de la curva: $x = t\ sen\ t$, $y = t\ cos\ t$ $\quad 0 \leq t \leq 1$

1. Derivamos x y y respecto a t

$$\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = sen\ t + t\ cos\ t} \quad ; \quad \boldsymbol{\frac{dy}{dt} = cos\ t - t\ sen\ t}$$

2. Sustituimos los datos en la Ecuación 4.3. Nótese que ya tenemos los límites de integración.

$$L = \int_0^1 \sqrt{(\boldsymbol{sen\ t + t\ cos\ t})^2 + (\boldsymbol{cos\ t - t\ sen\ t})^2}\ \ dt$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{sen^2 t + 2t\cos t\ \ sen\ t + \ t^2 cos^2 t + cos^2 t - 2t\ cos\ t\ sen\ t + t^2 sen^2 t}\ \ dt$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{sen^2 t + \ t^2 cos^2 t + cos^2 t + t^2 sen^2 t}\ \ dt$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \ t^2 cos^2 t + t^2 sen^2 t}\ \ dt = \int_0^1 \sqrt{1 + \ t^2}\ \ dt$$

3. Resolvemos la integral por el método de sustitución trigonométrica

$$t = \tan\theta \qquad \text{derivando:} \quad \frac{dt}{d\theta} = sec^2\theta \qquad \text{por tanto:} \quad dt = sec^2\theta\, d\theta$$

$$\text{cuando } t = 0 \;\; ; \;\; \theta = 0 \qquad \text{y cuando} \qquad t = 1 \;\; ; \;\; \theta = \pi/4$$

4. Sustituyendo los datos

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, dt = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2\theta}\; sec^2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \sqrt{sec^2\theta}\; sec^2\theta\, d\theta$$

$$L = \int_0^{\pi/4} sec^3\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/4} sec\theta * sec^2\theta\, d\theta$$

5. Se resuelve la integral por partes

$$u = sec\theta \qquad dv = sec^2\theta\, d\theta$$

$$du = sec\theta * \tan\theta\, d\theta \qquad v = \int sec^2\theta\, d\theta = tan\theta$$

$$\int u dv = uv - \int v\, du$$

$$\int sec^2\theta * sec\theta\, d\theta = sec\theta * tan\theta - \int tan\theta * sec\theta * \tan\theta\, d\theta$$

$$\int sec^2\theta * sec\theta\, d\theta = sec\theta * tan\theta - \int sec\theta * tan^2\theta\, d\theta$$

6. Realizamos el siguiente cambio a través de identidades trigonométricas.

$$\int sec^2\theta * sec\theta\, d\theta = sec\theta * tan\theta - \int sec\theta * tan^2\theta\, d\theta$$

$$\int sec^2\theta * sec\theta\, d\theta = sec\theta * tan\theta - \int sec\theta * (sec^2\theta - 1)\, d\theta$$

$$\int sec^2\theta * sec\theta\, d\theta = sec\theta * tan\theta - \int \mathbf{sec^3\theta\, d\theta} + \int sec\theta\, d\theta$$

7. Despejamos para secante al cubo.

$$2\int sec^3\theta\, d\theta = sec\theta * tan\theta + \int sec\theta\, d\theta$$

$$2\int sec^3\theta\, d\theta = sec\theta * tan\theta + \ln(sec\theta + tan\theta)$$

$$\int sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\, sec\theta * tan\theta + \frac{1}{2}\ln(sec\theta + tan\theta)$$

8. Regresando a la evaluación de la integral

$$\int_0^{\pi/4} sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\, sec\theta * tan\theta + \frac{1}{2}\ln(sec\theta + tan\theta)\,\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

9. La respuesta será:

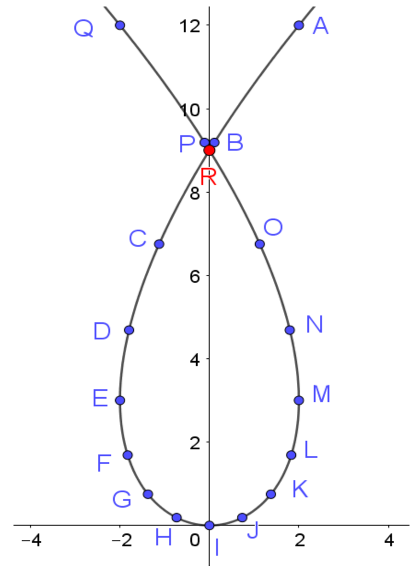
$$L = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right) = 1.1478$$

Ejemplo 2

Encuentre la longitud del bucle de la curva $x = 3t - t^3 \quad ; \; y = 3t^2$

1. Trazamos la gráfica de dicha ecuación paramétrica

t	$x = 3t - t^3$	$y = 3t^2$	PUNTO
-2	2	12	A
-1.75	0.109375	9.1875	B
-1.5	-1.125	6.75	C
-1.25	-1.796875	4.6875	D
-1	-2	3	E
-0.75	-1.828125	1.6875	F
-0.5	-1.375	0.75	G
-0.25	-0.734375	0.1875	H
0	0	0	I
0.25	0.734375	0.1875	J
0.5	1.375	0.75	K
0.75	1.828125	1.6875	L
1	2	3	M
1.25	1.796875	4.6875	N
1.5	1.125	6.75	O
1.75	-0.109375	9.1875	P
2	-2	12	Q



2. Para encontrar el punto R hacemos x cero

$$x = 3t - t^3 = 0 \qquad y = 3t^2$$

$$0 = 3 - t^2 \qquad y = 3 * \left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$\pm\sqrt{3} = t \qquad y = 9 \qquad \mathrm{R}(0{,}9)$$

3. Derivamos x y y respecto al parámetro t

$$\frac{dx}{dt} = 3 - 3t^2 \qquad \frac{dy}{dt} = 6t \qquad \text{Esto lo sustituimos en la ecuación 4.3}$$

4. Sustituimos

$$\mathrm{L} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$\mathrm{L} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(3 - 3t^2)^2 + (6t)^2}\, dt \; = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{9 - 18t^2 + 9t^4 + 36t^2}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{9t^4 + 18t^2 + 9}\, dt$$

5. Podemos factorizar

$$\mathrm{L} \; = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{9t^4 + 18t^2 + 9}\, dt \; = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(3t^2 + 3)^2}\, dt \; = \int_{t_1}^{t_2} 3t^2 + 3\, dt = t^3 + 3t \Bigg|_{t_1}^{t_2}$$

6. La longitud general del bucle será:

$$\mathrm{L} = {t_2}^3 + 3t_2 - {t_1}^3 - 3t_1$$

7. Encontramos la longitud del punto que encierra el punto R

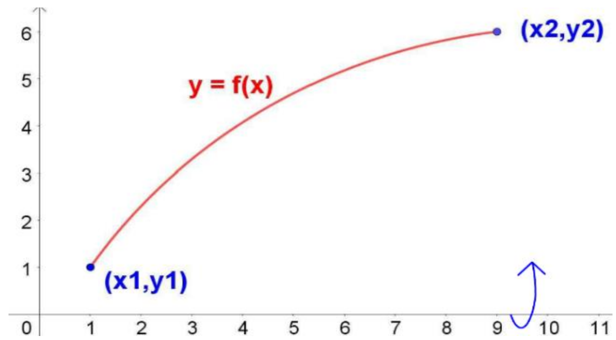
$$t_1 = -\sqrt{3} \;\; (\text{Punto R1}) \quad ; \quad t_2 = \sqrt{3} \; (\text{Punto R2}) \;\; \text{que salen de la ecuación paso 2.}$$

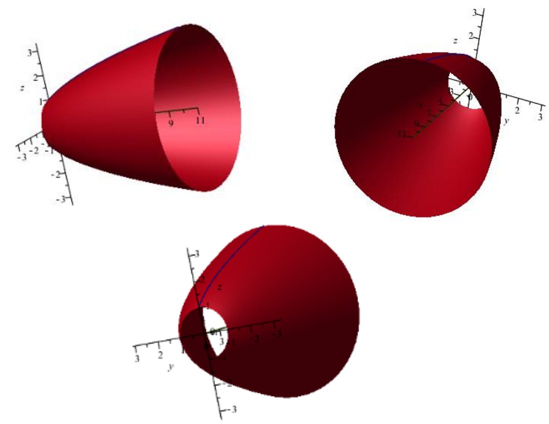
$$\mathrm{L} = {t_2}^3 + 3t_2 - {t_1}^3 - 3t_1 \; = \; \left(\sqrt{3}\right)^3 + 3\left(\sqrt{3}\right) - \left(-\sqrt{3}\right)^3 - 3\left(-\sqrt{3}\right) \; = \; 20.7846$$

$$\mathrm{L} = 20.7846 \text{ unidades}$$

3.2.4. Área de una superficie a través de rotación

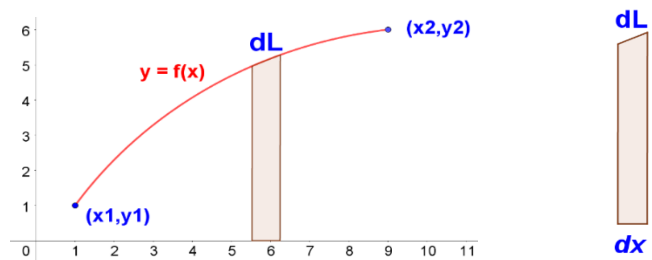
En la sección 1.7 analizamos y estudiamos el tema de área de una superficie. Recuerde que se dijo que esa área era el área superficial que genera una función al rotar respecto a un eje.



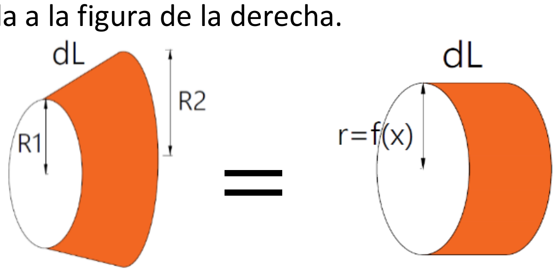


¿De dónde se obtienen las fórmulas?

1. Con este convenio se llegó al análisis donde ingresamos un diferencial de la siguiente manera:



2. Cuando el diferencial rote respecto a x formará la siguiente figura aproximada. Esta figura (la de la izquierda) se iguala a la figura de la derecha.



3. Analicemos el diferencial del lado derecho. Para sacar el área superficial de color decimos lo siguiente:

$$dA_s = 2\pi * \textbf{radio} * \textbf{espesor} = 2\pi\, \boldsymbol{y}\, \boldsymbol{dL}$$

4. Recuerde que

$$x = f(t) \quad \text{y} \quad y = g(t)$$

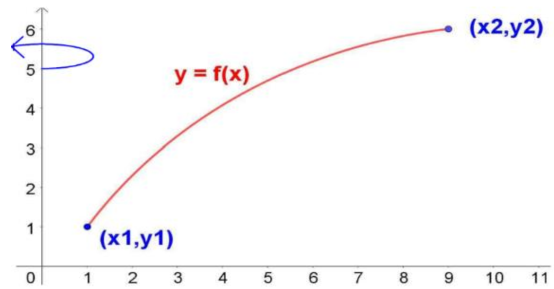
5. Entonces pasando a paramétrica

$$dA_s = 2\pi\, \boldsymbol{g(t)} * \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}}\right)^2}\, \boldsymbol{dt}$$

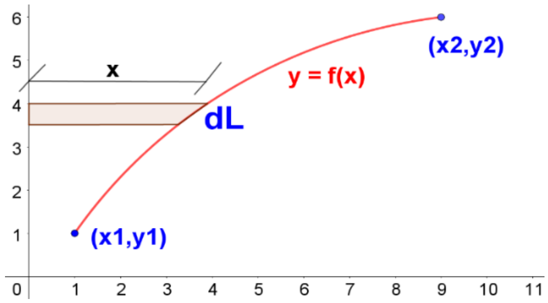
$$\boxed{A_s = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} g(t) * \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \quad x} \qquad \textbf{Ecuación 4.4}$$

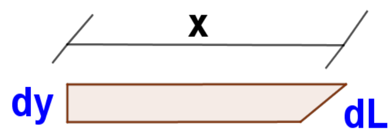
ROTACIÓN RESPECTO A y

1. Si tenemos la siguiente función y rota respecto a y

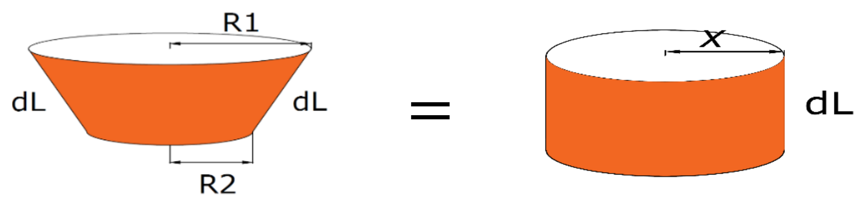


2. Ingresando el diferencial será:





3. Planteando el diferencial:



4. Analicemos el diferencial del lado derecho. Para sacar el área superficial de color decimos lo siguiente:

$$dA_s = 2\pi * \textbf{radio} * \text{espesor} \quad = \quad 2\pi\, \boldsymbol{x}\, \text{dL}$$

5. Recuerde que

$$x = f(t) \quad \text{y} \quad y = g(t)$$

6. Pasando todo a paramétrica

$$dA_s = 2\pi\, \boldsymbol{f(t)} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$\boxed{A_s = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} f(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad y}$$ **Ecuación 4.5**

Ejemplo 1

Encuentre el área exacta de la superficie obtenida al rotar la curva dada en torno al eje x.

$$x = t^3 \quad ; \quad y = t^2 \qquad 0 \le t \le 1$$

1. No es necesaria la gráfica puesto que nos dan los límites de integración. Derivamos respecto a t

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 \qquad \frac{dy}{dt} = 2t \qquad \text{viendo que: } \boldsymbol{g(t) = t^2}$$

2. Procedemos a armar la integral utilizando la Ecuación 4.4.

$$A_s = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{g(t)} * \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}}\right)^2}\, dt$$

$$A_s = 2\pi \int_0^1 \boldsymbol{t^2} * \sqrt{(\boldsymbol{3t^2})^2 + (\boldsymbol{2t})^2}dt = 2\pi \int_0^1 t^2 \sqrt{9t^4 + 4t^2}dt = 2\pi \int_0^1 t^2\sqrt{t^2[9t^2+4]}\, dt$$

$$A_s = 2\pi \int_0^1 t^3\sqrt{9t^2+4}\, dt$$

3. Se realiza una sustitución

$$\boldsymbol{u = 9t^2 + 4} \quad => \quad \frac{\boldsymbol{u-4}}{\boldsymbol{9}} = \boldsymbol{t^2} \qquad \text{derivando: } \frac{du}{dt} = 18t \qquad \text{por tanto: } \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{18t}} = \boldsymbol{dt}$$

Cuando $t = 0$; $u = 4$ y cuando $t = 1$; $u = 13$

4. Sustituyendo datos

$$A_s = 2\pi \int_0^1 t^3\sqrt{\boldsymbol{9t^2+4}}\, \boldsymbol{dt} = 2\pi \int_4^{13} t^3\sqrt{\boldsymbol{u}}\, \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{18t}} = \frac{2\pi}{18}\int_4^{13} \boldsymbol{t^2}\sqrt{u}\, du = \frac{\pi}{9}\int_4^{13} \frac{\boldsymbol{u-4}}{\boldsymbol{9}}\sqrt{u}\, du$$

$$A_s = \frac{\pi}{81}\int_4^{13} (u-4)\sqrt{u}\, du = \frac{\pi}{81}\int_4^{13} u^{3/2} - 4u^{1/2}\, du = \frac{\pi}{81} * \left[\frac{2}{5} * u^{5/2} - 4 * \frac{2}{3}\, u^{3/2}\right]$$

5. Evaluando la integral

$$A_s = \frac{\pi}{81} * \left[\frac{2}{5} * u^{5/2} - \frac{8}{3}\, u^{3/2}\right]\Bigg|_4^{13} = \frac{\pi}{81}\left[\frac{2}{5} * 169 * \sqrt{13} - \frac{8}{3} * 13\sqrt{13} - \frac{2}{5} * 32 + \frac{8}{3} * 8\right]$$

$$A_s = \frac{\pi}{81}\left[\frac{494}{15}\sqrt{13} + \frac{128}{15}\right]$$

$$A_s = \frac{\pi}{81}\left[\frac{494}{15}\sqrt{13} + \frac{128}{15}\right] = 4.93642 \text{ unidades}^2$$

Ejemplo 2

Encuentre el área de la superficie generada al rotar la curva dada en torno al eje y.

$$x = 3t^2 \quad ; \quad y = 2t^3 \qquad 0 \le t \le 5$$

1. Se deriva x y y respecto de t

$$\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{6t} \qquad \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{6t^2} \qquad \boldsymbol{f(t) = 3t^2}$$

2. Se sustituye en la Ecuación 4.5

$$A_s = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} f(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = 2\pi \int_0^5 \boldsymbol{3t^2}\sqrt{(\boldsymbol{6t})^2 + (\boldsymbol{6t^2})^2}dt$$

$$A_s = 6\pi \int_0^5 t^2\sqrt{36t^2 + 36t^4}\, dt = 6\pi \int_0^5 t^2\sqrt{36t^2[1+t^2]}\, dt = 6\pi \int_0^5 t^2 * 6t\sqrt{[1+t^2]}\, dt$$

$$A_s = 36\pi \int_0^5 t^3\sqrt{1+t^2}\, dt$$

3. Realizamos una sustitución

$$u = 1 + t^2 \quad \text{derivamos: } \frac{du}{dt} = 2t \quad \text{por tanto: } \frac{du}{2t} = dt$$

$$u - 1 = t^2$$

$$\text{Cuando} \quad t = 0 \quad u = 1 \quad \text{y cuando} \quad t = 5 \quad u = 26$$

4. Sustituyendo la integral

$$A_s = 36\pi \int_0^5 t^3\sqrt{1+t^2}\,dt = 36\pi \int_1^{26} t^3\sqrt{u}\,\frac{du}{2t} = 18\pi \int_1^{26} t^2\sqrt{u}\,du = 18\pi \int_1^{26} (u-1)\sqrt{u}\,du$$

$$A_s = 18\pi \int_1^{26} u^{3/2} - u^{1/2}\,du = 18\pi \left[\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\right] \Bigg|_1^{26}$$

$$A_s = 18\pi\left[\frac{2}{5} * 676\sqrt{26} - \frac{2}{3} * 26\sqrt{26} - \frac{2}{5} * 1 + \frac{2}{3} * 1\right] = 18\pi\left[\frac{3796}{15}\sqrt{26} + \frac{4}{15}\right]$$

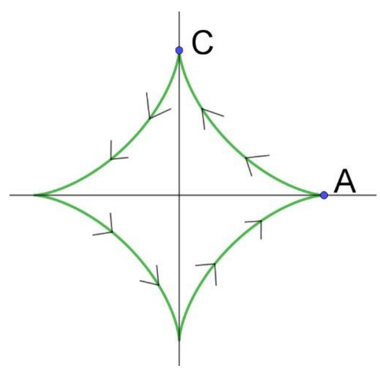
$$A_s = 18\pi\left[\frac{3796}{15}\sqrt{26} + \frac{4}{15}\right] = 72{,}985.021 \ \text{unidades}^2$$

COMENTARIO: Recuerde querido lector que se continúa integrando a x de izquierda a derecha **SI ES ÁREA**. Ahora, se integra de atrás para adelante siguiendo la dirección de curva paramétrica, **SI ES LONGITUD DE ARCO.**

Ejemplo 3

Analice t_1 y t_2 para el siguiente astroide entre el punto A y C para área y longitud de arco.

θ	$x = acos^3\theta$	y= $asen^3\theta$	PUNTO
0	a	0	A
$\pi/4$	$0.353553a$	$0.353553a$	B
$\pi/2$	0	a	C
$3\pi/4$	$-0.353553a$	$0.353553a$	D
π	$-a$	0	E
$5\pi/4$	$-0.353553a$	$-0.353553a$	F
$3\pi/2$	0	$-a$	G
$7\pi/4$	$0.353553a$	$-0.353553a$	H
2π	a	0	I



1. Para área: $t_1 = \pi/2 \;\; y \;\; t_2 = 0$ (Puesto que es de izquierda a derecha) $A = \frac{3\pi}{32}a^2$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} g(t) * f'(t) * dt = \int_{\pi/2}^{0} asen^3\theta * 3a * -sen\theta * cos^2\theta\,d\theta = -3\,a^2 \int_{\pi/2}^{0} sen^4(\theta) * cos^2(\theta)\,d\theta$$

2. Para Longitud de arco: $t_1 = 0$ y $t_2 = \pi/2$ (sigue el trayecto de la curva) $L = \frac{3}{2}a$

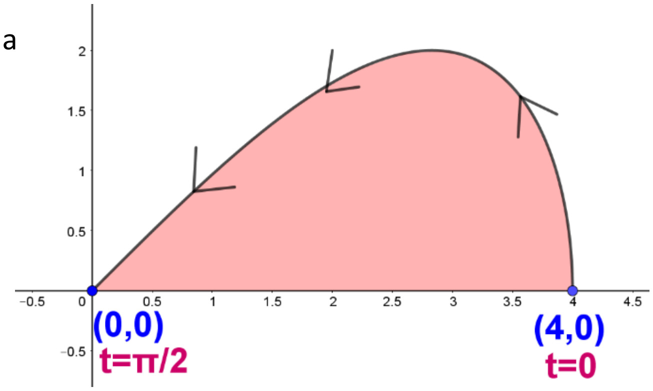
$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(3acos^2\theta * -sen\theta)^2 + (3asen^2\theta\,cos\theta)^2}\,d\theta = 3a\int_0^{\pi/2} cos\theta * sen\theta\,d\theta$$

Ejemplo 4

Encuentre el área y la longitud de la curva de Lissajous $x = 4cost\,;\ y = 2sen(2t)\ ;\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

1. Se traza la gráfica de curva utilizando la tabla 3.1.a

t	$x = 4\cos(t)$	$y = 2sen(2t)$
0	4	0
$\pi/4$	2.8284	2
$\pi/2$	0	0



Área Encerrada

2. Se plantea el área y resuelve la integral.

$$A = \int_{t_1}^{t_2} g(t) * f'(t) * dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 2\,sen(2t) * -4sen(t) * dt = -8\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 2 * sen(t) * \cos(t) * sen(t)\,dt$$

$$A = 16\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sen^2(t) * \cos(t)\,dt$$

2.1. Se resuelve la integral por sustitución

$$u = sen(t) \quad => \quad \frac{du}{dt} = \cos(t) \quad ; \quad \text{cuando } t = 0 \quad u = 0 \ ; \quad \text{cuando } t = \frac{\pi}{2} \quad u = 1$$

2.2. Sustituyendo

$$A = 16\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sen^2(t) * \cos(t)\,dt = 16\int_{0}^{1} u^2 * du = 16 * \frac{u^3}{3}\Bigg|_{0}^{1} = \frac{16}{3}[1^3 - 0^3] = \frac{16}{3}$$

3. La respuesta será

$$A = \frac{16}{3}$$

Longitud de Arco

4. Se plantea la longitud de arco (siguiendo la trayectoria de la paramétrica) y se resuelve la integral

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(4 * -sen(t))^2 + (4 * \cos(2t))^2}\,dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16sen^2t + 16cos^2(2t)}\,dt$$

$$L = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{sen^2t + cos^2(2t)}\,dt = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos(4t)}\,dt = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}cos(4t)}\,dt$$

$$L = 4 * 1.524308968 = 6.09723587 \text{ unidades}$$

4.1. Se resolvió la integral utilizando wólfram, debido a que no es posible realizarla con los métodos vistos en nuestros capítulos anteriores.

5. La respuesta será

$$L = 6.09723587 \text{ unidades}$$

4. COORDENADAS POLARES

En este capítulo estudiaremos las coordenadas polares analizando:
¿Qué son?
¿Cómo representarlas o cómo encontrar puntos en el espacio? Técnicas para el trazo de gráficas entre otras cosas.

Utilizando el plano cartesiano de referencia, pero se dejará de utilizar el (x, y) y ahora utilizaremos (radio, ángulo) = (r, θ), se trazarán gráficas distintas a las acostumbradas hasta el momento.

Este sistema se lo debemos al gran Isaac Newton, llamado sistema coordenado polar, que se utiliza para trazar un conjunto de puntos en el espacio, como se mencionó anteriormente.

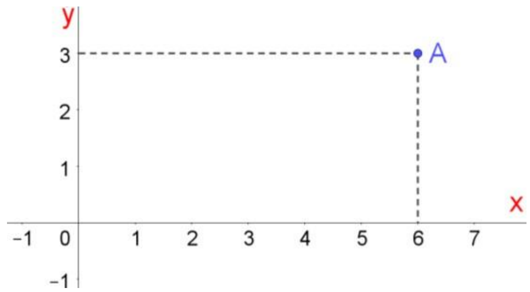
Es importante querido lector que comprenda este capítulo para que en el siguiente se le haga más fácil las aplicaciones de dicho tema.

En la portada usted observa la furia del lobo, con su asechanza. De esta manera son las polares, se observan feroces y temibles, pero no lo son, son bien utilices en el campo de la ingeniería, además que su forma gráfica es bien hermosa, tal es el caso de los pétalos que nos entrega.

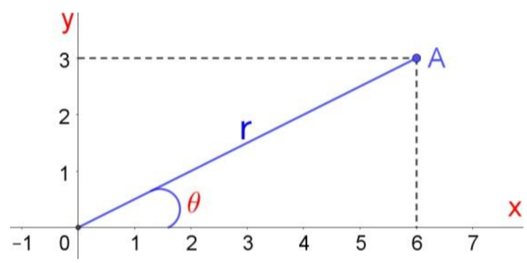
¿De dónde nace el análisis?

Recuerde que el plano cartesiano es la referencia analítica de la ubicación de un conjunto de pares ordenados con referencia al punto $(0{,}0)$.

1. Observemos el punto **A** con coordenadas $(6,3)$ trazado en el siguiente plano cartesiano.
2. ¿Qué expresan esas coordenadas rectangulares?
   Expresan que para llegar al punto A se debe caminar en el eje x 6 unidades y 3 unidades en y



3. ¿Hay alguna otra forma de poder llegar al punto A sin caminar rectangularmente?
   Resulta que sí existe otra forma y es caminando linealmente desde el punto (0,0) al punto A.



4. Se debe caminar una distancia inclinada $\boldsymbol{r}$ a un ángulo de inclinación θ. Para encontrar los valores de r y θ se utiliza trigonométrica y específicamente las funciones trigonométricas, note que se utiliza tangente porque solo se tiene cateto opuesto y adyacente.

$$tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{3}{6} \qquad r^2 = 3^2 + 6^2 \quad \text{(pitágoras)}$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{3}{6}\right) = 26.5650° \qquad r = \sqrt{9+36} = 6.7082 \text{ unidades}$$

5. Para llegar al punto A debemos caminar 6.7082 unidades a 26.5650° degradianes llamándose a estos datos coordenada polar.

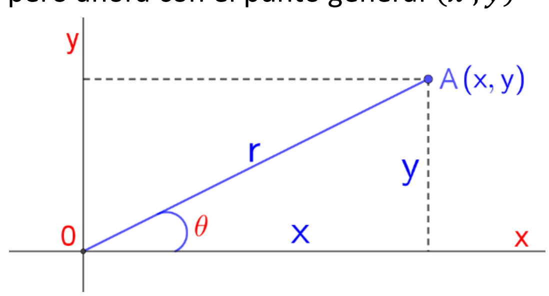
$$(6\,,3) = (6.7082\,,26.5650°)$$

Forma general de la coordenada polar

1. Tomando nuevamente la referencia anterior, pero ahora con el punto general $(x\,,y)$

$$tan\theta = \frac{y}{x} \quad ; \quad cos\theta = \frac{x}{r} \quad ; \quad sen\theta = \frac{y}{r}$$

1.1. Despejando:
$$x = r * cos\theta \quad ; \quad y = r * sen\theta$$



2. El eje x se le conoce como eje polar, así como el punto 0 se le llama polo u origen.

3. La relación entre los puntos está establecida por las siguientes ecuaciones.

$\boxed{r^2 = x^2 + y^2}$	$\boxed{tan\theta = \frac{y}{x}}$	$\boxed{x = r\ cos\theta}$	$\boxed{y = r\ sen\theta}$
Ecuación 5.1	**Ecuación 5.2**	**Ecuación 5.3**	**Ecuación 5.4.**

El ángulo tradicionalmente se trabaja en radianes. Para ello debe recordar que:

$$360° = 2\pi \text{ radianes}$$

Ejemplo 1

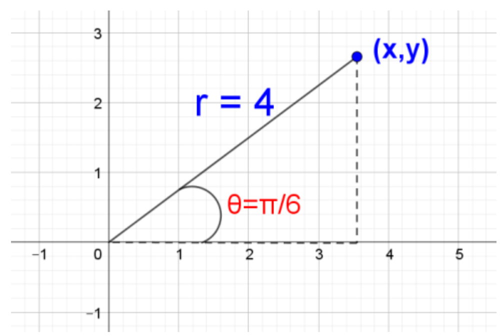
Convierta la coordenada polar descrita por $\left(4\ ,{}^{\pi}/_{6}\right)$ en coordenadas cartesianas. Trace la gráfica

1. Se identifica que el radio $r = 4$ así como el ángulo $\theta = {}^{\pi}/_{6}$
2. Se traza una gráfica para conceptualizar
3. Se aplican las ecuaciones 5.3 y 5.4

$$x = r\ cos\theta \qquad y = r\ sen\theta$$

$$x = 4\ cos\left({}^{\pi}/_{6}\right) \qquad y = 4\ sen\left({}^{\pi}/_{6}\right)$$

$$x = 3.4641 \qquad y = 2$$



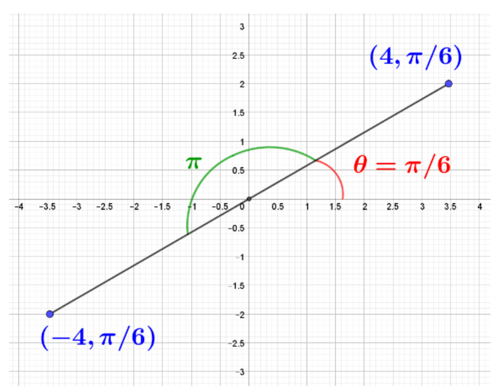
El radio puede ser negativo y para ellos veamos el siguiente ejemplo

Ejemplo 2

Convierta la coordenada polar descrita por $\left(-4, {}^{\pi}/_{6}\right)$ en coordenada cartesiana. Trace la gráfica

1. Se identifica que el radio $r = -4$ así como el ángulo $\theta = {}^{\pi}/_{6}$
2. Se traza una gráfica para conceptualizar

NOTA: Como el radio es negativo se proyecta desde el punto A (donde el radio es positivo) a $\mathbf{180}°$ y a partir del origen se traza el radio de 4, o en caso contrario, en lugar de trazar hacia arriba a partir de 0 se traza hacia abajo el radio.



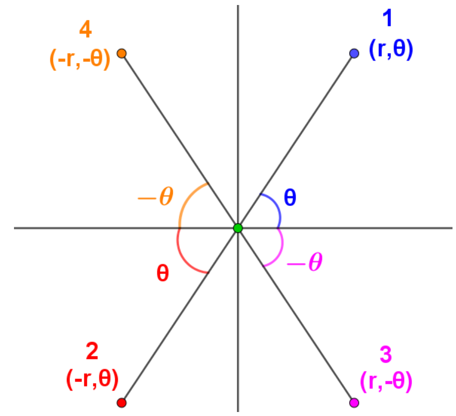
3. Se aplican las ecuaciones 5.3 y 5.4

$$x = r\ cos\theta \qquad y = r\ sen\theta$$

$$x = 4\ cos\left({}^{\pi}/_{6} + \boldsymbol{\pi}\right) \qquad y = 4\ sen\left({}^{\pi}/_{6} + \boldsymbol{\pi}\right)$$

$$x = -3.4641 \qquad y = -2$$

Radios y ángulos negativos

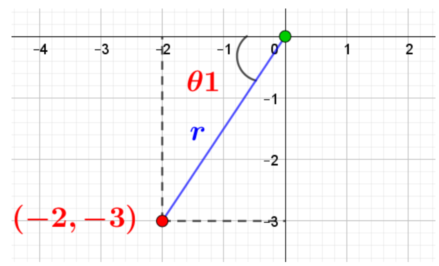


Gráficamente expresan los siguientes valores negativos:

El Punto 1 es la base de los otros tres puntos restantes.

Ejemplo 3

Convierta la coordenada cartesiana $(-2,-3)$ en polar.



1. Se traza una gráfica ubicando el punto $(-2,-3)$

2. Por trigonometría encontramos el ángulo y el radio utilizando la ecuación 5.1 y 5.2

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad tan\theta_1 = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}$$

$$r^2 = (-2)^2 + (-3)^2 \qquad tan\theta_1 = \frac{-3}{-2}$$

$$r = \sqrt{13} \qquad \theta_1 = tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 56.31°$$

3. Al ángulo se le debe sumar $180°$, por eso es importante realizar una gráfica

$$\theta = \theta_1 + 180° = 56.31° + 180° = 236.31°$$

4. La respuesta será

$$(-2\,,-3) = \left(\sqrt{13}\,, 236.31°\right)$$

5. También es válida la respuesta, tomando radios y ángulos negativos.

$$\left(\sqrt{13}\,, 236.31°\right) \rightarrow \left(-\sqrt{13}\,, 56.31°\right) \rightarrow \left(\sqrt{13}\,, -123.69°\right) \qquad \text{Equivalentes}$$

4.1. Curvas polares

Hemos aprendido a ubicar puntos en el espacio a través de un ángulo y un radio, ya sea radio o ángulos positivos o negativos. Ahora aprenderemos a dejar el radio en función del ángulo.

$$r = f(\theta)$$

Cuando se dejaba y en términos de x se armaban funciones como:

$$y = \sqrt{x} \quad ; \quad y = e^x + 2 \quad ; \quad y = \frac{1}{x-2} \quad ; \quad y = sen(2x) + 1 \qquad \text{Por ponerle ejemplos}$$

¿Qué expresaba la relación $y = f(x)$?

- Expresaba que al cambio de x cambiaba y.
- x es la variable independiente y y la variable dependiente (porque dependía del cambio de x). Para trazar las gráficas en la relación $y = f(x)$ se utilizaba el ploteo de puntos para después ubicarlos en el plano cartesiano.
- Cuando x es tanto y será tanto (utilizando lenguaje informal)

¿Qué expresa entonces la relación $r = f(\theta)$?

- Relación del radio r con el ángulo θ
- El ángulo θ es la variable independiente y la r será la variable dependiente.
- Cuando θ sea tanto, entonces r será tanto (utilizando lenguaje informal)
- La coordenada polar se expresa $(r, \theta) = (f(\theta), \theta)$
- La forma de trazar las nuevas gráficas será

$$r = 2\,sen\theta \quad ; \quad r = -4sen^2\theta \quad ; \quad r = 1 + sen\theta \quad ; \quad r^2 = 9sen(2\theta)$$

Ejemplo 1

Identifique la curva encontrando una ecuación cartesiana para la curva.

$$r^2\cos(2\theta) = 1$$

1. Debe recordarse de la ecuación 5.3 y 5.4.

$$x = r\,cos\theta \qquad y = r\,sen\theta$$

$$\boldsymbol{cos\theta = \frac{x}{r}} \qquad \boldsymbol{sen\theta = \frac{y}{r}}$$

2. También debe recordarse de la identidad trigonométrica.

$$\boldsymbol{cos(2\theta) = cos^2\theta - sen^2\theta}$$

3. Sustituyendo en la curva polar original.

$$r^2\cos(2\theta) = 1$$

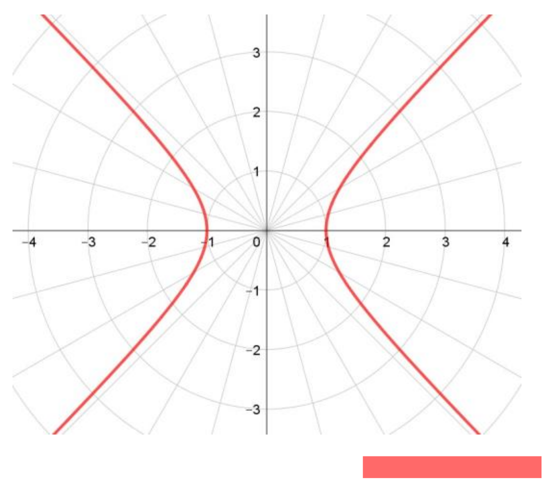
$$r^2[\boldsymbol{cos^2\theta - sen^2\theta}] = 1$$

$$r^2\left[\left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right] = 1$$

$$r^2\left[\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2}\right] = 1$$

$$\cancel{r^2}\left[\frac{x^2 - y^2}{\cancel{r^2}}\right] = 1$$

$$x^2 - y^2 = 1 \ \ \text{(Una Hiperbola)}$$



Ejemplo 2

Encuentre una ecuación polar para la curva representada por la ecuación cartesiana dada.

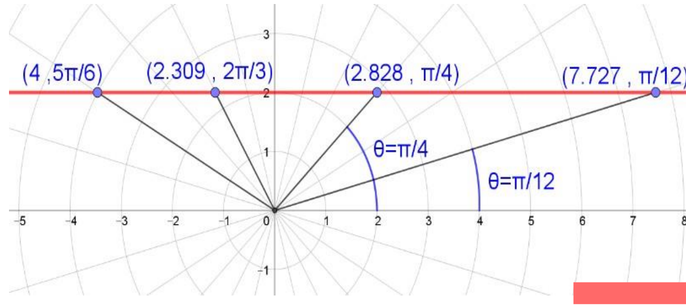
$$y = 2$$

1. Utilizamos la ecuación 5.4.

$$y = 2$$
$$r\,sen\theta = 2$$

2. Se despeja el radio

$$r = \frac{2}{sen\theta}$$



Ejemplo 3

Encuentre una ecuación polar para la curva representada por la ecuación cartesiana dada.

$$y = 1 + 3x$$

1. Se utiliza la ecuación 5.3 y 5.4.

$$\boldsymbol{y} = 1 + 3\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{r\,sen\theta} = 1 + 3 * \boldsymbol{r\,cos\theta}$$
$$r\,sen\theta - 3 * r\,cos\theta = 1$$
$$r\,(sen\theta - 3cos\theta) = 1$$

2. Despejando para el radio:

$$r = \frac{1}{sen\theta - 3cos\theta}$$

¿Cómo se trazan las gráficas polares?

1. Despeje para r si en algún caso no lo estuviera
2. Encuentre el periodo para trazar la gráfica cartesiana con la ecuación: $\mathrm{k} * \mathrm{t} = 2\pi$
   Donde $\mathrm{k} = \text{periodo}$; $\mathrm{t} = \text{número que acompaña al ángulo}$
3. Verifique si la ecuación es simétrica para trazar o comprobar gráficas

$$r(\theta) = r(-\theta) \qquad \text{simétrico respecto al eje polar } (x)$$
$$r(\theta) = r(\pi + \theta) \qquad \text{simétrico respecto al polo } (0,0)$$
$$r(\theta) = r(\pi - \theta) \qquad \text{simétrico respecto al eje } {}^{\pi}/_{2}$$

4. Realice una gráfica cartesiana $(\theta\,, f(\theta))$ para ver la relación del ángulo y el radio $0 \leq \theta \leq 2\pi$
5. En el paso 2 puede también realizar una tabla de ploteo. Lo que se necesita es la mayor cantidad de puntos relacionados para poder trazar la gráfica polar.
6. Teniendo el paso 2 o ya sea el paso 3 (cualquiera de ambos) se procede a trazar la gráfica polar, está siempre en el plano cartesiano x y y.
7. Para trazar los puntos polares es necesario que usted conozca los ángulos en radianes en una gráfica cartesiana (Es más fácil referenciarlas en el sistema radial)

Ejemplo 1

Trace la gráfica dada por las coordenadas polares: $\mathrm{A}(2,0), \mathrm{B}\left(3, {}^{\pi}/_{4}\right), \mathrm{C}\left(2, {}^{\pi}/_{2}\right), \mathrm{D}\left(2, {}^{2\pi}/_{3}\right), \mathrm{E}\left(4, {}^{5\pi}/_{4}\right)$

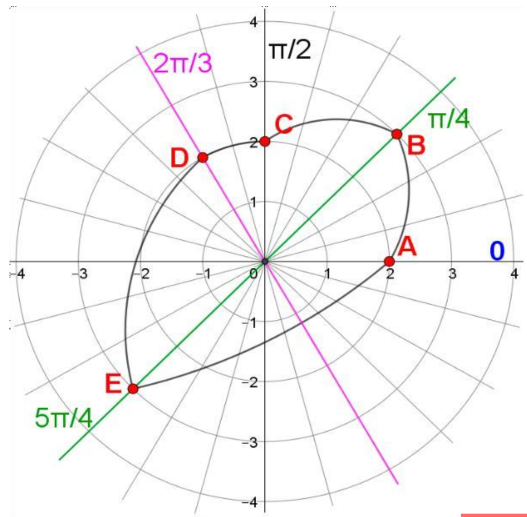
1. Para cualquier punto, primero se traza una recta del ángulo y luego en esa recta se ubica el tamaño del radio.

2. Una vez trazadas las rectas y ubicados los puntos con sus respectivos ángulos procedemos a unir punto con punto

$$\text{A con B} \quad , \quad \text{B con C} \quad , \quad \text{C con D} \quad , \quad \text{D con E} \quad \text{y} \quad \text{E con A}$$

3. La gráfica por tanto será

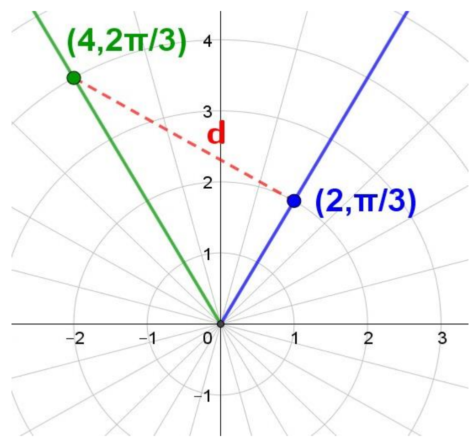
Nota: Para las gráficas polares los puntos se unen mediante curvas. Realmente se deben unir por rectas, pero para omitir el ploteo de demasiados puntos se hace de esa manera, ya que se sabe que ubicando muchos puntos esa forma va adquiriendo la gráfica.



Ejemplo 2

Encuentre la distancia entre los puntos con coordenadas polares $\left(2, {}^{\pi}/_{3}\right)$ y $\left(4, {}^{2\pi}/_{3}\right)$

1. Se traza la gráfica (no debe ser exacta) para ubicar los puntos en el plano polar.



2. La fórmula entre dos puntos es:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(r_2 cos\theta_2 - r_1 cos\theta_1)^2 + (r_2 sen\theta_2 - r_1 sen\theta_1)^2}$$

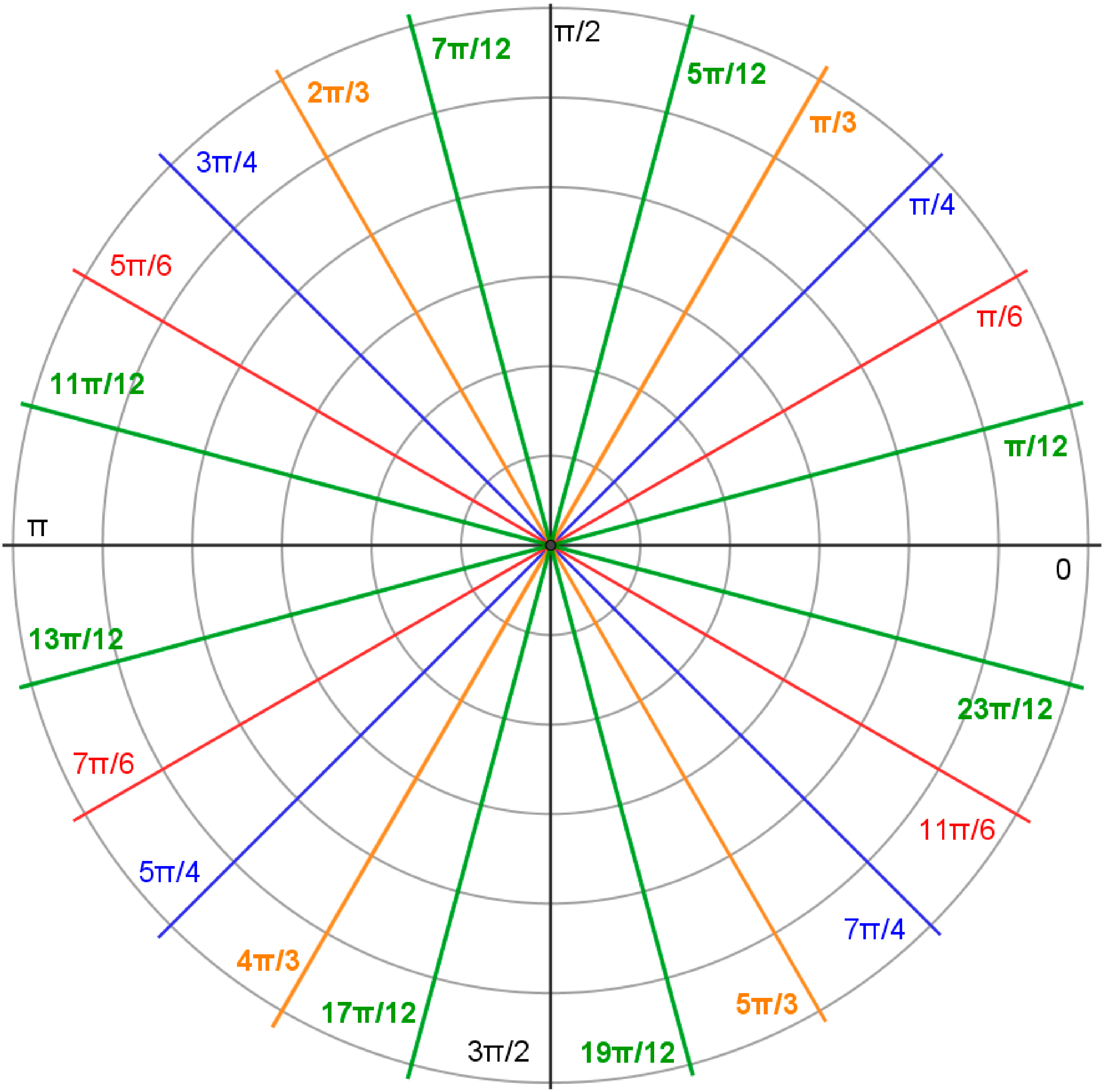
$$d = \sqrt{\left(4cos\left({}^{2\pi}/_{3}\right) - 2cos\left({}^{\pi}/_{3}\right)\right)^2 + \left(4sen\left({}^{2\pi}/_{3}\right) - 2sen\left({}^{\pi}/_{3}\right)\right)^2}$$

$$d = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$$

$$d = \sqrt{12} = 3.4641 \text{ unidades}$$

A continuación, se le presenta una gráfica polar para que la relacione con los ángulos, por si en este paso aun le cuesta ubicarlos.

Tabla 5.1.a



Esa gráfica le servirá para ubicar más rápido los puntos polares. Los círculos son los radios comenzando desde $r = 1$ hasta $r = 6$. Se dejaron los ángulos más famosos a cada $\pi/_{12}$ $(15°)$

Ejemplo 1

Bosqueje la curva con la ecuación polar dada: $r = -2\ sen\theta$

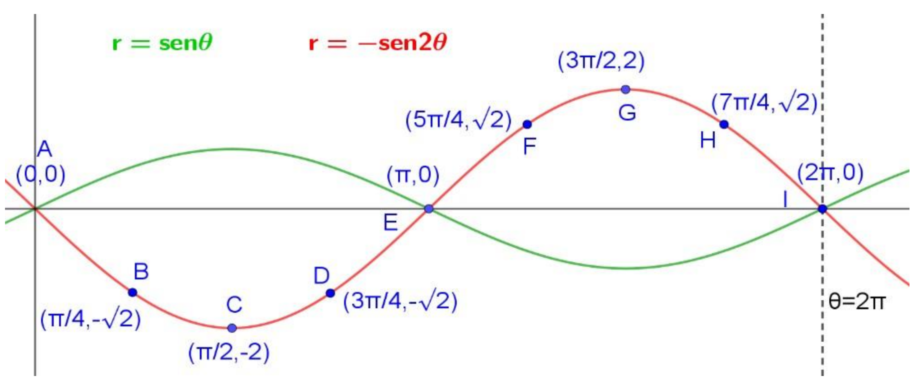
1. Iniciamos analizando el periodo de la función

$$\mathrm{k} * \mathrm{t} = 2\pi \qquad \mathrm{t} = \text{número que acompaña al ángulo}$$
$$\text{Periodo} * 1 = 2\pi$$
$$\text{Periodo} = \mathrm{k} = 2\pi$$

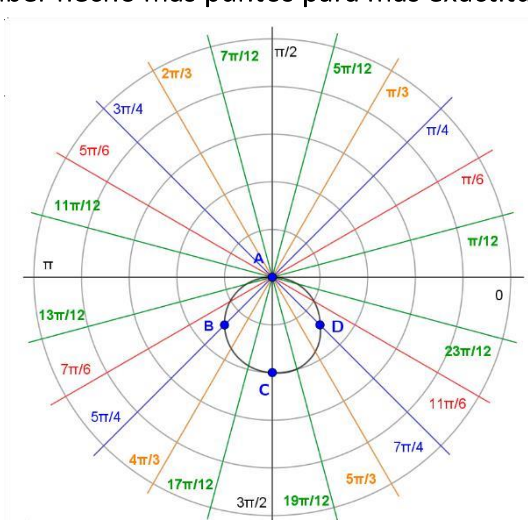
2. Viendo la simetría (tomando cualquier ángulo de referencia)

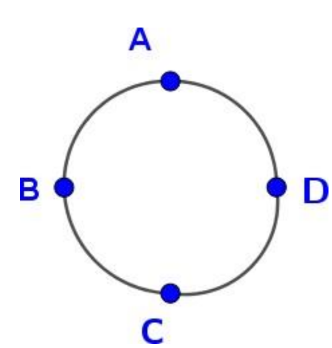
$$r(\pi/4) = -\sqrt{2} \qquad r(-\pi/4) = \sqrt{2} \qquad \text{(No es simétrica respecto al eje polar)}$$
$$r(\pi/4) = -\sqrt{2} \qquad r(\pi + \pi/4) = \sqrt{2} \qquad \text{(No es simétrica respecto al polo)}$$
$$r(\pi/4) = -\sqrt{2} \qquad r(\pi - \pi/4) = -\sqrt{2} \qquad \text{(Sí es simetrica respecto al eje } \pi/2\text{)}$$

3. Se puede trazar una gráfica cartesiana (θ, r) o se puede realizar una tabla. En este caso se debe realizar una gráfica cartesiana, ya que es lo más común.
   - 3.1. Se toma como base la función $r = sen\theta$
   - 3.2. Luego se traza la función solicitada utilizando transformación de funciones.
   - 3.3. Como no es una gráfica compleja, con referencia cartesiana, se analiza a cada $\pi/4$



4. Se utiliza la gráfica 5.1.a de referencia para trazar la gráfica polar.
   - 4.1. Recuerde que se ubica primero el ángulo y luego el radio. Si el radio es negativo trazar a $180°$ el radio.
   - 4.2. Luego se unen los puntos A, B, C,D por curvas
   - 4.3. Nótese que: $\mathrm{A} = \mathrm{E} = \mathrm{I} = 0$ Así como: $\mathrm{B} = \mathrm{F}$ (en la polar) ; $\mathrm{C} = \mathrm{G}$; $\mathrm{D} = \mathrm{H}$
   - 4.4. Se pudieron haber hecho más puntos para más exactitud





Ejemplo 2

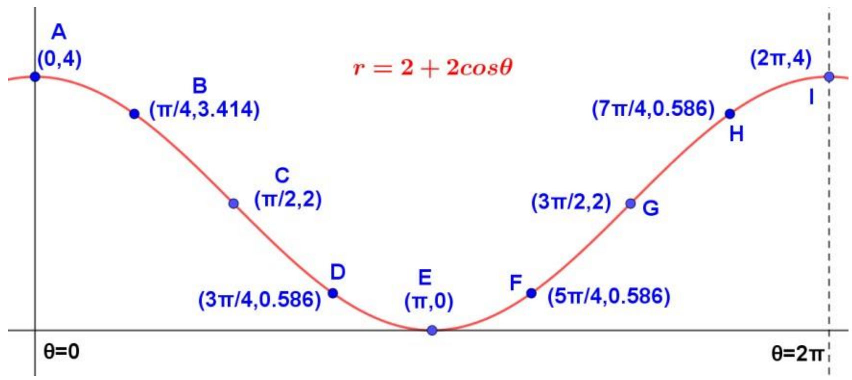
Bosqueje la curva con la ecuación polar dada: $r = 2(1 + cos\theta)$

1. Como no hay ningún número que acompañe al ángulo θ se define el periodo (k) como 2π
2. Analizando la simetría, tomando cualquier ángulo de referencia.

$$r\left(\pi/_3\right) = 3 \qquad r\left(-\pi/_3\right) = 3 \qquad \text{(Sí es simétrica respecto al eje polar)}$$
$$r\left(\pi/_3\right) = 3 \qquad r\left(\pi + \pi/_3\right) = 1 \qquad \text{(No es simétrica respecto al polo)}$$
$$r\left(\pi/_3\right) = 3 \qquad r\left(\pi - \pi/_3\right) = 1 \qquad \left(\text{No es simétrica respecto al eje } \pi/_2\right)$$

3. Se traza la gráfica cartesiana $r = f(\theta)$

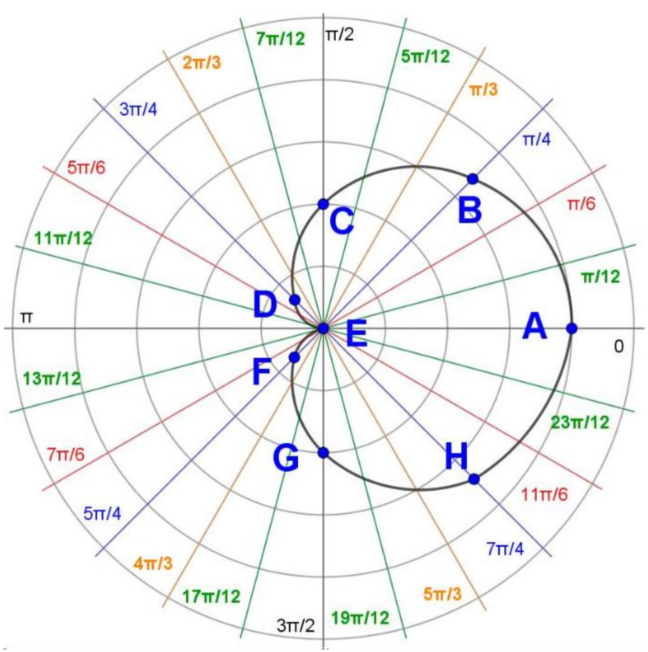
   3.1. Mi recomendación, querido lector, es que primero trace la gráfica cartesiana (por conocimiento de matemática básica 1, utilizando transformación de funciones) y en base a ello decida a cada cuánto trazar sus ángulos de referencia. En este caso los haré a cada $\pi/4$ una vez vista la gráfica cartesiana.

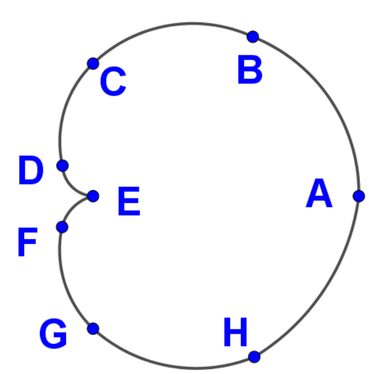


4. La gráfica será, por tanto

   4.1. Si usted considera que le hace falta algún punto, entonces no dude en plotearlo. Los siguientes puntos sirvieron de referencia para trazar una mejor gráfica.

$$r\left(\pi/_6\right) = 3.732 \quad ; \quad r\left(11\pi/_{12}\right) = 0.068 \quad ; \quad r\left(23\pi/_{12}\right) = 3.932 \quad \text{(puntos extras)}$$





Ejemplo 3

Bosqueje la curva con la ecuación polar dada: $r = 4\ sen3\theta$

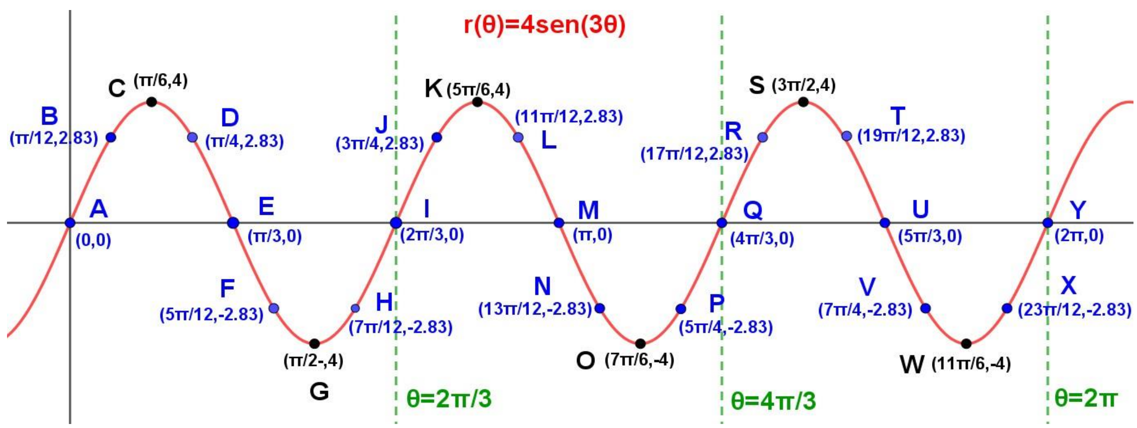
1. Encontramos el periodo de la función.

$$k * 3 = 2\pi \qquad \text{por tanto:} \qquad k = \frac{2\pi}{3}$$

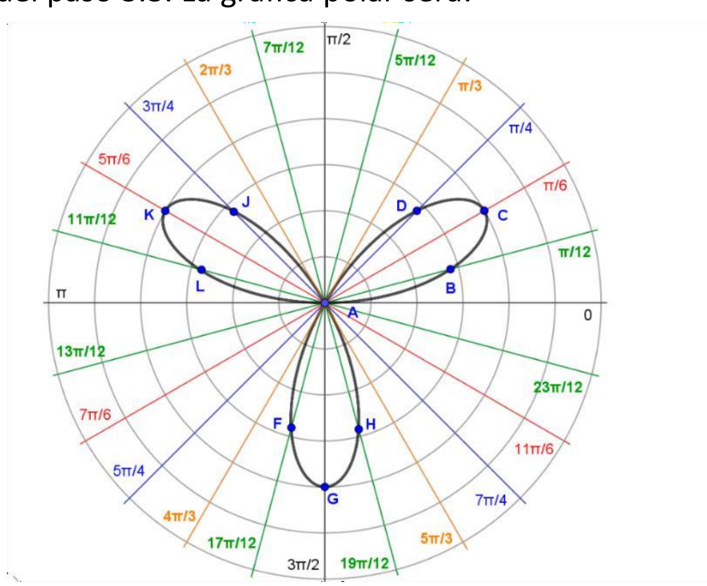
2. Analizando la simetría se toma cualquier ángulo de referencia

$$r\left(\pi/_6\right) = 4 \qquad r\left(-\pi/_6\right) = -4 \qquad \text{(No es simétrica respecto al eje polar)}$$
$$r\left(\pi/_6\right) = 4 \qquad r\left(\pi + \pi/_6\right) = -4 \qquad \text{(No es simétrica respecto al polo)}$$
$$r\left(\pi/_6\right) = 4 \qquad r\left(\pi - \pi/_6\right) = 4 \qquad \left(\text{Sí es simétrica respecto al eje } \pi/_2\right)$$

3. Ese periodo es útil para trazar la gráfica cartesiana.
   3.1. Para definir a cada cuánto se deben trazar los ángulos, se divide el periodo dentro de n. Donde n es la cantidad de partes que se desean. Tomemos n=8 (seis partes)
   3.2. Recuerde que entre más partes, más exacta es la gráfica polar.
   $$\frac{2\pi}{(3 * 8)} = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$$
   3.3. Para obtener los máximos y mínimos solamente debe dividir el periodo dentro de 4.
   $$\frac{2\pi/_3}{4} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \text{ (a cada ese valor hay un máximo o un mínimo)}$$



4. Siguiendo los puntos del paso 3.3. La gráfica polar será:



Ejemplo 4

Bosqueje la curva con la ecuación polar dada: $r^2 = cos\ 4\theta$

1. Procedemos a sacar la raíz cuadrada para ambos lados de la ecuación

$$r = \pm\sqrt{cos4\theta}$$

2. Analizamos el dominio de la ecuación. Para ello se debe cumplir

$$cos4\theta\ \geq\ 0$$

   2.1. El periodo de la función será:

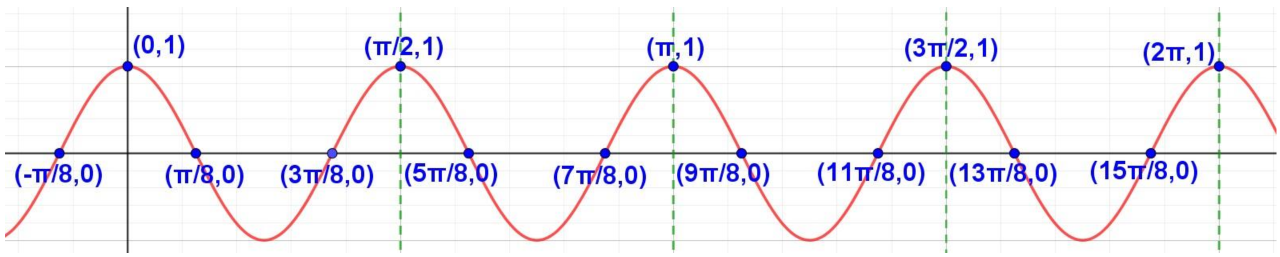
$$\mathrm{k} * 4\ = 2\pi \quad \text{por tanto:} \quad \mathrm{k} = \frac{\pi}{2}$$

   2.2. Los puntos críticos de la desigualdad

$$cos4\theta = 0$$

$$\theta = \frac{cos^{-1}0}{4} = \frac{\pi/2}{4} = \frac{\pi}{8} \quad \text{a partir de este ángulo podemos trazar los demás.}$$

   2.3. Para más referencias sobre la función, se procede a trazar la gráfica $y = cos4\theta$



   2.4. El dominio con la gráfica anterior será: $\frac{\pi}{8}(4n-1) \leq \theta \leq \frac{\pi}{8}(4n+1) \quad n = 0,1,2,3\ ...$

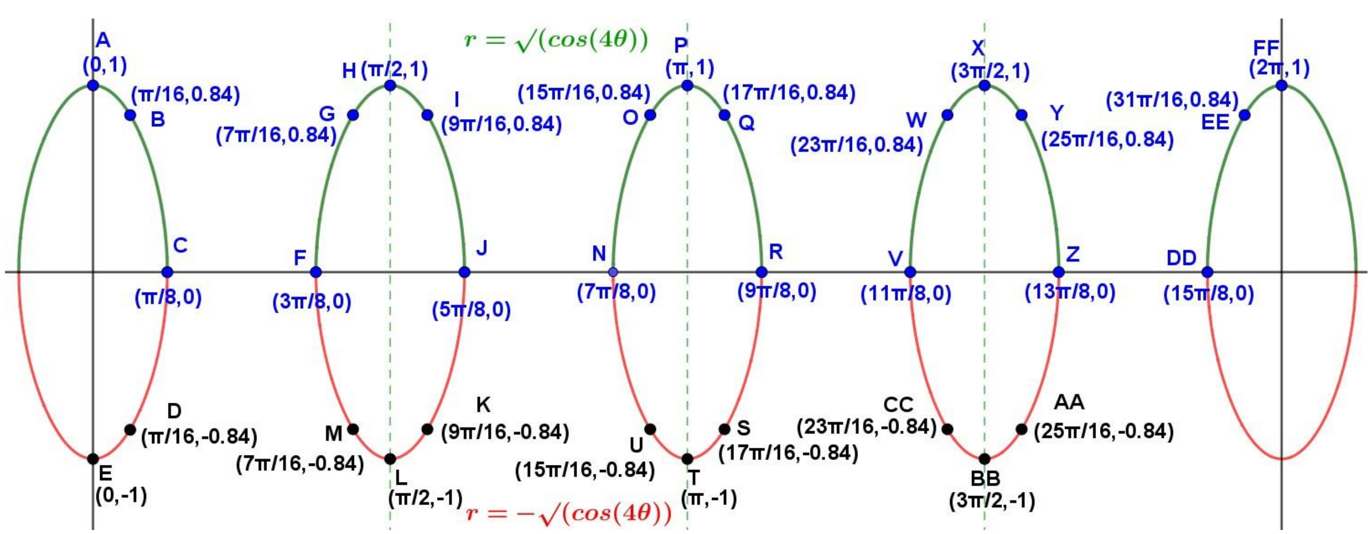
3. Analizando la simetría se toma cualquier ángulo de referencia.

$r\left({}^{\pi}/_{16}\right)\ = \pm 0.841 \qquad r\left(-{}^{\pi}/_{16}\right) = \pm 0.841 \qquad$ (Sí es simétrica respecto al eje polar)

$r\left({}^{\pi}/_{16}\right)\ = \pm 0.841 \qquad r\left(\pi + {}^{\pi}/_{16}\right) = \pm 0.841 \qquad$ (Sí es simétrica respecto al polo)

$r\left({}^{\pi}/_{61}\right)\ = \pm 0.841 \qquad r\left(\pi - {}^{\pi}/_{16}\right) = \pm 0.841 \qquad$ (Sí es simétrica respecto al eje ${}^{\pi}/_{2}$)

4. Procedemos a trazar la gráfica polar $r = f(\theta)$
   4.1. Se toma en cuenta el periodo k
   4.2. Se toma en cuenta el dominio del ángulo θ
   4.3. Se analiza a cada ${}^{\pi}/_{16}$ que es la mitad de ${}^{\pi}/_{8}$. Los máximos estarán a cada ${}^{\pi}/_{2} * n$



Ing. Brayan Velásquez

4.4. También pudo haber realizado el ploteo por una tabla como la siguiente.

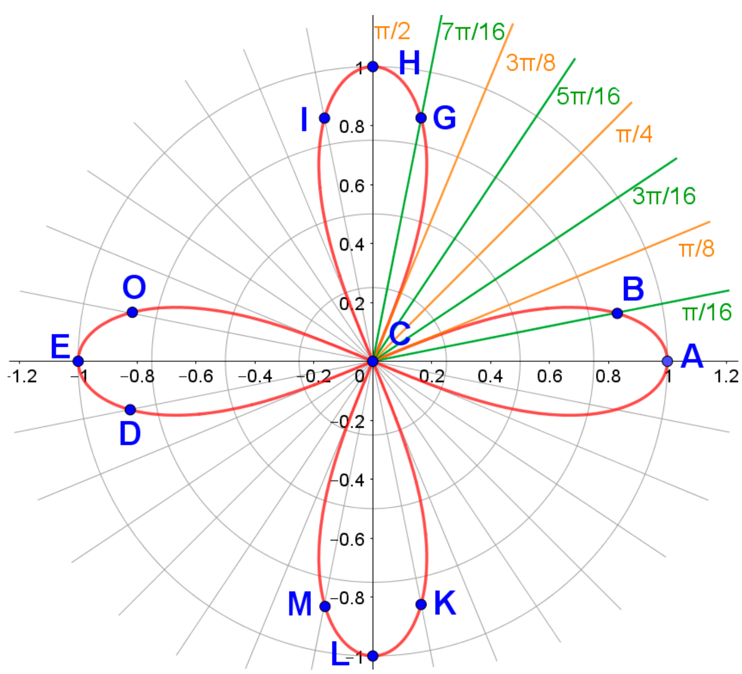
Número	θ	$r = \sqrt{cos(4\theta)}$	PUNTO	$r = -\sqrt{cos(4\theta)}$	PUNTO
0	0	1	A	-1	E
1	$\pi/16$	0.841	B	-0.841	D
2	$\pi/8$	0	C	0	C
3	$3\pi/16$				
4	$\pi/4$				
5	$5\pi/16$				
6	$3\pi/8$	0	F	0	F
7	$7\pi/16$	0.841	G	-0.841	M
8	$\pi/2$	1	H	-1	L
9	$9\pi/16$	0.841	I	-0.841	K
10	$5\pi/8$	0	J	0	J
11	$11\pi/16$				
12	$3\pi/4$				
13	$13\pi/16$				
14	$7\pi/8$	0	N	0	N
15	$15\pi/16$	0.841	O	-0.841	U
16	π	1	P	-1	T
17	$17\pi/16$	0.841	Q	-0.841	S
18	$9\pi/8$	0	R	0	R

Número	θ	$r = \sqrt{cos(4\theta)}$	PUNTO	$r = -\sqrt{cos(4\theta)}$	PUNTO
19	$19\pi/16$				
20	$5\pi/4$				
21	$21\pi/16$				
22	$11\pi/8$	0	V	0	V
23	$23\pi/16$	0.841	W	-0.841	CC
24	$3\pi/2$	1	X	-1	BB
25	$25\pi/16$	0.841	Y	-0.841	AA
26	$13\pi/8$	0	Z	0	Z
27	$27\pi/16$				
28	$7\pi/4$				
29	$29\pi/16$				
30	$15\pi/8$	0	DD	0	DD
31	$31\pi/16$	0.841	EE	-0.841	KK
32	2π	1	FF	-1	JJ

4.5. Ya sea que trace su gráfica cartesiana o plotee su tabla, le aconsejo, en este problema, que a medida que los va ploteando vaya trazando la gráfica polar.

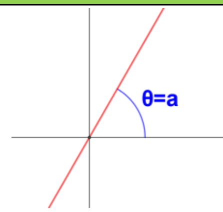
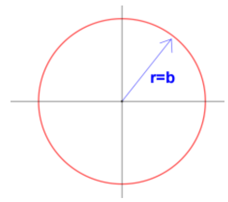
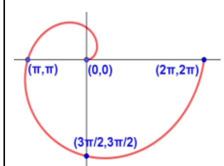
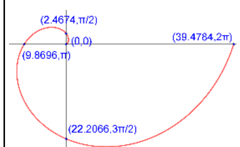
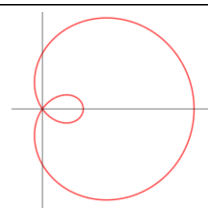
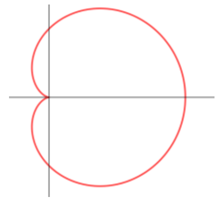
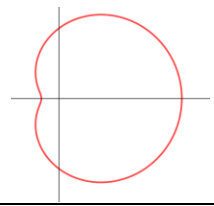
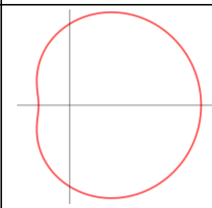
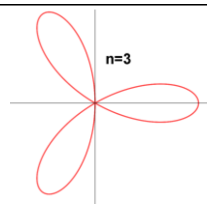
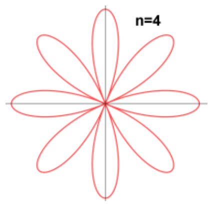
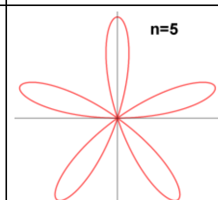
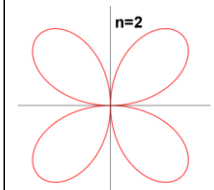
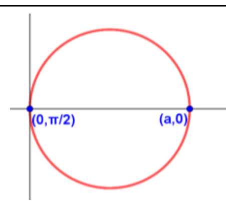
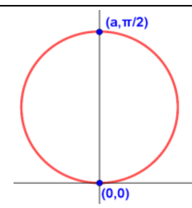
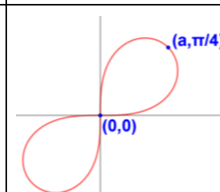
5. La gráfica será:

5.1. La gráfica cumple con todos los puntos ploteados y con las simetrías respectivas.



Existen muchas gráficas polares que se pueden utilizar de referencia para trazar nuevas gráficas, por tal razón, a continuación se le proporcionará una tabla con graficas de referencia.

Tabla 5.1. a

No.	Nombre	Ecuación matemática	Geometría	Geometría	Geometría	Geometría
1	Constantes	$a\ y\ b = \text{constantes}$				
			$\theta = \text{a}$	$r = b$	$r = \theta$	$r = \theta^2$
2	Caracoles	$r = a \pm b\cos\theta$ $r = a \pm b\,\text{sen}\,\theta$ $a > 0 \quad b > 0$				
			Caracol con bucle interior	Cardioide	Caracol con hoyuelo	Caracol Convexo
			${}^{a}/_{b} < 1$	${}^{a}/_{b} = 1$	$1 < {}^{a}/_{b} < 2$	${}^{a}/_{b} \geq 2$
3	ROSAS	$n\ pétalos$ $(si\ n\ es\ impar)$ $2n\ pétalos$ $(si\ n\ es\ par)$				
			$r = a\cos(n\theta)$	$r = a\cos(n\theta)$	$r = a\,\text{sen}(n\theta)$	$r = a\,\text{sen}(n\theta)$
4	CIRCULOS Y LEMNISCATAS					
			Círculo	Círculo	Lemniscata	Lemniscata
			$r = a\cos\theta$	$r = a\,\text{sen}\,\theta$	$r^2 = a^2 sen2\theta$	$r^2 = a^2 cos2\theta$

¿Son las ecuaciones polares ecuaciones paramétricas?

Esta es una pregunta que muchos estudiantes se plantean. La respuesta es Sí. Las ecuaciones polares son paramétricas en donde la variable r (radio) está dominado por el parámetro ángulo. No siempre el parámetro es el tiempo, recuerde que el parámetro es una variable que gobierna sobre otra variable. Su trazo de gráfica es distinto, pero al ser las gráficas un parámetro, llevan una dirección o sentido con flechas, como en las ecuaciones paramétricas.

4.2. Tangentes a curvas polares

La tangente es la pendiente de la recta tangente a una curva dada. Ahora veremos cómo calcular pendientes de ecuaciones polares, que siguen siendo funciones porque el radio está en términos del ángulo.

¿De dónde se obtiene la fórmula?

1. Similar a la obtención de la fórmula para ecuaciones paramétricas, se necesita saber que la pendiente tangente está dada por:

$$\text{pendiente de la recta tangente} = m = \frac{dy}{dx}$$

2. Se multiplica el numerador por $1/_{d\theta}$ y se divide por el mismo valor para no alterar

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} * \frac{1/_{d\theta}}{1/_{d\theta}} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

3. Recuerde que x y y están expresadas polarmente por:

$$x = r\,cos\theta = r(\theta)cos\theta \quad ; \quad y = r\,sen\theta = r(\theta)sen\theta$$

4. Derivamos respecto a θ

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}cos\theta - r\,sen\theta \quad ; \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}sen\theta + r\,cos\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}cos\theta - r\,sen\theta \quad ; \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}sen\theta + r\,cos\theta$$

5. Sustituyendo en el paso 2.

$$m = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{dr}{d\theta}sen\theta + r\,cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}cos\theta - r\,sen\theta}$$

6. Llegando a la fórmula

$$\boxed{m = \frac{\frac{dr}{d\theta}sen\theta + r\,cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}cos\theta - r\,sen\theta}} \qquad \textbf{Ecuación 5.5}$$

7. Para encontrar rectas horizontales se utiliza $dy/_{d\theta} = 0$

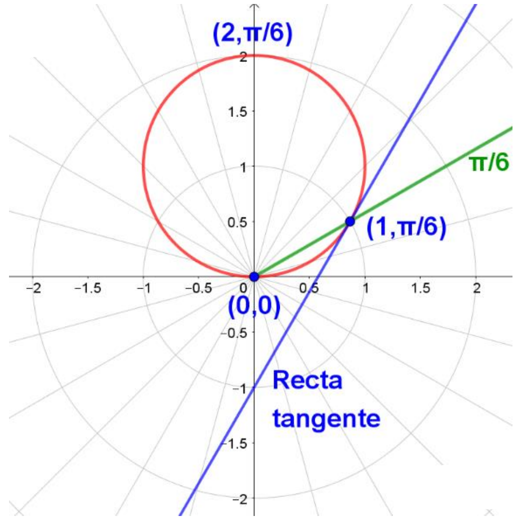
8. Para encontrar rectas verticales se utiliza $dx/_{d\theta} = 0$

9. Para encontrar rectas tangentes en el polo se utiliza $m = dy/_{dx} = tan\theta$

Ejemplo 1

Encuentre la pendiente de la recta tangente para la curva polar $r = 2\ sen\theta$ en el punto $\theta = {}^{\pi}/_{6}$

1. En base a la tabla 5.1.a se traza la gráfica de r definiendo que es un círculo de radio 2.



1.1. Se traza el punto a evaluar

$$\boldsymbol{r = 2\ sen\theta}$$
$$r = 2\ sen({}^{\pi}/_{6}) = 1$$

1.2. Se deriva respecto a θ

$$\boldsymbol{\frac{dr}{d\theta} = 2 * cos\theta}$$

2. Utilizando la ecuación 5.5 se obtiene

$$m = \frac{\frac{dr}{d\theta} sen\theta + r\ cos\theta}{\frac{dr}{d\theta} cos\theta - r\ sen\theta} = \frac{2 * cos\theta * sen\theta + 2\ sen\theta * cos\theta}{2 * cos\theta * cos\theta - 2\ sen\theta * sen\theta} = \frac{4\ cos\theta\ sen\theta}{2cos^2\theta - 2sen^2\theta}$$

$$m = \frac{2\ cos\theta\ sen\theta}{cos^2\theta - sen^2\theta} \qquad \text{Pendiente tangente general}$$

3. Se evalúa en m el valor del ángulo $\theta = {}^{\pi}/_{6}$

$$m = \frac{2\ cos\theta\ sen\theta}{cos^2\theta - sen^2\theta} = \frac{2\ cos({}^{\pi}/_{6})\ sen({}^{\pi}/_{6})}{cos^2({}^{\pi}/_{6}) - sen^2({}^{\pi}/_{6})} = \frac{2 * \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$m = \sqrt{3}$$

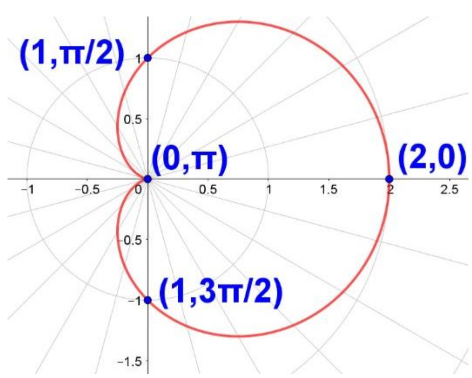
Ejemplo 2

Encuentre los puntos sobre la curva dada, donde la recta tangente es horizontal o vertical.

$$r = 1 + cos\theta$$

1. Trazamos la gráfica en base a la Tabla 5.1.a, sabiendo que ${}^{a}/_{b} = 1$ la gráfica es un cardioide.

1.1. Con tres puntos ploteados se puede trazar la gráfica



2. Se procede a obtener x y y en términos de θ. Para ello se utiliza la ecuación 5.3 y 5.4.

$$\text{teniendo:} \quad \boldsymbol{r = 1 + cos\theta}$$

$$x = \boldsymbol{r}\, cos\theta \quad \text{y} \quad y = \boldsymbol{r}\, sen\theta$$

$$x = (\boldsymbol{1 + cos\theta})\, cos\theta \quad \text{y} \quad y = (\boldsymbol{1 + cos\theta})\, sen\theta$$

$$x = cos\theta + cos^2\theta \qquad \text{y} \qquad y = sen\theta + sen\theta * cos\theta$$

3. Se procede a derivar x y y respecto a θ

$$\frac{dx}{d\theta} = -sen\theta + 2cos\theta * -sen\theta \quad ; \quad \frac{dy}{d\theta} = cos\theta + cos\theta * cos\theta - sen\theta * sen\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -sen\theta - 2sen\theta\, cos\theta \quad ; \quad \frac{dy}{d\theta} = cos\theta + cos^2\theta - sen^2\theta$$

4. Encontrando puntos donde la recta tangente es horizontal ${}^{dy}/_{d\theta} = 0$

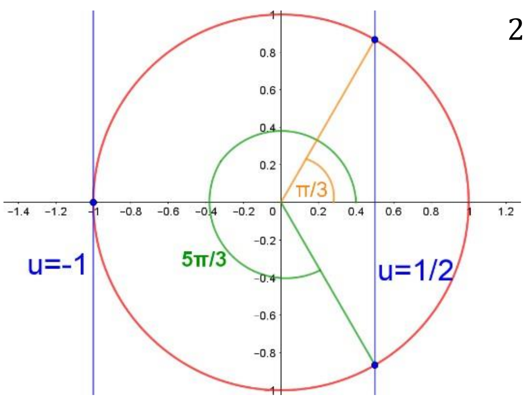
$$\frac{dy}{d\theta} = cos\theta + cos^2\theta - sen^2\theta = 0$$

$$cos\theta + cos^2\theta - sen^2\theta = 0$$

$$cos\theta + cos^2\theta - (1 - cos^2\theta) = 0$$

$$2cos^2\theta + cos\theta - 1 = 0$$

4.1. Se realiza una sustitución: $u = cos\theta$



$$2cos^2\theta + cos\theta - 1 = 0$$

$$2\,u^2 + u - 1 = 0$$

$$u = -1 \quad ; \quad u = \frac{1}{2}$$

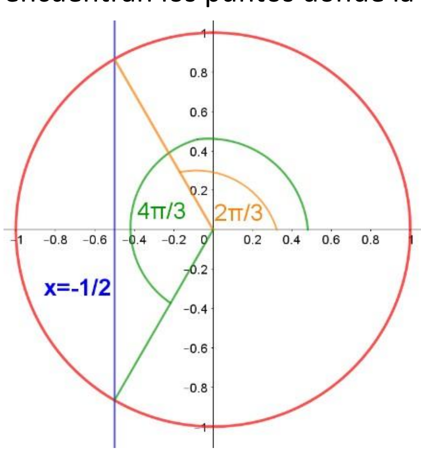
$$\theta = \pi \quad ; \quad u = {}^{\pi}/_{3}$$

$$r({}^{\pi}/_{3}) = {}^{3}/_{2} \quad ; \quad r(\pi) = 0 \qquad r\left({}^{5\pi}/_{3}\right) = {}^{3}/_{2}$$

Los puntos de curvas horizontales son

$$\left({}^{3}/_{2}, {}^{\pi}/_{3}\right) ; \ (0, \pi) \ ; \ \left({}^{3}/_{2}, {}^{5\pi}/_{3}\right)$$

5. se encuentran los puntos donde la recta tangente es vertical ${}^{dx}/_{d\theta} = 0$



$$\frac{dx}{d\theta} = -sen\theta - 2sen\theta\, cos\theta = 0$$

$$-sen\theta - 2sen\theta\, cos\theta = 0$$

$$-sen\theta[1 + 2\, cos\theta] = 0$$

$$\theta = cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \qquad \theta = sen^{-1}(0) = 0$$

Los puntos de curvas verticales son

$$\left({}^{1}/_{2}, {}^{2\pi}/_{3}\right) \ ; \ \left({}^{1}/_{2}, {}^{4\pi}/_{3}\right) \ ; \ (2,0)$$

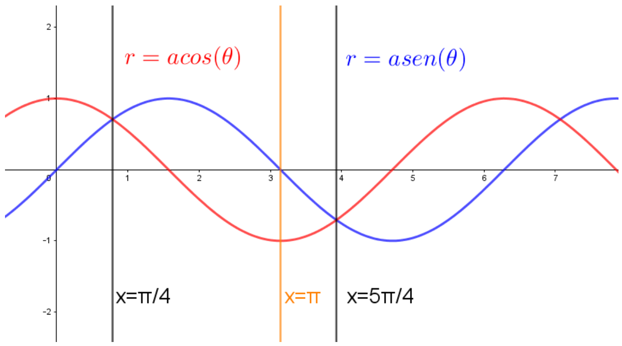
Ejemplo 3

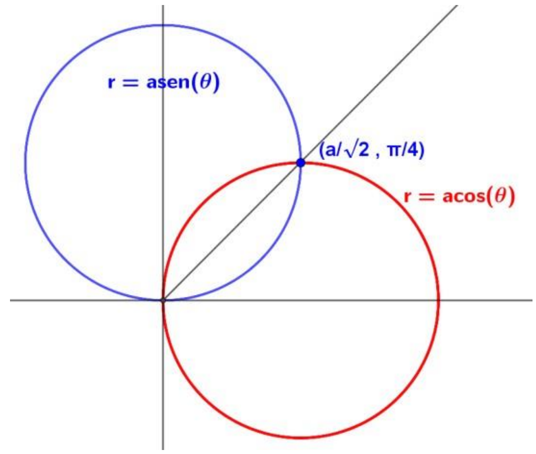
Demuestre que las curvas $r = a\ sen\theta$ y $r = a\ cos\theta$ se cortan en ángulos rectos.

1. Se utiliza la tabla 5.1.a.

1.1. Se sabe que seno y coseno interceptan en $\theta = {}^{\pi}/_{4}$

1.2. Para encontrar el otro ángulo es más factible trazar las gráficas y ubicar el otro ángulo





1.3. Las evaluaciones en los ángulos serán

$$r\left({}^{\pi}/_{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{(para ambos)} \qquad r\left({}^{5\pi}/_{4}\right) = -\frac{a}{\sqrt{2}} \quad \left[\text{mismo punto que } {}^{\pi}/_{4}\right]$$

2. Encontramos la pendiente de la recta tangente para $\boldsymbol{r = a\ sen\theta}$

$$m_1 = \frac{\frac{dr}{d\theta} sen\theta + r\ cos\theta}{\frac{dr}{d\theta} cos\theta - r\ sen\theta} = \frac{\boldsymbol{a\ cos\theta}\ sen\theta + \boldsymbol{a\ sen\theta}\ cos\theta}{\boldsymbol{a\ cos\theta}\ cos\theta - \boldsymbol{a\ sen\theta}\ sen\theta} = \frac{2a\ sen\theta\ cos\theta}{a\ cos^2\theta - a\ sen^2\theta}$$

$$m_1 = \frac{2\ sen\theta\ cos\theta}{cos^2\theta - sen^2\theta} \quad \text{evaluando } m_1\left({}^{\pi}/_{4}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{0} \quad \text{(pendiente vertical)}$$

3. Encontramos la pendiente de la recta tangente para $\boldsymbol{r = a\ cos\theta}$

$$m_2 = \frac{\frac{dr}{d\theta} sen\theta + r\ cos\theta}{\frac{dr}{d\theta} cos\theta - r\ sen\theta} = \frac{\boldsymbol{-a\ sen\theta}\ sen\theta + \boldsymbol{a\ cos\theta}\ cos\theta}{\boldsymbol{-a\ sen\theta}\ cos\theta - \boldsymbol{a\ cos\theta}\ sen\theta} = \frac{-a\ sen^2\theta + a\ cos^2\theta}{-2a\ sen\theta\ cos\theta}$$

$$m_1 = \frac{cos^2\theta - sen^2\theta}{-2\ sen\theta\ cos\theta} \quad \text{evaluando } m_2\left({}^{\pi}/_{4}\right) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{-1} = \frac{0}{-1} = 0 \quad \text{(pendiente horizontal)}$$

4. Como una pendiente es vertical y otra horizontal se demuestra que entre pendientes hay ángulos rectos.

5. También se puede demostrar utilizando $m_1 * m_2 = -1$

$$\frac{2\ sen\theta\ cos\theta}{\cancel{cos^2\theta - sen^2\theta}} * \frac{\cancel{cos^2\theta - sen^2\theta}}{-2\ sen\theta\ cos\theta} = \frac{2\ sen\theta\ cos\theta}{-2\ sen\theta\ cos\theta} = -1$$

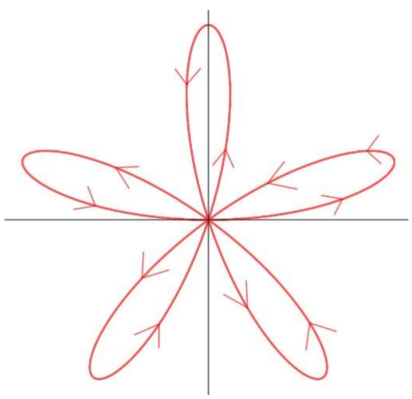
$$-1 = -1 \quad \text{(Demostrado)}$$

4-APLICACIÓN DE ECUACIONES POLARES

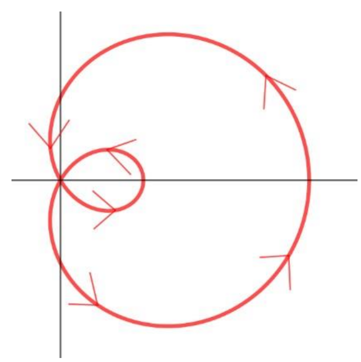
4.3. APLICACIÓN DE ECUACIONES POLARES

En este capítulo se analizarán las aplicaciones de las ecuaciones polares. Debe recordar que las ecuaciones polares son también paramétricas, ya que el radio está en función del ángulo θ. Al ser una ecuación paramétrica tiene también una dirección como la siguiente forma.

$r = a\,sen(5\theta)$



$r = 1 + cos(2\theta)$



Esta dirección de las polares nos servirá para las dos aplicaciones que son: longitud de arco y área encerrada por una polar. Ambas aplicaciones son del tema de integración.

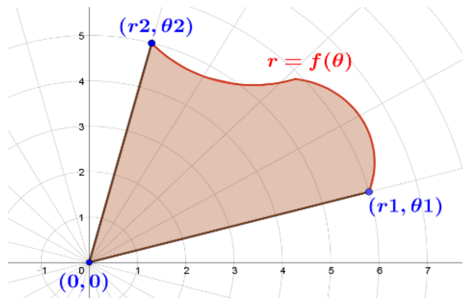
En la portada usted observa a la niña siendo protegida por el lobo. Esto simboliza que, en este punto de este texto, usted ya debe saber trazar gráficas y tener el conocimiento claro de las polares.

4.3.1. Área encerrada

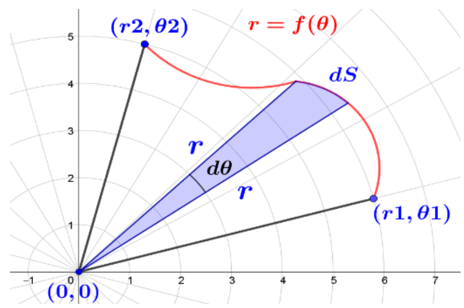
Las curvas polares encierran áreas, a veces entre una curva polar sola o a veces entre dos curvas polares. En ambos casos aprenderemos a calcularlas.

¿De dónde se obtiene la fórmula?

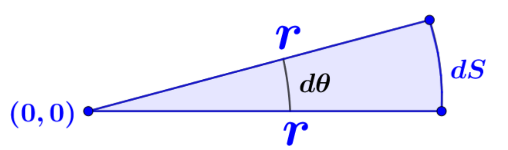
1. Pensemos en la siguiente curva polar que encierra un área desde un ángulo $\theta 1$ a un ángulo $\theta 2$



2. Lo que se hace es ingresar un diferencial de área como la siguiente imagen.



3. Como puede observar, el diferencial de área es un sector circular con el radio $r = f(\theta)$.



4. La fórmula de un sector circular es:

$$A_{\text{círculo}} = \pi r^2 \qquad\qquad A_{\text{sector círcular}} = \frac{\theta}{360°}\,\pi r^2 = \frac{\theta}{2\pi}\,\pi r^2 = \frac{1}{2}\,\theta\, r^2$$

5. El área del diferencial será:

$$dA = \frac{1}{2}\,d\theta\, r^2 = \frac{1}{2}\,r^2 d\theta \qquad\qquad r = f(\theta)$$

6. Integrando el área en términos del ángulo

$$\boxed{A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} r^2\, d\theta} \qquad\qquad \textbf{Ecuación 6.1}$$

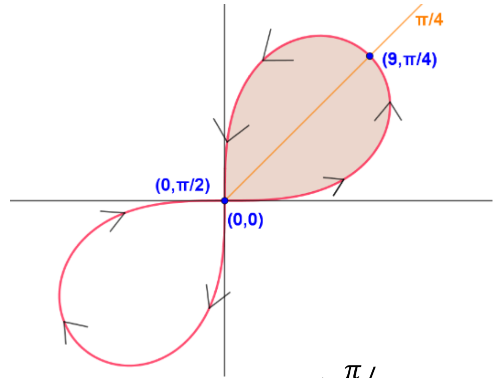
Ejemplo 1

Encuentre el área de la región acotada por las curvas dadas y que están en el sector especificado.

$$r^2 = 9\,sen2\theta \qquad r \geq 0 \qquad 0 \leq \theta \leq {}^{\pi}/_{2}$$

1. La condición $r \geq 0$ serviría para encontrar los ángulos de integración, en este caso **se establecen**.
2. Nos referenciamos a la tabla 5.1.a para verificar la gráfica, donde es una lemniscata. No es necesaria, pero para mayor referencia indicaremos la gráfica y área a encontrar.

$$r^2 = 9\ sen2\theta$$



3. Sustituyendo datos en la ecuación 6.1.

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} r^2\, d\theta$$

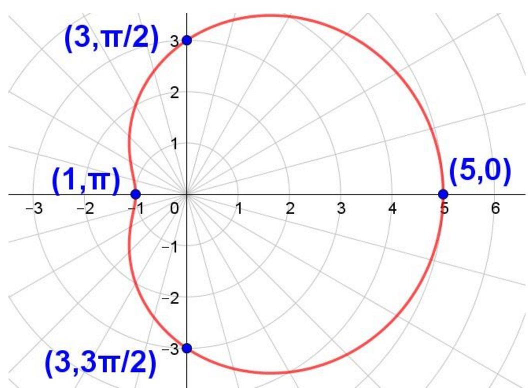
$$A = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} * 9\ sen2\theta\ d\theta = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} sen2\theta\ d\theta = \frac{9}{2} * \frac{-cos(2\theta)}{2} \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{9}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{-1}{2}\right]$$

$$A = \frac{9}{2} = 4.5 \text{ unidades}^2$$

Ejemplo 2

Trace la curva y encuentre el área que encierra $r = 3 + 2\ cos\theta$

1. Tomamos de referencia la tabla 5.1.a para el trazo de la gráfica e identificación del área.



Para una vuelta
$0 \leq \theta \leq 2\pi$

2. Utilizando la ecuación 6.1. planteamos la integral de área

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} r^2\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(3 + 2\ cos\theta)^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 9 + 12cos\theta + 4cos^2\theta\ d\theta$$

2.1. Integrando por aparte

$$A = 4\int cos^2\theta\ d\theta = 4\int \frac{1}{2}[1 + cos2\theta]\ d\theta = 2\left[\theta + \frac{sen2\theta}{2}\right] = 2\theta + sen2\theta$$

2.2. Volviendo a la integral

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 9 + 12cos\theta + 4cos^2\theta\ d\theta = \frac{1}{2}[9\theta + 12sen\theta + 2\theta + sen2\theta] \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}[18\pi + 4\pi]$$

$$A = 11\pi$$

Ejemplo 3

Encuentre el área de la región encerrada por uno de los bucles de la curva $r = 4\,cos\,3\theta$

1. Trazamos la gráfica referenciándonos a la Tabla 1. 5.a. Como n es impar significa que tendremos tres pétalos.

1.1. Se traza la gráfica cartesiana $r = 4\,cos\,3\theta$

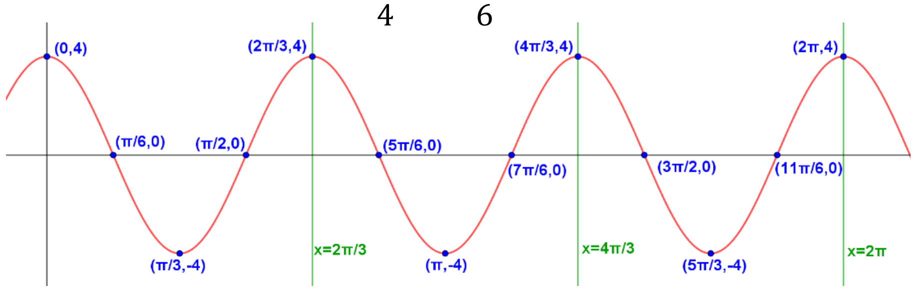
1.2. Su periodo será

$$3 * k = 2\pi$$

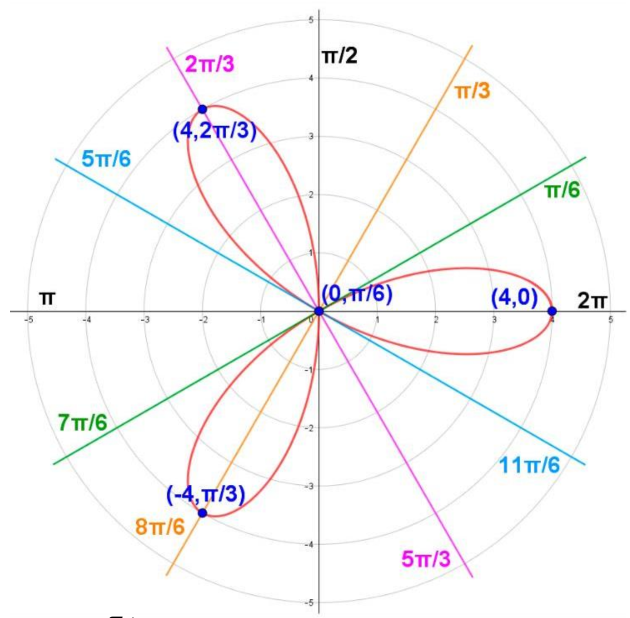
$$k = {}^{2\pi}/_{3}$$

1.3. La gráfica se analizará en cuatro partes:

$$\frac{{}^{2\pi}/_{3}}{4} = \frac{\pi}{6}$$



2. La gráfica polar será, por tanto:

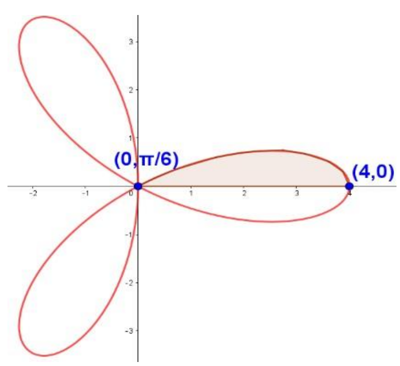


3. Si planteamos la integral obtenemos el área:

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} r^2\, d\theta \quad = \quad \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} (4\,cos\,3\theta)^2\, d\theta$$

4. El área que se planteará será:

Luego se multiplicará por 2



5. Por tanto, el área del bucle es:

$$A = \mathbf{2} * \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} (4\,cos\,3\theta)^2\, d\theta = 16\int_0^{\pi/6} cos^2(3\theta)\, d\theta$$

6. Realizamos una sustitución

$$\boldsymbol{u = 3\theta} \quad \text{Derivamos:} \quad \frac{du}{d\theta} = 3 \quad \text{por tanto:} \quad \boldsymbol{\frac{du}{3} = d\theta}$$

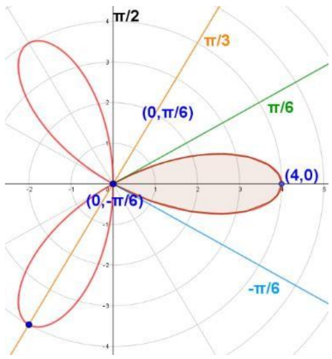
$$\text{cuando} \quad \theta = 0 \;\; u = 0 \quad \text{y cuando} \quad \theta = {}^{\pi}/_{6} \;\; u = {}^{\pi}/_{2}$$

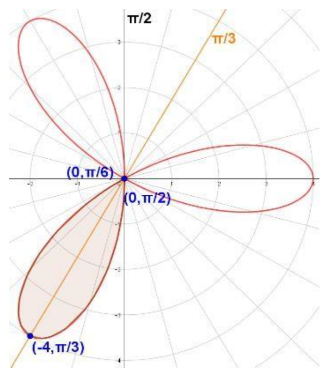
$$A = 16\int_0^{\pi/6} cos^2(\boldsymbol{3\theta})\, \boldsymbol{d\theta} = 16\int_0^{\pi/2} cos^2(\boldsymbol{u})\, \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{3}} = \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2} cos^2(u)\, du = \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}[1 + cos2u]du$$

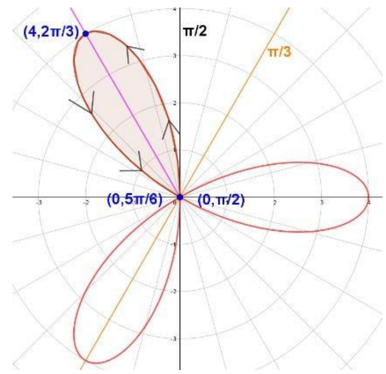
$$A = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} 1 + cos2u\ \ du = \frac{8}{3}\left[\theta + \frac{sen2u}{2}\right] = \frac{8}{3}\theta + \frac{4}{3}\, sen2u \ \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{8}{3} * \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\mathrm{A} = \frac{4\pi}{3} = 4.1888 \text{ unidades}^2$$

Otras formas de resolver el problema







$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} (4\, cos\, 3\theta)^2\, d\theta \qquad A = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{3\pi/2} (4\, cos\, 3\theta)^2\, d\theta \qquad A = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{3\pi/2} (4\, cos\, 3\theta)^2\, d\theta$$

$$A = \frac{4\pi}{3} \qquad A = \frac{4\pi}{3} \qquad A = \frac{4\pi}{3}$$

Ejemplo 4

Encuentre el área de la región encerrada del bucle interno de $r = 1 + 2sen\theta$

1. Comenzamos trazando la gráfica de la función cartesiana con transformación de funciones
   1.1. El periodo será: $\mathrm{k} = 2\pi$
   1.2. Los máximos/mínimos estarán a: $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
   1.3. Analizaremos la gráfica a cada $\frac{\pi}{2}$
   1.4. Para encontrar la raíz resolvemos la ecuación.

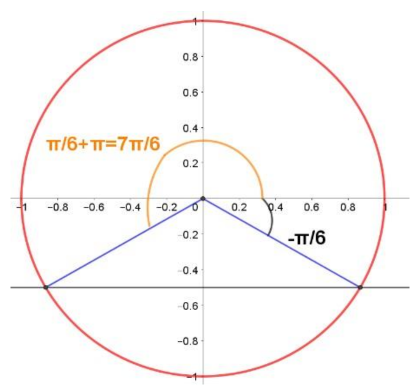
$$0 = 1 + 2sen\theta$$

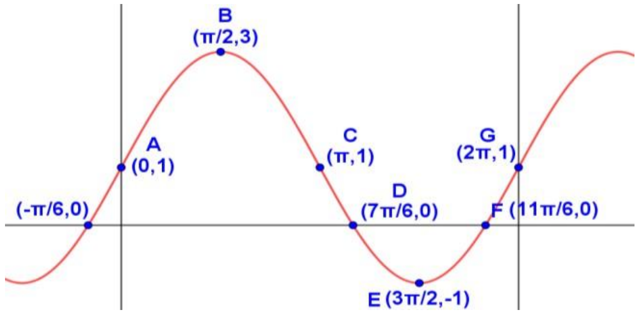
$$sen\theta = {}^{-1}/_{2} \quad \text{Por tanto:} \quad sen^{-1}(-{}^{1}/_{2}) = -{}^{\pi}/_{6}$$

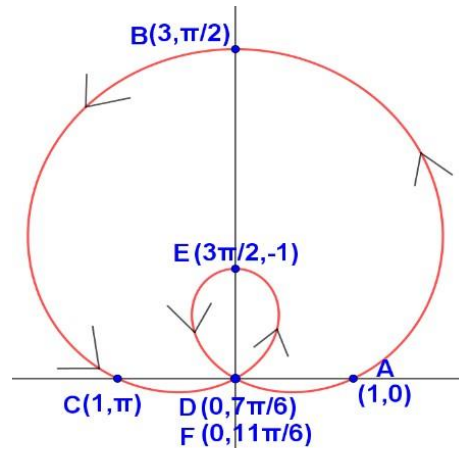
   1.5. Para los ángulos

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$$







2. Trazamos la gráfica polar

3. Debemos encontrar el área que encierra el punto polar **D y F,** los que forman el Bucle interno.

4. Procedemos a utilizar la ecuación 6.1

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta \;=\; \frac{1}{2}\int_{7\pi/6}^{11\pi/6} (1 \,+\, 2sen\theta)^2 \, d\theta \;=\; \frac{1}{2}\int_{7\pi/6}^{11\pi/6} 1 + 4sen\theta + 4sen\theta^2 \, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{7\pi/6}^{11\pi/6} 1 + 4sen\theta + 4 * \frac{1}{2}[1 - cos2\theta] \, d\theta = \frac{1}{2}\int_{7\pi/6}^{11\pi/6} 1 + 4sen\theta + 2 - 2cos2\theta \, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{7\pi/6}^{11\pi/6} 3 + 4sen\theta - 2cos2\theta \, d\theta \;=\; \frac{1}{2}[3\theta - 4cos\theta - sen2\theta] \Bigg|_{7\pi/6}^{11\pi/6}$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{11\pi}{2} - 4cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) - sen\left(\frac{11\pi}{3}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{7\pi}{2} - 4cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) - sen\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right]$$

$$A \;=\; \frac{1}{2}\left[\frac{11\pi}{2} - 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \;-\; \frac{1}{2}\left[\frac{7\pi}{2} + 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$A \;=\; \frac{11\pi}{4} \;-\; \sqrt{3} \;+\; \frac{\sqrt{3}}{4} \;-\; \frac{7\pi}{4} \;-\; \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A \;=\; \pi - 2\sqrt{3} \;+\; \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0.54352 \text{ unidades}^2$$

Ejemplo 5

Encuentre el área de la región que está dentro de la primera curva y fuera de la segunda curva.

$$r^2 \;= 8 \; cos2\theta \qquad r = 2$$

1. Podemos obviar la gráfica cartesiana y directamente trazar la gráfica polar, tomando de referencia la tabla 5.1.a. Siendo una lemniscata y otro círculo de radio 2 con centro en el origen.

1.1. Necesitamos encontrar los puntos de intersección

$$r = 2 \quad \text{por tanto:} \quad r^2 = 4$$

1.2. Sustituyendo el radio al cuadrado del círculo en la lemniscata.

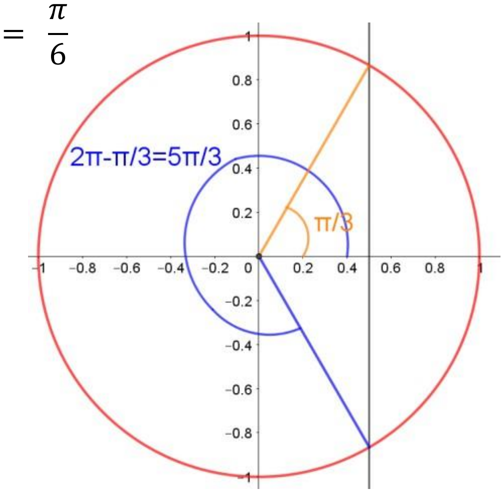
$$r^2 = 8\,cos2\theta \quad \text{con} \quad r^2 = 4$$

$$4 = 8\,cos2\theta$$

$$\text{Despejando} \quad \frac{1}{2} = cos2\theta \quad \text{por tanto el ángulo } 2\theta \text{ será:} \quad 2\theta = cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\theta = \frac{cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{\pi}{6}$$

1.3. Encontrando el otro ángulo.



$$cos2\theta = \frac{1}{2} \quad \text{Encontramos el ángulo } 2\theta$$

El primer ángulo: $2\theta = \frac{\pi}{3}$

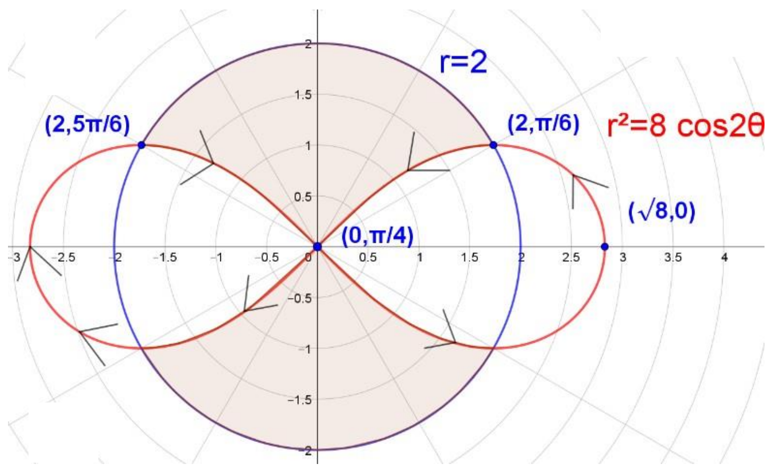
Por tanto: $\theta = \frac{\pi}{6}$

El segundo ángulo: $2\theta = \frac{5\pi}{3}$

Por tanto: $\theta = \frac{5\pi}{6}$

1.4. La gráfica polar y área serán:

NOTA: Esta área no la solicitan, pero se quiere enseñarle a calcular esa parte.



2. La integral estará planteada por:

2.1. Para ello es importante seguir la dirección del parámetro. Vea que, para integrar la primera región, el círculo se define entre $\pi/_6 \leq \theta \leq \pi/2$ pero para la lemniscata, el ángulo para el primer cuadrante se encuentre entre $\pi/_6 \leq \theta \leq \pi/4$. Luego se multiplicará por 4.

$$\acute{A}rea = \acute{A}rea\ mayor - \acute{A}rea\ menos$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2}(2)^2\,d\theta - \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/4} 8\,cos2\theta\,d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2} 2\,d\theta - 4\int_{\pi/6}^{\pi/4} cos2\theta\,d\theta$$

$$A = 2\theta\,\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} - 4 * \frac{sen2\theta}{2}\,\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = 2 * \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right] - 4\left[sen\left(2 * \frac{\pi}{4}\right) - sen\left(2 * \frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} - 2$$

2.2. Solo se encontró el área del primer cuadrante, por lo que se debe multiplicar por 4 para encontrar el área total.

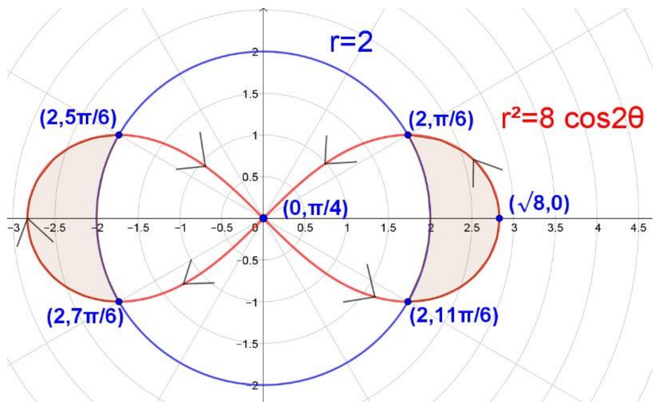
$$A_T = 4 * A$$

$$A_T = 4 * \left[\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} - 2\right] = \frac{8\pi}{3} + 4\sqrt{3} - 8$$

$$A_T = \frac{8\pi}{3} + 4\sqrt{3} - 8 = 7.3058 \text{ unidades}^2$$

3. **Calculando el área solicitada**

3.1. Analizamos de: $0 \leq \theta \leq \pi / 6$ para luego multiplicarla por 4.



3.2. La integral será

$$\acute{A}rea = \acute{A}rea\ mayor - \acute{A}rea\ menos$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} 8\cos 2\theta\, d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} (2)^2\, d\theta = 4\int_0^{\pi/6} \cos 2\theta\, d\theta - \int_0^{\pi/6} 2\, d\theta$$

$$A = 4 * \frac{sen2\theta}{2} - 2\theta = 2[sen2\theta - \theta]\Bigg|_0^{\pi/6} = 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right] = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

3.3. Solo se calculó el primer cuadrante, por lo que el área total será:

$$A_T = 4 * A$$

$$A_T = 4\left[\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right] = 4\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}$$

$$A_T = 4\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3} = 2.7394 \text{ unidades}^2$$

Ejemplo 6

Encuentre el área de la región que está dentro de ambas curvas.

$$r = sen2\theta \qquad r = cos2\theta$$

1. Se comienza trazando la gráfica cartesiana de ambas funciones. El periodo será: $k = \frac{2\pi}{2} = \pi$

    1.1. La intercepción será:

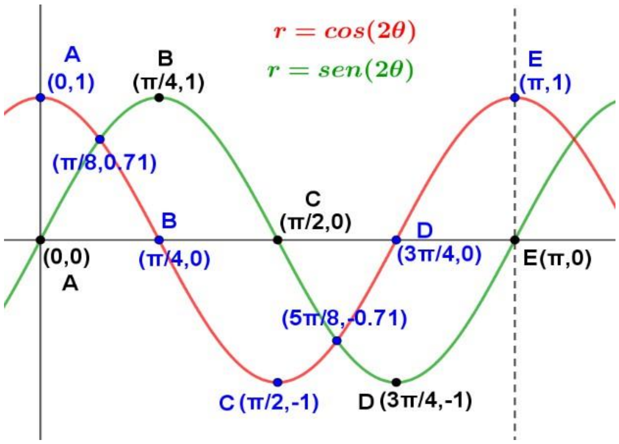
$$sen2\theta \;=\; cos2\theta$$

Sustituyendo: $u = 2\theta \qquad senu = cosu$

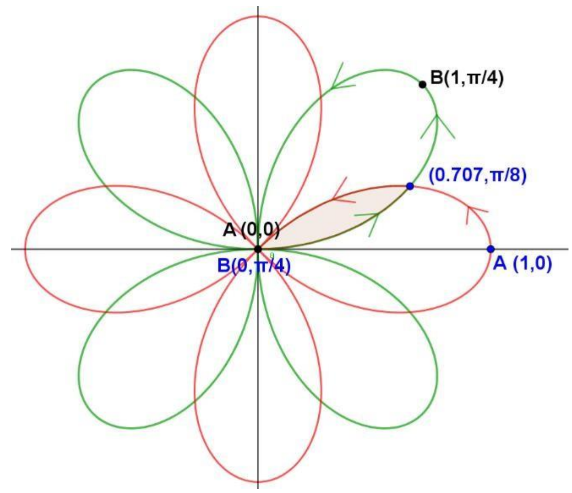
Al resolver: $u = {}^{\pi}/_{4} \qquad \theta = {}^{\pi}/_{8}$

El otro ángulo será: $\theta = {}^{\pi}/_{2} + {}^{\pi}/_{8} = {}^{5\pi}/_{8}$

2. La gráfica polar se encuentra a la derecha



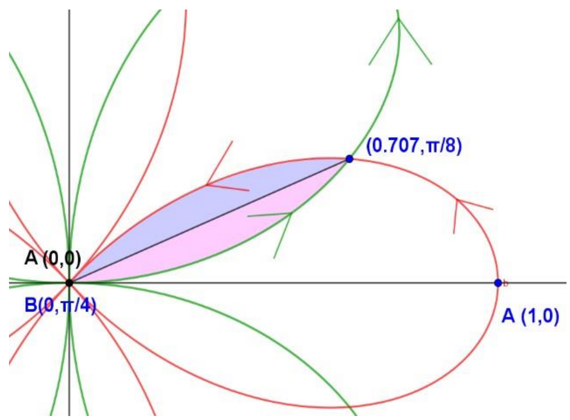
La gráfica cartesiana para ver la dirección



Las gráficas polares con sus direcciones y área encerrada

3. Como puede ver, las áreas no se restan sino se suman

4. Por tanto, analizamos un área encerrada y luego la multiplicamos por 8. Recuerde que se toma en cuenta la dirección del parámetro.



$$A = \frac{1}{2}\int_{\pi/8}^{\pi/4} (\color{red}{cos2\theta})^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/8} (\color{green}{sen2\theta})^2 d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\pi/8}^{\pi/4} cos^2 2\theta \; d\theta + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/8} sen^2 2\theta \; d\theta \;=\; \frac{1}{4}\int_{\pi/8}^{\pi/4} 1 + cos4\theta \; d\theta + \frac{1}{4}\int_{0}^{\pi/8} 1 - cos4\theta \; d\theta$$

$$A = \frac{1}{4}\left[\theta + \frac{sen4\theta}{4}\right]\Bigg|_{\pi/8}^{\pi/4} + \frac{1}{4}\left[\theta - \frac{sen4\theta}{4}\right]\Bigg|_{0}^{\pi/8} = \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{4} + 0 - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right] = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}$$

5. El área total será (Vea que se forman 8 bucles y nosotros calculamos 1. por ende, la multiplicamos por

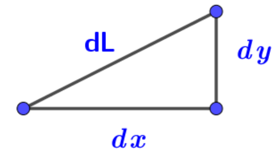
$$A_{\mathrm{T}} \;=\; 8 * A \;= 8 * \left[\frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}\right] \;=\; \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\color{red}{A_{\mathrm{T}} = \frac{\pi}{2} - 1 = 0.57079 \text{ unidades}^2}$$

4.3.2. Longitud de arco

Nuevamente se verá este tema, solamente que ahora orientado a las ecuaciones o gráficas polares. Recuerde que la longitud de arco es encontrar la distancia de una curva.

¿De dónde se obtiene la fórmula?



1. Partimos del diferencial planteado en la sección 1.6

$$(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

2. Recordando que:

$$x = r\,cos\theta \qquad y = r\,sen\theta$$

3. Derivamos respecto a θ utilizando la regla del producto.

$$\boldsymbol{\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}cos\theta - r\,sen\theta} \qquad \boldsymbol{\frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\,sen\theta + r\,cos\theta}$$

4. Retornando al diferencial de longitud

$$(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$$\frac{(dL)^2}{(d\theta)^2} = \frac{(dx)^2}{(d\theta)^2} + \frac{(dy)^2}{(d\theta)^2}$$

$$\left(\frac{dL}{d\theta}\right)^2 = \left(\boldsymbol{\frac{dx}{d\theta}}\right)^2 + \left(\boldsymbol{\frac{dy}{d\theta}}\right)^2$$

$$\left(\frac{dL}{d\theta}\right)^2 = \left(\boldsymbol{\frac{dr}{d\theta}cos\theta - r\,sen\theta}\right)^2 + \left(\boldsymbol{\frac{dr}{d\theta}\,sen\theta + r\,cos\theta}\right)^2$$

$$\left(\frac{dL}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 cos^2\theta - 2rsen\theta cos\theta\frac{dr}{d\theta} + r^2sen^2\theta + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 sen^2\theta + 2rcos\theta sen\theta\frac{dr}{d\theta} + r^2cos^2\theta$$

$$\left(\frac{dL}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 cos^2\theta + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 sen^2\theta - 2rsen\theta cos\theta\frac{dr}{d\theta} + 2rcos\theta sen\theta\frac{dr}{d\theta} + r^2cos^2\theta + r^2sen^2\theta$$

$$\left(\frac{dL}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 cos^2\theta + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 sen^2\theta - \cancel{2rsen\theta cos\theta\frac{dr}{d\theta}} + \cancel{2rcos\theta sen\theta\frac{dr}{d\theta}} + r^2cos^2\theta + r^2sen^2\theta$$

$$\left(\frac{dL}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 [cos^2\theta + sen^2\theta] + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2[cos^2\theta + sen^2\theta]$$

$$\left(\frac{dL}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2$$

5. Se saca raíz cuadrada de ambos lados

$$\frac{dL}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}$$

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta$$

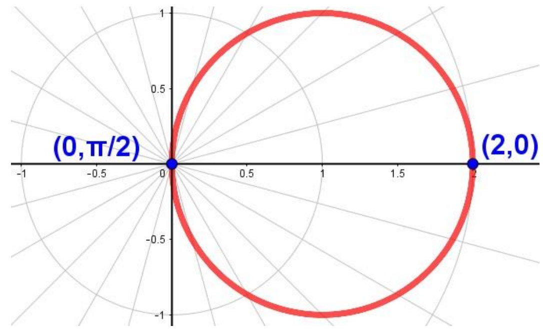
6. La variable ahí es el ángulo θ, por lo que se integra desde θ_1 a θ_2

$$\boxed{L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\;\; d\theta} \qquad \textbf{Ecuación 6.2}$$

Ejemplo 1

Encuentre la longitud exacta de la curva polar: $r = 2\cos\theta \quad 0 \le \theta \le \pi$

1. Trazamos la gráfica utilizando la tabla 5.1.a



   Note que para darle una vuelta completa a la gráfica el ángulo está en
   $0 \le \theta \le \pi$

2. Derivamos r respecto al ángulo θ

$$\frac{dr}{d\theta} = -2\, sen\theta$$

3. Utilizando la ecuación 6.2

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta$$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{(-2\, sen\theta)^2 + (2\cos\theta)^2}\, d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{4\, sen^2\theta + 4\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{4[sen^2\theta + \cos^2\theta]}\, d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{4}\, d\theta = \int_0^{\pi} 2\, d\theta = 2\theta \Big|_0^{\pi} = 2\pi$$

4. La respuesta será: Siendo un círculo y de radio 1 ($S = 2\pi * radio$)

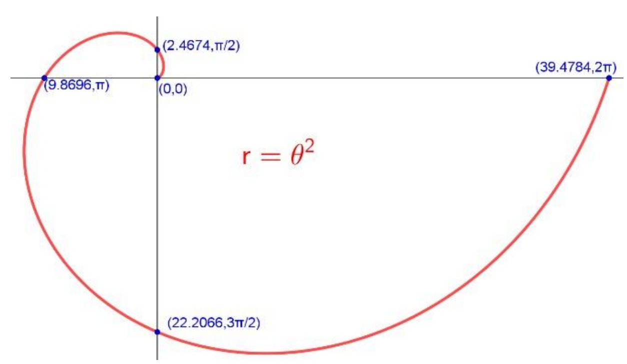
5. La respuesta será:

$$L = 2\pi$$

Ejemplo 2

Encuentre la longitud exacta de la curva polar: $r = \theta^2 \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

1. En base a la tabla 5.1.a trazamos la gráfica para mejor referencia.



2. Se deriva el r respecto a θ

$$\frac{dr}{d\theta} = 2\theta$$

3. Se sustituyen los datos en la ecuación 6.1.

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(2\theta)^2 + (\theta^2)^2}\, d\theta$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\theta^2 + \theta^4}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2[4 + \theta^2]}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \theta\sqrt{4 + \theta^2}\, d\theta$$

3.1. Se realiza una sustitución

$$\boldsymbol{m = 4 + \theta^2} \qquad \text{Derivando} \quad \frac{dm}{d\theta} = 2\theta \quad \text{por tanto:} \quad \boldsymbol{\frac{dm}{2\theta} = d\theta}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \theta\sqrt{\boldsymbol{4 + \theta^2}}\ \boldsymbol{d\theta} = \int_4^{4+4\pi^2} \theta\,\sqrt{\boldsymbol{m}}\ \boldsymbol{\frac{dm}{2\theta}} = \frac{1}{2}\int_4^{4+4\pi^2} \sqrt{m}\ dm = \frac{1}{3}m^{3/2}\Bigg|_4^{4+4\pi^2}$$

4. La respuesta será

$$L = \frac{1}{3}\sqrt{(4+4\pi^2)^3} - \frac{1}{3}\sqrt{4^3} = \frac{1}{3}\left[\sqrt{(4+4\pi^2)^3} - 8\right]$$

$$L = \frac{1}{3}\left[\sqrt{(4+4\pi^2)^3} - 8\right] = 92.8962 \text{ unidades}$$

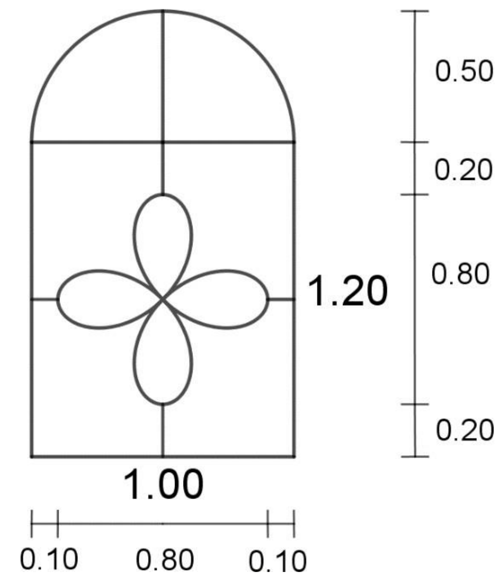
A continuación, veremos dos ejercicios planteados y resueltos por el Ingeniero Humberto Osvaldo Hernández Sac orientados a la vida real cotidiana en Quetzaltenango.

Ejemplo 1

Un herrero desea saber cuántas varillas de hierro debe comprar para hacer 24 ventanas con la siguiente forma y medidas.

a) Sabiendo que una varilla de hierro equivale a 6 metros de longitud, calcule cuantas varillas necesitará el herrero.

b) Si cada varilla de hierro tiene un valor de Q20.00 de 3/8" y corrugado de grado 40. ¿Cuánto saldrá la materia prima?



1. La longitud por cada ventanal estará definida por:

$$\mathrm{L} = 2(1.20) + 2(1.00) + 2(0.20) + 2(0.10) + 0.50 + \frac{2\pi(0.50)}{2} + \mathrm{L_{Rosa}}$$

$$\mathrm{L} = 7.071 + \mathrm{L_{Rosa}}$$

2. Calculando la longitud de la rosa
   - 2.1. Para modelar la ecuación polar de la rosa necesitamos referenciarnos a la tabla 5.1.a

     $r = a\cos 2\theta$ debido a que tiene cuatro pétalos

     $r = 0.4\cos 2\theta$ el valor de a que es la mitad de 0.8

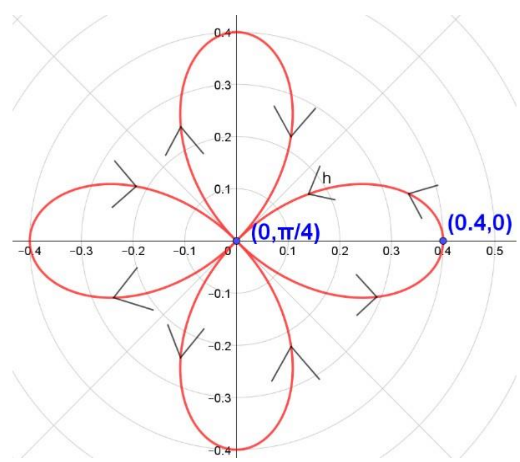
   - 2.2. Se traza la gráfica
   - 2.3. Se calcula la longitud de la rosa entre

     $0 \le \theta \le \pi/4$ Luego se multiplicará por 8

   - 2.4. La derivada de r es:

     $$\frac{dr}{d\theta} = -0.8\, sen 2\theta$$

   - 2.5. La integral de longitud será:



$$\mathrm{L_1} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta$$

$$\mathrm{L_1} = \int_0^{\pi/4} \sqrt{(-0.8\, sen 2\theta)^2 + (0.4\cos 2\theta)^2}\, d\theta$$

$$\mathrm{L_1} = \int_0^{\pi/4} \sqrt{0.64 sen^2 2\theta + 0.16\cos^2 2\theta}\, d\theta = 0.4\int_0^{\pi/4} \sqrt{4 sen^2 2\theta + \cos^2 2\theta}\, d\theta$$

La integral anterior no se puede resolver por métodos directos, sino por métodos de aproximación.

$$L_{Rosa} = 8 * L_1 = 8 * 0.484 = 3.872$$

3. Retornando a la longitud completa

$$L = 7.071 + L_{Rosa}$$
$$L = 7.071 + 3.872$$
$$L = 10.943$$

4. El problema nos indica que son 24 ventanas, por tanto:

$$L_T = 24 * 10.943 = 262.632$$

5. Calculando la cantidad de varillas

$$262.632 \text{ m} * \frac{1 \text{ varilla}}{6 \text{ m}} = 43.772 \text{ varillas}$$

6. La respuesta se tendrá al aproximar una cantidad útil

$$44 \text{ varillas}$$

7. Para el inciso b) donde nos solicitan averiguar el precio:

$$44 \text{ varillas} * \frac{Q20.00}{1 \text{ varilla}} = Q880.00$$

$$Q880.00$$

Ejemplo 2

Radiación de una antena: La radiación proveniente de una antena de transmisión no es uniforme en todas las direcciones. La intensidad de la transmisión proveniente de una determinada antena se describe por medio del modelo $r = a\,cos^2\theta$.

a) Transformar la ecuación polar a la forma rectangular.
b) Utilizar una herramienta de graficación para trazar el modelo con $a = 4$ y $a = 6$
c) Hallar el área de la región geográfica que se encuentra entre las dos curvas del inciso b).

Inciso a)

1. Teniendo la ecuación modelada

$$\boldsymbol{r = a\,cos^2\theta}$$

2. Recordamos que:

$$x = r\,cos\theta \quad ; \quad y = r\,sen\theta \quad ; \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{por tanto:} \quad \boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

3. Igualando radios

$$\boldsymbol{r = r}$$
$$\boldsymbol{\sqrt{x^2 + y^2} = a\,cos^2\theta}$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} = a\,\frac{x^2}{r^2} \qquad \text{Despejando:} \quad r^2\sqrt{x^2 + y^2} = a\,x^2$$

$$r^2\sqrt{x^2+y^2} = a\,x^2$$
$$(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = a\,x^2 \quad => \quad (x^2+y^2)^{3/2} = a\,x^2$$

4. Elevando ambos lados a la $2/3$ para poder despejar y

$$\left[(x^2+y^2)^{3/2}\right]^{2/3} = [a\,x^2]^{2/3}$$
$$x^2+y^2 = a^{2/3}\,x^{4/3}$$
$$y^2 = a^{2/3}\,x^{4/3} - x^2$$

5. Sacando raíz cuadrada

$$y = \pm\sqrt{a^{2/3}\,x^{4/3} - x^2}$$

Inciso b)

6. Para la gráfica debemos ver la tabla 5.1.a

6.1. Demostrando simetría

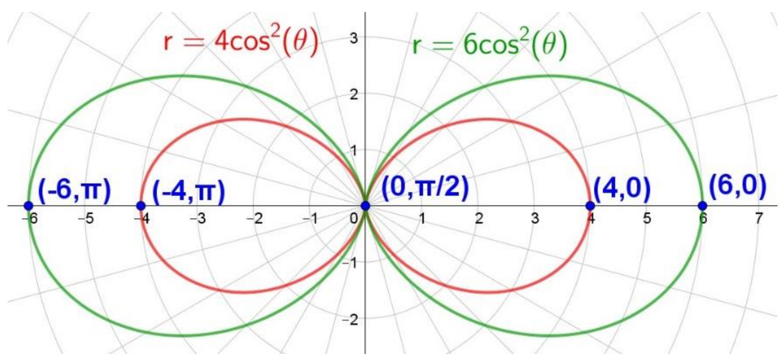
Verificando: $(r,\theta) = (r,-\theta)$ simetría respecto al eje polar

$$r = a\,cos^2(-\theta) = a(\cos(-\theta))^2 = acos^2\theta \qquad \textbf{Sí lo es}$$

Verificando: $(r,\theta) = (r,\pi-\theta)$ simetría respecto a $\pi/2$

$$r = a\,cos^2(\pi-\theta)$$
$$r = a\,[cos\pi\,cos\theta + sen\pi\,sen\theta]^2$$
$$r = a\,[-\,cos\theta]^2$$
$$r = a\,cos^2(\theta) \qquad \textbf{Sí lo es}$$

6.2. La gráfica será



Inciso c)

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\,d\theta - \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} (\mathbf{6cos^2\theta})^2\,d\theta - \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} (\mathbf{4cos^2\theta})^2\,d\theta$$

$$A = 18\int_0^{\pi/2} cos^4\theta\,d\theta - 8\int_0^{\pi/2} cos^4\theta\,d\theta = 10\int_0^{\pi/2} cos^4\theta\,d\theta = \frac{15}{8}\pi$$

$$A = \frac{15}{8}\pi = 5.8905 \text{ unidades}^2$$

5. SUCESIONES Y SERIES

El ser humano apareció como un bebe en un canasto que dejan en un orfanato. Sin saber ¿Cómo aparecimos acá?, ¿Quiénes somos? ¿Cómo apareció el universo?

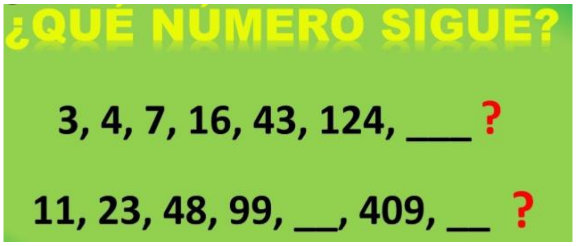
Tuvimos que dilucidarlo. Nuestra ventaja fue nuestra inteligencia y sobre todo la habilidad de reconocer patrones. Quienes eran buenos para detectar presas y depredadores y para distinguir las plantas venenosas de las nutritivas, tenían más opciones de vivir y reproducirse. Con la lectura del cielo se referenciaban los antiguos para saber cuándo sembrar, cuándo cosechar y cuándo vendrían épocas de refugiarse.

En este capítulo aprenderemos a identificar patrones y a predecirlos. Un ejemplo podría ser 1,2,3,4,5… Es evidente que ese patrón es a cada número y que el siguiente número a 8 será 9. Con esa predicción podemos realizar una sucesión.

Posterior a ello aprenderemos a calcular series que no son más que las sumas de las sucesiones.

En la portada se observa los defines volando entre las nubes de manera hermosa he imaginaria. Pues eso mismo pensamos con las series y sucesiones, que son algo imaginarias y difíciles de entender. En este capítulo usted comprenderá que no es así y que son amistosas y divertidas.

Supongo que usted habrá visto este tipo de publicaciones en Facebook o cualquier otra red social.



Algunas personas comienzan a adivinar, en ese proceso de adivinar se distraen y comparten un rato lindo. Pero estas publicaciones tienen una ciencia llamada sucesión. A continuación, veremos la teoría y ejemplos de estas.

5.1. Sucesiones

Una sucesión es una función como las estudiadas en precálculo, donde se relaciona una variable dependiente (dominio) con una variable independiente (contradominio). En el eje del dominio tendremos n que serán enteros positivos y en el eje del contradominio tendremos elementos.

Dominio: $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots n\}$ Enteros positivos de una sucesión

Contradominio: $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots a_n\}$ También llamados elementos

Esta relación es a la que se le llama sucesión expresada matemáticamente como:

$$\boxed{a_n = \{f(n)\}}$$

Otra forma de expresar una sucesión es con la forma:

$$a_n = \{f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), \ldots f(n)\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots a_n\}$$

Al ser una función, también tiene una gráfica trazándose de igual manera con referencia a un plano cartesiano y ubicando en el eje de las abscisas n y en el eje de las ordenadas a_n.

Las sucesiones las clasificamos en **finitas** e **infinitas.** Para ello vea el siguiente ejemplo, notándose que una serie infinita es la que no tiene límite.

Sucesiones finitas: $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

Sucesiones infinitas: $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots 2n\}$

Ejemplo 1

Describa y trace la gráfica de los primeros 8 términos de la sucesión

$$a_n = \left\{\frac{2n^3 - 9n^2 + 19n + 6}{6}\right\}$$

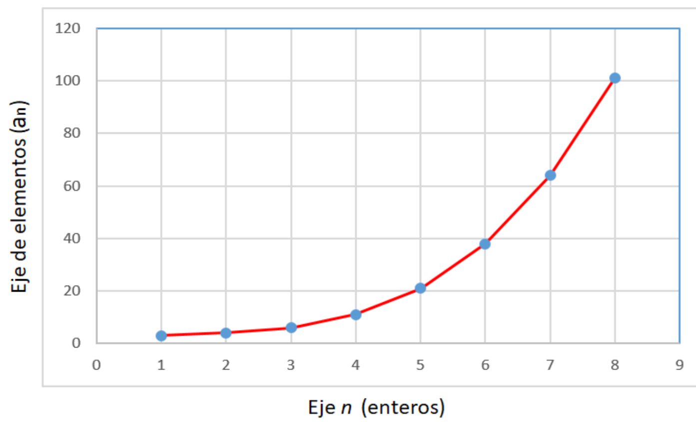
1. Como una función, podemos trazar una tabla que relacione y ubique los puntos.

n	$\frac{2n^3-9n^2+19n+6}{6}$
1	3
2	4
3	6
4	11
5	21
6	38
7	64
8	101

2. Teniendo la imagen podemos contestar

Viendo nuestra tabla, el número siguiente a 11 es 21 ya que con $(1{,}3)$ $(2{,}4)$ $(3{,}6)$ $(4{,}11)$ $(5{,}21)$

3. Procedemos a trazar nuestra gráfica, ubicando nuestros puntos de la tabla del paso 1.



5.1.1. Secuencias

Una secuencia es utilizada como la única diferencia que utiliza funciones por partes para poder trazar una secuencia como:

$$a_n = 2\,, \frac{2}{3}\,, 2\,, \frac{4}{5}\,, 2\,, \frac{6}{7}\,, 2, \frac{8}{9}$$

En el ejemplo anterior puede notar como es una sucesión, pero combinada con una secuencia. Para poder predecir números y darle un lenguaje a este tipo de sucesiones, se realiza una función por partes.

Ejemplo 2

Analice la secuencia dada por:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \dfrac{n-1}{n} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

1. Comenzamos a evaluar con $n = 1$. Siendo n número impar y respetando la función

$$a_1 = 1$$

2. Continuamos la evaluación con $n = 2$. Siendo n número par y respetando la función
$$a_2 = f(2) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

3. Continuamos la evaluación con $n = 3$. Siendo n número impar y respetando la función
$$a_3 = 1$$

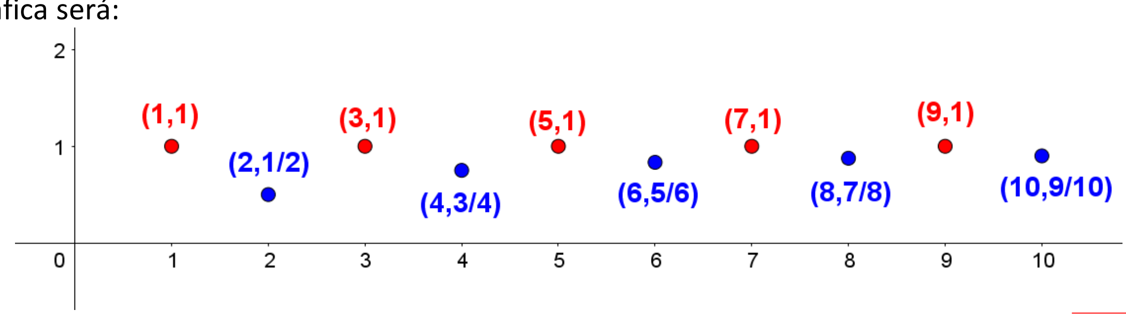
4. Continuamos la evaluación con $n = 4$. Siendo n número par y respetando la función
$$a_4 = f(4) = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$

5. Continuamos la evaluación con $n = 5$. Siendo n número impar y respetando la función
$$a_5 = 1$$

6. Continuamos la evaluación con $n = 6$. Siendo n número par y respetando la función
$$a_6 = f(6) = \frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}$$

7. Procedemos a armar la secuencia
$$a_n = 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{6}, \ldots \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \dfrac{n-1}{n} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

8. Su gráfica será:



5.1.2. Convergencia y divergencia en las sucesiones

Hemos visto que las sucesiones son funciones, por tanto, al ser una función también se pueden evaluar por medio del límite. Recuerde que un límite es ver qué pasa antes y después de un punto a evaluar expresado como:
$$\lim_{n \to a} a_n = L \quad (L \text{ es el límite})$$

Un límite en especial que nos interesa evaluar es el límite al infinito. Este límite sirve para ver la tendencia de una función cuando se va haciendo demasiado grande (asíntota horizontal), expresada matemáticamente:
$$\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = L \quad (L \text{ es el límite})}$$

1. Si el límite existe: Dando un número racional o un número en concreto se dice que la sucesión $\boldsymbol{a_n}$ **es converge**
2. Si el límite no existe: Dando como resultado infinito (∞) o que no exista definitivamente $(\nexists)$ se dice que la sucesión $\boldsymbol{a_n}$ **es divergente.**

Para resolver este tipo de límites debe recordar las identidades de límite:

1. $\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n^a} = 0 \quad a > 0$ 2. $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ 3. $\lim_{n\to\infty} \frac{sen(n)}{n} = 0$ 4. $\lim_{n\to 0} \frac{sen(n)}{n} = 1$

Para resolver este tipo de límites debe recordar las propiedades de límites:

5. $\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$ 6. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n * \lim_{n\to\infty} b_n$ 7. $\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$

Ejemplo 1

Escriba los cuatro primeros términos de la secuencia y determine si es convergente o divergente. Si converge, encuentre su límite.

$$a_n = \left\{\frac{3-2n^2}{n^2-1}\right\}$$

1. Procedemos a evaluar los primeros 4 términos.

$$a_1 = \frac{3-2(1)^2}{(1)^2-1} = \frac{1}{0} \text{ (Forma indeterminada)} \qquad a_2 = \frac{3-2(2)^2}{(2)^2-1} = -\frac{5}{3}$$

$$a_3 = \frac{3-2(3)^2}{(3)^2-1} = -\frac{15}{8} \qquad a_4 = \frac{3-2(4)^2}{(4)^2-1} = -\frac{29}{15}$$

2. Evaluamos el límite para verificar si converge o no la sucesión.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3-2n^2}{n^2-1}$$

2.1. Multiplicamos y dividimos por el inverso del término principal $(1/n^2)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3-2n^2}{n^2-1} * \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^2}-\frac{2n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^2}-2}{1-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\frac{3}{n^2}}-2}{1-\cancel{\frac{1}{n^2}}} = \frac{-2}{1} = -2$$

2.2. Al haber evaluado el límite y al haber obtenido un número racional como respuesta, se dice que:

La sucesión es convergente

Ejemplo 2

Escriba los cuatro primeros términos de la secuencia y determine si es convergente o divergente. Si converge, encuentre su límite.

$$a_n = \left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}-n}\right\}$$

1. Procedemos a evaluar los primeros 4 términos solicitados.

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \qquad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2^2+1}-2} = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{3^2+1}-3} = \frac{1}{\sqrt{10}-3} \qquad a_4 = \frac{1}{\sqrt{4^2+1}-4} = \frac{1}{\sqrt{17}-4}$$

2. Evaluamos el límite para verificar si converge o no la sucesión.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}-n}$$

2.1. Racionalizamos el denominador utilizando $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}-n} * \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n^2+1-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1}+n = \infty$$

2.2. La respuesta nos ha dado infinito. Por no ser un número en concreto se dice que:

La sucesión es divergente

Ejemplo 3

Escriba los cuatro primeros términos de la secuencia y determine si es convergente o divergente. Si converge, encuentre su límite.

$$a_n = \left\{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n\right\}$$

1. Se plotean los cuatro primeros términos

$$a_1 = \left(1+\frac{1}{3(1)}\right)^1 = \frac{4}{3} \qquad a_2 = \left(1+\frac{1}{3(2)}\right)^2 = \frac{49}{36}$$

$$a_3 = \left(1+\frac{1}{3(3)}\right)^3 = \frac{1{,}000}{729} \qquad a_4 = \left(1+\frac{1}{3(4)}\right)^4 = \frac{28{,}561}{20{,}736}$$

2. Evaluamos el límite para verificar si converge o no la sucesión.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^n$$

2.1. Procedemos a transformar.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{\frac{3n}{3}} = \left[\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{\frac{1}{3}} = (e)^{\frac{1}{3}}$$

2.2. Tomamos como base la identidad del límite que expresa.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \text{Siendo que es igual que:} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{4n}\right)^{4n} = e$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{8n}\right)^{8n} = e \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = e \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}\,n}\right)^{\sqrt{2}\,n} = e$$

2.3. La respuesta será:

$$\sqrt[3]{e} = 1.395612$$

La serie converge

5.1.3. Sucesiones monótonas y acotadas

Algunas sucesiones tienen características especiales. Las características a juzgar serán:

1. Si es creciente
2. Si es decreciente
3. Si es monótona
4. Si no es monótona
5. Si es acotada
6. Si no es acotada

A. Sucesión creciente o decreciente

- Se dice que una sucesión es creciente si se cumple que:

$$a_n \leq a_{n+1} \qquad \text{para toda } n$$

- Se dice que una sucesión es decreciente si se cumple:

$$a_n \geq a_{n+1} \qquad \text{para toda } n$$

- Si la sucesión se mantiene para todo valor de n creciente o decreciente entonces se dice que la sucesión es monótona (se mantiene) y si por intervalos es creciente y por otros es decreciente, entonces se dice que es no monótona.

Ejemplo 1

Determinar si la secuencia dada es creciente, decreciente o no monótona.

$$a_n = \left\{\frac{3n-1}{4n+5}\right\}$$

1. Debemos comparar a_n con a_{n+1}. En nuestro problema tenemos ya a_n por tanto obtenemos a_{n+1}

$$a_{n+1} = \left\{\frac{3(n+1)-1}{4(n+1)+5}\right\} = \left\{\frac{3n+3-1}{4n+4+5}\right\} = \left\{\frac{3n+2}{4n+9}\right\}$$

2. Debemos verificar que los valores de n la desigualdad se cumple o no.

$$a_n \leq a_{n+1} \text{ (comparación creciente)}$$

$$\frac{3n-1}{4n+5} \leq \frac{3n+2}{4n+9}$$

$$(3n-1)\,(4n+9) \leq (3n+2)\,(4n+5)$$

$$\cancel{12n^2} - 4n + 27n - 9 \leq \cancel{12n^2} + 8n + 15n + 10$$

$$23\,n - 9 \leq 23n + 10$$
$$-9 \leq 10$$

Se cumple para cualquier valor, por tanto, concluimos que la sucesión es creciente para todo valor y al ser creciente para todo valor también es monótona.

Creciente y monótona

Ejemplo 2

Determinar si la secuencia dada es creciente, decreciente o no monótona.

$$a_n = \left\{\frac{1-2n^2}{n^2}\right\}$$

1. Debemos comparar a_n con a_{n+1}. En este problema tenemos ya a_n por tanto obtenemos a_{n+1}

$$a_{n+1} = \left\{\frac{1-2(\boldsymbol{n+1})^2}{(\boldsymbol{n+1})^2}\right\} = \left\{\frac{1-2(n^2+2n+1)}{n^2+2n+1}\right\} = \left\{\frac{1-2n^2-4n-2}{n^2+2n+1}\right\} = \left\{\frac{-2n^2-4n-1}{n^2+2n+1}\right\}$$

2. Debemos verificar ¿para qué valores de n ? la desigualdad se cumple.

$$a_n \le a_{n+1} \text{ (comparación creciente)}$$

$$\frac{1-2n^2}{n^2} \le \frac{-2n^2-4n-1}{n^2+2n+1}$$

$$(1-2n^2)(n^2+2n+1) \le (-2n^2-4n-1)(n^2)$$

$$n^2+2n+1-2n^4-4n^3-2n^2 \le -2n^4-4n^3-n^2$$

$$-\cancel{2n^4}-\cancel{4n^3}-\cancel{n^2}+2n+1 \le -\cancel{2n^4}-\cancel{4n^3}-\cancel{n^2}$$

$$2n+1 \le 0$$

$$n \le {}^{-1}/_{2}$$

3. Para que la sucesión sea creciente, n debe ser igual o menor a -0.5 pero recuerde que n debe ser un entero positivo, por tanto, concluimos que la sucesión es:

Decreciente y monótona

Ejemplo 3

Determinar si la secuencia dada es creciente, decreciente o no monótona.

$$a_n = \left\{\cos\frac{1}{3}n\pi\right\}$$

1. Debemos comparar a_n con a_{n+1}. En nuestro problema tenemos ya a_n por tanto obtenemos

$$a_{n+1} = \left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}(n+1)\right)\right\} = \left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{3}\right)\right\} = \left\{cos\frac{\pi}{3}n * cos\frac{\pi}{3} - sen\frac{\pi}{3}n * sen\frac{\pi}{3}\right\}$$

$$a_{n+1} = \left\{\frac{1}{2}\,cos\frac{\pi}{3}n - \frac{\sqrt{3}}{2}\,sen\frac{\pi}{3}n\right\}$$

2. Debemos verificar para que valores de n la desigualdad se cumple o no.

$$a_n \le a_{n+1} \text{ (comparación creciente)}$$

$$\cos\frac{1}{3}n\pi \le \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}n - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}n$$

$$\cos\frac{1}{3}n\pi \;\leq\; \frac{1}{2}\,cos\frac{\pi}{3}n - \frac{\sqrt{3}}{2}\,sen\frac{\pi}{3}n$$

$$\cos\frac{1}{3}n\pi - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}n \;\leq\; -\frac{\sqrt{3}}{2}\,sen\frac{\pi}{3}n$$

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}n \;\leq\; -\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{sen}\frac{\pi}{3}n$$

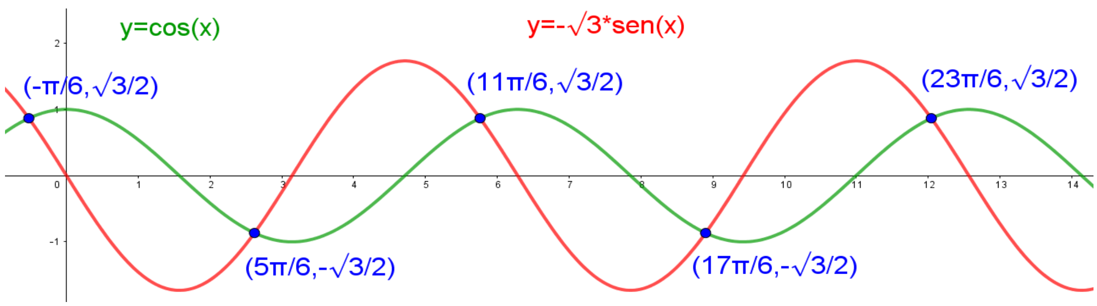
$$\cos\frac{\pi}{3}n \;\leq\; -\sqrt{3}\,\text{sen}\frac{\pi}{3}n$$

2.1. Para encontrar el intervalo podríamos realizar una sustitución

$$x = \frac{\pi}{3}n$$

$$\cos x \;\leq\; -\sqrt{3}\,\text{sen}\,x \quad \text{(para que sea creciente)}$$

2.2. Para un intervalo aproximado, se realiza una gráfica de ambas funciones



2.3. La sucesión es creciente en

$$\frac{5}{6}\pi \;\leq\; x \;\leq\; \frac{11\pi}{6} \quad ; \quad \frac{17}{6}\pi \;\leq\; x \;\leq\; \frac{23\pi}{6} \qquad \text{(para que sea creciente)}$$

Entonces despejando para n: $n = \dfrac{3x}{\pi}$

$$\frac{5}{2} \leq n \leq \frac{11}{2} \quad ; \quad \frac{17}{2} \leq n \leq \frac{23}{2} \qquad \text{(para que sea creciente)}$$

3. Para que sea creciente se debe cumplir con intervalos. Para que sea decreciente se debe cumplir con otros intervalos también, por tanto, al tener de ambas clasificaciones se dice:

No monótona

B. Sucesión acotada

Se dice que una sucesión es acotada si y solo si tiene una cota superior y una cota inferior. Ahora veamos qué es una cota superior y una inferior.

- El número C recibe el nombre de cota inferior de la sucesión si se cumple que

$$C \leq a_n$$

- El número D recibe el nombre de cota superior de la sucesión si se cumple que

$$D \geq a_n$$

A continuación, veremos que el valor de cotas depende si la sucesión es creciente/decreciente.

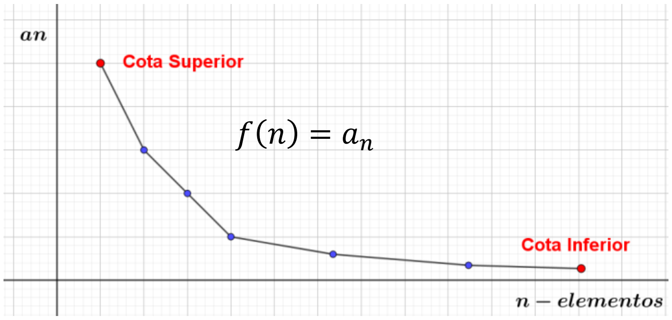


Imagen sucesión decreciente

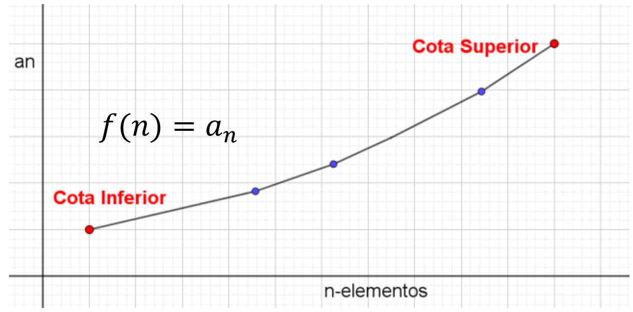


Imagen sucesión creciente

Con ambas imágenes podemos deducir:

- Si una sucesión es creciente y supongamos que D es una cota superior
$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq D$$
- Si una sucesión es decreciente y supongamos que C es una cota inferior de la misma.
$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq C$$

De estos dos teoremas de cotas se obtiene un teorema general que indica que

- Una sucesión monótona acotada es convergente.
- Una sucesión monótona convergente es acotada.

Ejemplo 1

Determine si la secuencia que se indica es acotada.

$$a_n = \left\{\frac{n^2+3}{n+1}\right\}$$

1. Procedemos a evaluar el límite al infinito para ver
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{n+1} * \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\infty}{1} = \infty$$

2. Al no converger el límite, se dice que la sucesión no es acotada. Debido a que tiene cota inferior siendo $a_1 = 2$ pero no tiene cota superior porque es infinita.

No acotada

Ejemplo 2

Determine si la secuencia converge identificando si es acotada y si es monótona.

$$a_n = \left\{\frac{3-2n^2}{n^2-1}\right\}$$

1. Este problema se había resuelto en el ejemplo 1 del tema convergencia/divergencia. Ahora se debe utilizar el teorema de serie acotada y monotonía
$$a_{\boldsymbol{n+1}} = \left\{\frac{3-2(\boldsymbol{n+1})^2}{(\boldsymbol{n+1})^2-1}\right\} = \left\{\frac{3-2(n^2+2n+1)}{n^2+2n+1-1}\right\} = \left\{\frac{-2n^2-4n+1}{n^2+2n}\right\}$$

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{(teorema de creciente)}$$

$$\frac{3-2n^2}{n^2-1} \leq \frac{-2n^2-4n+1}{n^2+2n}$$

$$(3-2n^2)(n^2+2n) \ \leq \ (n^2-1)(-2n^2-4n+1)$$

$$3n^2+6n-2n^4-4n^3 \ \leq -2n^4-4n^3+n^2+2n^2+4n-1$$
$$6n \leq \ 4n-1$$
$$2n \leq \ -1$$
$$n \leq \ -\frac{1}{2}$$

2. Debe recordar que el valor de n debe ser en todo momento positivo y entero, por lo tanto, la sucesión es creciente y monótona.

3. La cota superior, al saber que es creciente, será:

$$a_1 = \frac{3-2(1)^2}{(1)^2-1} = \frac{1}{0} \qquad a_2 = \frac{3-2(2)^2}{(2)^2-1} = -\frac{5}{3}$$
$$(\text{forma indeterminada}) \qquad (\text{convirtiendose en la cota inferior})$$

$$a_{50} = \frac{3-2(50)^2}{(50)^2-1} = -1.99959984 \qquad a_{100} = \frac{3-2(100)^2}{(100)^2-1} = -1.99989999$$
$$(\text{convirtiendose } -2 \text{ en la cota superior})$$

4. Hemos identificado que esta sucesión es monótona y que posee cota inferior y cota superior, por lo tanto, podemos concluir que esta sucesión converge en -2

Converge en -2

5.1.4. Fórmula de una sucesión a partir de datos

Recuerde apreciado lector que la sucesión es el conjunto de puntos ordenados de números, uno detrás de otro en cierto orden, lo cual hasta este momento se nos había dado la sucesión establecida, por tanto, se podía predecir cualquier número deseado.

Ahora el aprendizaje se enfocará en encontrar la sucesión que describa los puntos ordenados que se nos darán. Esto es muy importante que lo repase, apoyándose de este manual y de otros textos porque tiene mucha aplicación en la matemática. Un ejemplo directo que veremos en este manual será en los polinomios de Taylor y Maclaurin.

A. Sucesiones aritméticas

La sucesión aritmética es aquella que su comportamiento es lineal y expresado de la forma

$$\boxed{a_n = \{mn+b\}} \quad \text{donde } m \ y \ b \text{ son constantes}$$

$$m = \text{pendiente} = a_2 - a_1 \ = a_4 - a_3 \ = a_6 - a_5 \ldots \qquad b = a_1 - m \qquad n = \text{variable}$$

Ejemplo:

$3\,,6\,,9\,,12,15\ldots$ note que: $6-3=3 \ ; \ 9-6=3 \ ; \ 12-9=3$ (siempre es $3=m$)

$$b = a_1 - m \ = \ 3-3=0$$

Ejemplo 1

Encuentre la sucesión a_n que describa los siguientes puntos:

$$4\,,7\,,10\,,13\,,16\,,\ldots$$

1. Significa que

$$a_1 = 4 \quad ; \quad a_2 = 7 \quad ; \quad a_3 = 10 \quad ; \quad a_4 = 13 \quad ; \quad a_5 = 16 \quad \text{debemos encontrar } a_n$$

2. Debemos restar las sucesiones y comprobar que para toda resta sea igual a m.

$$a_2 - a_1 = m \quad ; \quad a_3 - a_2 = m \quad ; \quad a_4 - a_3 = m \quad ; \quad a_5 - a_4 = m$$

$$7 - 4 = 3 \quad ; \quad 10 - 7 = 3 \quad ; \quad 13 - 10 = 3 \quad ; \quad 16 - 13 = 3$$

2.1. Nótese que la desviación de cada sucesión es 3 y es constante.

$$\boldsymbol{m = 3}$$

3. Una vez encontrado m se procede a encontrar b.

$$a_n = \{mn + b\}$$

3.1. Se puede encontrar con cualquier punto ordenado

$$(\mathbf{1}, \mathbf{4}) \;;\; (2{,}7) \;;\; (3{,}10) \;;\; (4{,}13) \;;\; (5{,}16)$$

3.2. Sustituyendo

$$a_n = \boldsymbol{m}n + b$$
$$\mathbf{4} = (\mathbf{3})(\mathbf{1}) + b$$
$$\boldsymbol{b = 1}$$

4. Sustituyendo los valores en la sucesión.

$$a_n = \{mn + b\}$$
$$a_n = \{3n + 1\}$$

B. Sucesiones geométricas

Este tipo de sucesión es de forma de monomio. Es una secuencia en la que cada término de la secuencia se obtiene del número anterior multiplicándolo siempre por un mismo número. Debe saber que la razón entre las secuencias vecinas siempre será una constante.

$$3\,,15\,,75\,,375\,,1875\,\ldots$$

Note que:

$$\frac{15}{3} = 5 \qquad \frac{75}{15} = 5 \qquad \frac{375}{75} = 5 \qquad \frac{1875}{375} = 5 \qquad \text{(la razón entre sucesiones es 5)}$$

La fórmula es la siguiente

$$\boxed{a_n \;=\; \{a_1\, r^{n-1}\} \qquad ; \qquad r = \frac{a_{n+1}}{a_n}}$$

$$a_1 = \text{primer término} \qquad r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{razón entre secuencias} \qquad n = \text{término}$$

Ejemplo 1

Encuentre la sucesión a_n que describa los siguientes puntos.

$$2\,,8\,,32\,,128\,,512\,,\ldots$$

1. Debemos comenzar por dividir cada uno de los valores de la sucesión

$$\frac{8}{2} = 4 \qquad \frac{32}{8} = 4 \qquad \frac{128}{32} = 4 \qquad \frac{512}{128} = 4 \qquad \text{por tanto: } r = 4$$

1.1. Por lo tanto, la razón será ($\boldsymbol{r = 4}$):
1.2. El valor de $\boldsymbol{a_1}$ será $\mathbf{2}$.

2. La sucesión que describa los puntos anteriores será:

$$a_n = \mathbf{2} * \mathbf{4}^{n-1}$$

$$a_n = 2 * 4^{n-1}$$

C. Sucesiones cuadráticas

Este tipo de sucesión tienen el valor de n principal elevada a la dos (cuadrado). La fórmula general de la sucesión cuadrática será

$$\boxed{a_n = \{an^2 + bn + c\}}$$

$$\text{Donde:} \quad a, b\ y\ c \ \text{ son constantes}$$

Suponga que tiene la siguiente sucesión. ¿Cómo verificar si es cuadrática?

$$-3 \quad ,3 \quad ,13 \quad ,27 \quad ,45 \quad \ldots$$

$$\mathbf{6} \quad \mathbf{10} \quad \mathbf{14} \quad \mathbf{18} \qquad \text{(se restan los valores)}$$

$$\mathbf{4} \quad \mathbf{4} \quad \mathbf{4} \qquad \text{(se restan nuevamente los valores)}$$

Nótese que al restar dos veces las diferencias de valores se llega a una desviación constante (4). Este procedimiento sirve para saber si es o no una sucesión cuadrática. Una vez afirmado si lo es, se procede a plantear las ecuaciones.

Ejemplo 1

Encuentre la sucesión a_n que describa los siguientes puntos:

$$2 \quad ,11 \quad ,28 \quad ,53 \quad ,86 \quad ,\ldots$$

1. Comprobamos si la sucesión es cuadrática, para ello debemos restar dos veces las diferencias.

$$2 \quad ,11 \quad ,28 \quad ,53 \quad ,86 \quad \ldots$$

$$\mathbf{9} \quad \mathbf{17} \quad \mathbf{25} \quad \mathbf{33} \qquad \text{(se restan los valores)}$$

$$\mathbf{8} \quad \mathbf{8} \quad \mathbf{8} \qquad \text{(se restan nuevamente los valores)}$$

2. Comprobado, se procede a plantear las ecuaciones.
   sabiendo que: $a_1 = 2 \quad ; \quad a_2 = 11 \quad ; \quad a_3 = 28 \quad ; \quad a_4 = 53 \quad ; \quad a_5 = 86$

   Sustituyendo: $2 = a(1)^2 + b(1) + c \qquad 11 = a(2)^2 + b(2) + c \qquad 28 = a(3)^2 + b(3) + c$

   $(1)\ 2 = a + b + c \qquad (2)\ \ 11 = 4a + 2b + c \qquad (3)\ \ 28 = 9a + 3b + c$

3. Se resuelve el sistema de ecuaciones.

   3.1. Se despeja la ecuación (1)

$$2 - a - b = c$$

   3.2. Se sustituye el despeje de (1) en (2)

$$11 = 4a + 2b + c$$
$$11 = 4a + 2b + 2 - a - b$$
$$9 = 3a + b$$
$$9 - 3a = b \quad (4)$$

   3.3. Se despeja la ecuación (2)

$$11 - 4a - 2b = c$$

   3.4. Se sustituye el despeje de (2) en (3)

$$28 = 9a + 3b + c$$
$$28 = 9a + 3b + 11 - 4a - 2b$$
$$17 = 5a + b \quad (5)$$

   3.5. Se sustituye (4) en (5)

$$17 = 5a + b$$
$$17 = 5a + 9 - 3a$$
$$8 = 2a$$
$$4 = a$$

   3.6. Se sustituye el dato de a en la ecuación (4)

$$9 - 3a = b \quad \text{sustituyendo:} \quad 9 - 3(4) = b \quad \text{por tanto:} \quad b = -3$$

   3.7. Se sustituye el dato de a y b en la ecuación (1)

$$2 = a + b + c$$
$$2 = 4 - 3 + c$$
$$c = 1$$

4. Al resolver la ecuación obtenemos la sucesión.

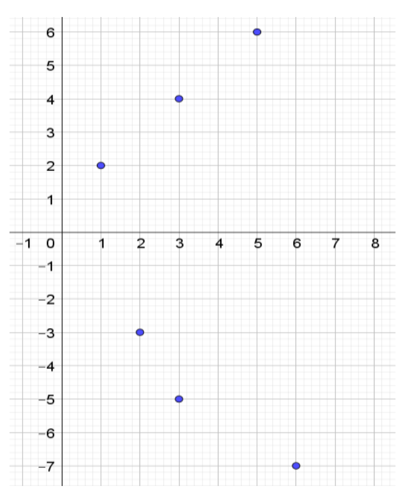
$$a_n = an^2 + bn + c$$
$$a_n = 4\,n^2 - 3n + c$$

D. Sucesiones alternadas

Este tipo de sucesión tiene como objeto alternar el signo de la sucesión a medida que varía el número n del elemento. Vea el siguiente ejemplo de las sucesiones alternadas

$2\ ,-3\ ,4\ ,-5\ ,6\ ,-7\ ,8\ ,-9\ ,\ldots$

La gráfica que expresa esos puntos es:



Como puede notarlo, los valores van intercalados

La fórmula para una sucesión alternada es: $\boxed{a_n = \{b_n(-1)^n\}}$

$b_n =$ cualquier sucesión como las antes explicadas (aritmética, geométrica, cuadráticas ...)

- Si el primer término de la secuencia es positivo, se utiliza
$$(-1)^{n+1}$$
- Si el primer término de la secuencia es negativo, se utiliza
$$(-1)^n$$

Ejemplo 1

Encuentre la sucesión a_n que describa los siguientes puntos.

$$-1 \;,4 \;,-7 \;,10 \;,-13 \;,\ldots$$

1. Vemos que los signos van intercalados, por tanto, van multiplicados por: $(-1)^n$

2. Nos enfocamos ahora en los números (ya sin el signo)

$$b_n = 1 \;,4 \;,7 \;,10 \;,13 \;,\ldots$$

$$4-1=\mathbf{3} \quad ; \quad 7-4=\mathbf{3} \quad ; \quad 10-7=\mathbf{3} \quad ; \quad 13-10=\mathbf{3}$$

2.1. La primera resta es constante, por lo tanto, es secuencia aritmética (lineal)

$$y = m\,n + b$$
$$y = \mathbf{3}\,n + b$$

2.2. Se tiene que encontrar b

$$1 = \mathbf{3}\,(1) + b$$
$$b = -2$$

2.3. La sucesión b_n será

$$b_n = \{m\,n + b\}$$
$$b_n = \{3\,n - 2\}$$

3. Por tanto, la sucesión será

$$a_n = b_n(-1)^n$$
$$a_n = (3\,n-2)(-1)^n$$

E. Sucesiones oscilantes

Este tipo de sucesión se utiliza cuando se requiere que, a cada ciertos valores ploteados en la sucesión se regrese al valor original y que el valor de n siga aumentando. A continuación, se le presenta una forma en que se repiten los valores

$$\mathbf{4}\;,\mathbf{0}\;,\mathbf{-4}\;,\mathbf{0}\;,\mathbf{4}\;,\mathbf{0}\;,\mathbf{-4}\;,\mathbf{0}\;,\ldots$$
$$\boldsymbol{a}\;,\mathbf{0}\;,\boldsymbol{-a}\;,\mathbf{0}\;,\boldsymbol{a}\;,\mathbf{0}\;,\boldsymbol{-a}\;,\mathbf{0}\;,\ldots$$

La fórmula que las describe es:

$$\boxed{a_n = a\;sen\left(\frac{\pi}{2}n\right)} \qquad \boxed{a_n = a\;cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}$$

Donde: $a =$ amplitud o valor más grande

Se utiliza *seno* cuando se comience con un número. Se utiliza *coseno* si se inicia con 0

Ejemplo 1

Encuentre la sucesión a_n que describa los siguientes puntos.

$$\tfrac{3}{2}, 0, -\tfrac{3}{2}, 0, \tfrac{3}{2}, 0, -\tfrac{3}{2}, 0, \tfrac{3}{2}, 0, -\tfrac{3}{2}, 0, \ldots$$

1. Se observa que la secuencia se repite con los valores

$$\mathbf{\tfrac{3}{2}, 0, -\tfrac{3}{2}, 0, \tfrac{3}{2}, 0, -\tfrac{3}{2}, 0, \tfrac{3}{2}, 0, -\tfrac{3}{2}, 0}, \ldots$$

2. Notando que la secuencia cambia a cada $\tfrac{3}{2}$ así como el signo, por lo tanto

$$a_n = a\, sen\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

$$a_n = \frac{3}{2}\, sen\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

Ejemplo 2

Encuentre la sucesión a_n que describa los siguientes puntos:

$$0, -\tfrac{3}{2}, 0, \tfrac{3}{2}, 0, -\tfrac{3}{2}, 0, \tfrac{3}{2}, 0, -\tfrac{3}{2}, 0, \tfrac{3}{2}, \ldots$$

1. Se observa que la secuencia se repite con los valores

$$\mathbf{0, -\tfrac{3}{2}, 0, \tfrac{3}{2}, 0, -\tfrac{3}{2}, 0, \tfrac{3}{2}, 0, -\tfrac{3}{2}, 0, \tfrac{3}{2}}, \ldots$$

2. Notando que la secuencia cambia a cada $\tfrac{3}{2}$ así como el signo, por lo tanto

$$a_n = a\, cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

$$a_n = \frac{3}{2}\, cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

F. Sucesiones de fracciones

Este tipo de sucesión es utilizada cuando se tengan números seguidos de fracciones. Lo que debe hacer es identificar independientemente la secuencia para el numerador e independientemente para el denominador. Este tipo de sucesión es muy importante, ya que se puede combinar las sucesiones vistas anteriormente; por ejemplo, puede colocar en el numerador una sucesión aritmética y en el denominador una sucesión oscilante.

$$\boxed{a_n = \left\{\frac{b_n}{c_n}\right\}}$$

Analicemos la sucesión: $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \ldots$

1. Se analiza las sucesiones del numerador.

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Evidentemente responde a la sucesión $b_n = n$

2. Se analiza la sucesión del denominador.

$$3, 5, 7, 9, 11, \ldots$$

La resta entre sucesiones será: $5 - 3 = \mathbf{2}$; $7 - 5 = \mathbf{2}$; $9 - 7 = \mathbf{2}$; $11 - 9 = \mathbf{2}$

$$c_n = mn + b$$

$$c_n = \mathbf{2}\, n + b$$

2.1. Encontrando el valor de b se sabe que $c_1 = 3$

$$3 = \mathbf{2}(1) + b$$
$$b = 1$$

2.2. La sucesión c_n será

$$c_n = 2n + 1$$

3. La sucesión a_n será

$$a_n = \frac{b_n}{c_n} \qquad ; \qquad a_n = \frac{n}{2n+1}$$

Ejemplo 1

Encuentre la sucesión a_n que describa los siguientes puntos:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{7}{17}, \frac{9}{26}, \frac{11}{37}, \dots$$

1. Se analiza la distribución de la sucesión donde se nota que tanto en el numerador como en el denominado van en aumento, excepto por la tercera evaluación que vuelve a ser $^1/_2$. El 1 del numerador debería estar entre 3 y 7.
2.
3. Se arma la sucesión del numerador (sin utilizar el tercer dato)

$$1, 3, x, 7, 9, 11 \dots$$
$$3 - 1 = 2 \quad ; \quad 9 - 7 = 2 \quad ; \quad 11 - 9 = 2$$

3.1. Todas las restas producen 2, por lo tanto se puede deducir que es una sucesión aritmética

$$b_n = mn + b$$
$$b_n = 2n + b$$

3.2. El valor de b será

$$1 = 2(1) + b$$
$$-1 = b$$
$$b_n = 2n - 1 \qquad b_3 = 5$$

4. La serie será, por lo tanto:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{7}{17}, \frac{9}{26}, \frac{11}{37}, \dots \quad = \quad \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}}, \frac{7}{17}, \frac{9}{26}, \frac{11}{37}, \dots$$

5. Planteando la sucesión del denominador

$$2, 5, 10, 17, 26, 37, \dots$$
$$\mathbf{3} \quad \mathbf{5} \quad \mathbf{7} \quad \mathbf{9} \quad \mathbf{11}$$
$$\mathbf{2} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{2}$$

6. Comprobado, se procede a plantear las ecuaciones.

   sabiendo que: $c_1 = 2 \;;\; c_2 = 5 \;;\; c_3 = 10 \;;\; c_4 = 17 \;;\; c_5 = 26 \;;\; c_6 = 37$

   Sustituyendo: $2 = a(1)^2 + b(1) + c \qquad 5 = a(2)^2 + b(2) + c \qquad 10 = a(3)^2 + b(3) + c$

7. Resolviendo el sistema de ecuaciones.

$$(1)\ 2 = a + b + c \qquad (2)\ \ 5 = 4a + 2b + c \qquad (3)\ \ 10 = 9a + 3b + c$$

8. Resolviendo el sistema de ecuaciones.

8.1. Despejando de la ecuación (1)

$$2 - a - b = c$$

8.2. Sustituyendo el despeje de (1) en (2)

$$5 = 4a + 2b + c$$
$$5 = 4a + 2b + 2 - a - b$$
$$3 - 3a = b \quad (4)$$

8.3. Despejando de la ecuación (2)

$$5 - 4a - 2b = c$$

8.4. Sustituyendo el despeje de (2) en (3)

$$10 = 9a + 3b + c$$
$$10 = 9a + 3b + 5 - 4a - 2b$$
$$5 = 5a + b \quad (5)$$

8.5. Sustituyendo (4) en (5)

$$5 = 5a + b$$
$$5 = 5a + 3 - 3a$$
$$2 = 2a$$
$$1 = a$$

8.6. Sustituyendo el dato de a en la ecuación (4)

$$3 - 3a = b \quad \text{sustituyendo:} \quad 3 - 3(1) = b \quad \text{por tanto:} \ \ b = 0$$

8.7. Sustituyendo el dato de a y b en la ecuación (1)

$$2 = a + b + c$$
$$2 = 1 + 0 + c$$
$$c = 1$$

9. Al resolver la ecuación obtenemos la sucesión.

$$c_n = an^2 + bn + c$$
$$c_n = n^2 + 1$$

10. La sucesión por tanto será:

$$a_n = \frac{b_n}{c_n} \qquad => \qquad a_n = \frac{2n-1}{n^2+1}$$

G. Sucesiones factoriales

Este tipo de sucesión utiliza el símbolo matemático $\boldsymbol{n}!$ **llamado factorial.** El símbolo factorial expresa la multiplicación del número n por sus seguidos

$$n! = n * (n-1) * (n-2) * (n-3) * (n-4) * \dots 1$$

Algunos ejemplos:

$$5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120 \quad ; \quad 3! = 3 * 2 * 1 = 6 \quad ; \quad 0! = 1 \quad ; \quad 1! = 1$$

Las formas de resolver este tipo de sucesiones:

$$a_n = \{ n! \}$$
$$a_n = a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , \dots a_n$$
$$a_n = 1! , 2! , 3! , 4! , 5! , \dots n!$$
$$a_n = 1 , 2 , 6 , 24 , 120 , \dots n!$$

Ejemplo 1

Encuentre la sucesión a_n que describa los siguientes puntos:

$$\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{2}{3!}, \frac{6}{4!}, \frac{24}{5!}, \dots$$

1. Claramente la sucesión de fracción, asimismo es evidente que el denominador es muy evidente identificar en términos de n.

$$b_n = n!$$

2. Para identificar el numerador es un poco más profundo.

$$1 , 1 , 2 , 6 , 24 , \dots$$

2.1. Note que $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$ y son los únicos que se repiten, luego comienza a incrementarse la sucesión. Para ellos:

$$1 , 1 , 2 , 6 , 24 , \dots = 0! , 1! , 2! , 3! , 4! , \dots$$

2.2. Como se inicia con $n = 1$ se plantea:

$$c_n = 1 , 1 , 2 , 6 , 24 , \dots \quad => \quad c_n = (n-1)!$$

3. La sucesión será:

$$a_n = \frac{b_n}{c_n} \quad => \quad a_n = \frac{n!}{(n-1)!}$$

Ejemplo 2

Encuentre la sucesión a_n que describa los siguientes puntos:

$$\frac{4}{2!}, \frac{16}{4!}, \frac{64}{6!}, \frac{256}{8!}, \frac{1024}{10!}, \dots$$

1. Se dividen los valores de numerador para identificar sucesión geométrica

$$\frac{16}{4} = 4 \quad ; \quad \frac{64}{16} = 4 \quad ; \quad \frac{64}{16} = 4 \quad ; \quad \frac{256}{64} = 4 \quad ; \quad \frac{1024}{256} = 4$$

1.1. El numerador por tanto será

$$b_n = b_1 r^{n-1} = 4 * (4)^{n-1} = 4^{n-1+1} = 4^n$$

2. Los valores del denominador son:

$$2! , 4! , 6! , 8! , 10! , \dots$$

2.1. La sucesión que describa esos puntos será:

$$(2n)! \quad \text{ya que avanza de par en par}$$

3. La sucesión será:

$$a_n = \frac{b_n}{c_n} \quad => \quad a_n = \frac{4^n}{(2n)!}$$

5.2. Series

Una serie es la sumatoria, limitada por cotas de una sucesión, se tiene en su resultado un número que puede ser finito o infinito.

El símbolo matemático que expresa la sumatoria de una sucesión es:

$$\boxed{S_n = \sum_{n=a}^{b} a_n} \quad \textbf{Ecuación 7.1.1} \qquad ; \qquad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$n = a$ indica el punto de partida (indica la variable)
b indica el punto final a evaluar
a_n indica la sucesión a sumar en terminos de n ; S_n = Serie en términos de n

Ejemplo 1

Resuelva la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{n}{n+1}$$

1. Se evalúa la sucesión

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots \frac{n}{n+1}$$

2. El 1 indica que comenzaremos a sumar desde que se evalúa $n = 1$ la sucesión. El número 5 en la parte de arriba indica que terminaremos de sumar hasta el número evaluado en $n = 5$.

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} \qquad \text{sumando será:} \qquad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{71}{20}$$

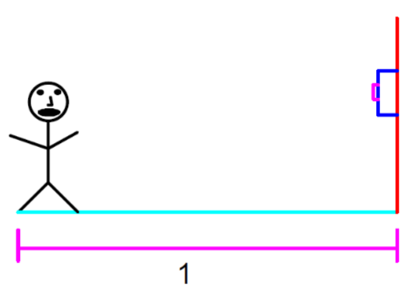
3. La respuesta será:

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{n}{n+1} = \frac{71}{20} = 3.55$$

Un concepto real de series

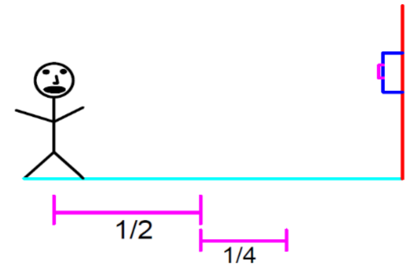
Una paradoja de las cuatro famosas que planteó Zenón de Elea, quién fue un filósofo griego que vivió cuatro siglos antes de Cristo, fue la de la separación entre dos puntos A y B, por lo cual se caminaría la mitad de distancia y nunca se llegará.

1. Suponga que se le pide apagar la luz y que se encuentra a una distancia de 1 metro.

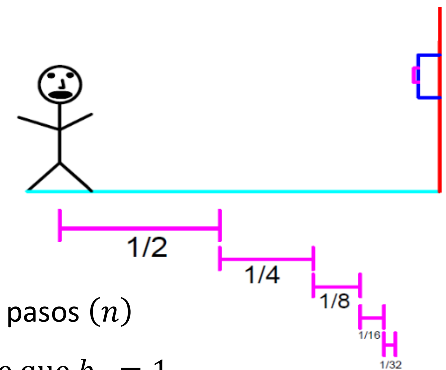


2. Usted inicialmente caminará la mitad de 1 metro.

3. Luego caminará la mitad de lo que queda, o sea $\frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}$



4. La persona continuará de esta manera, como lo muestra la imagen.



5. Observando la imagen diremos que la sucesión es en base a los pasos (n)

$$a_n = \frac{b_n}{c_n} \qquad \text{notandose que } b_n = 1$$

   5.1. El denominador será

$$c_n = 2\ ,4\ ,8\ ,16\ ,32\ ,\ldots$$

   5.2. La sucesión será una sucesión geométrica.

$$c_n = 2 * 2^{n-1} = 2^{n-1+1} = 2^n$$

6. La sucesión que describa el tamaño de avance en función a los pasos será:

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

7. Al querer encontrar la distancia total, se suma la sucesión, debería ser 1 $(S_n = 1)$

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots \frac{1}{2^n}$$

8. Se procede a generar una sucesión de S_n en términos de la cantidad de suma

$$\boldsymbol{S_1 = \frac{1}{2}} \quad ; \quad \boldsymbol{S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}} \quad ; \quad \boldsymbol{S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}} \quad ; \quad \boldsymbol{S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}}$$

$$\boldsymbol{S_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32}} \quad ; \quad \boldsymbol{S_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}}$$

9. La sucesión de S_n será

$$S_n = \boldsymbol{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \ldots\ S_n}$$

10. Encontrando la sucesión de S_n (por sucesión de fracciones)

$$S_n = \frac{b_n}{c_n}$$

10.1. Encontrando b_n

$$1\ ,\ 3\ ,\ 7\ ,\ 15\ ,\ 31\ ,63\ ,\ldots b_n$$

$$2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \qquad \text{(Primer resta)}$$

10.2. Se dividen valores de resta

$$\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}} = 2 \quad ; \quad \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{4}} = 2 \quad ; \quad \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{8}} = 2 \quad ; \quad \frac{\mathbf{32}}{\mathbf{16}} = 2$$

$$b_n = b_1 r^{n-1} - x$$
$$b_n = \mathbf{2} * \mathbf{2}^{n-1} - x$$
$$b_n = 2^n - x$$

10.3. Para el valor de x simplemente se encuentra restando los valores de la resta.

$$\mathbf{2} - 1 = 1 \ ; \ \mathbf{4} - 3 = 1 \ ; \ \mathbf{8} - 7 = 1 \ ; \ \mathbf{16} - 15 = 1 \ ; \ \mathbf{32} - 31 = 1$$
$$\boldsymbol{b_n = 2^n - 1}$$

10.4. Encontrando c_n

$$2\ ,4\ ,8\ ,16\ ,32\ ,64\ ,\ldots$$

10.5. Se procede a dividir las secuencias.

$$\frac{4}{2} = 2 \quad ; \quad \frac{8}{4} = 2 \quad ; \quad \frac{16}{8} = 2 \quad ; \quad \frac{32}{16} = 2 \quad ; \quad \frac{64}{32} = 2$$

10.6. Siendo una sucesión geométrica, será:

$$c_n = 2 * 2^{n-1} \quad => \quad \boldsymbol{c_n = 2^n}$$

11. La Sucesión S_n será:

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

12. Aplicando el límite para $n \to \infty$ para evaluar la distancia cuando la persona haya dado infinitos pasos.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1$$

13. Quedando demostrado la utilidad de las series.

Hemos visto que una serie es una sumatoria de una sucesión, pero que también una serie se puede analizar por sucesión para llegar a una función de la serie.

5.2.1. Serie convergente y serie divergente

Al igual que una sucesión, las series también convergen o divergen.

$$\boxed{\text{Si la serie infinita } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{es convergente, entonces } \lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

Si la serie converge, entonces se puede encontrar un número en concreto, si no la suma de dicha sucesión (serie) será infinito (∞)

Ejemplo anterior

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

1. Esta serie se demostró anteriormente. Observe que al aplicarle el límite a su sucesión original se llega a cero, por tanto, se sabe que si converge y si se llega a un número en concreto a la serie.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad (\text{converge})$$

A continuación, querido lector, se le presentan tres ejemplos.

Ejemplo 1

Encuentre los primeros cuatro elementos de la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ y obtenga una fórmula para S_n en términos de n. Determine también si la serie infinita es convergente o divergente; si es convergente halle la suma.

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

Cuatro elementos de la serie

1. Procedemos a plantear

$$S_4 = \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} = \frac{4}{9}$$

$$S_4 = \frac{4}{9}$$

Verificando convergencia

2. Se procede a analizar el límite de la sucesión

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2-1} \quad \text{evaualuando} \Rightarrow \quad \frac{1}{4(\infty)^2-1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La Serie Converge

Obteniendo la fórmula

3. Se obtienen las sumas parciales de los elementos de la serie.

$$\boldsymbol{S_1 = \frac{1}{3}} \; ; \; \boldsymbol{S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5}} \; ; \; \boldsymbol{S_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} = \frac{3}{7}} \; ; \; \boldsymbol{S_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} = \frac{4}{9}}$$

$$\boldsymbol{S_5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} = \frac{5}{11}} \; ; \; \boldsymbol{S_6 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \frac{1}{143} = \frac{6}{13}}$$

4. La sucesión de la serie será:

$$S_n = \boldsymbol{\frac{1}{3}}, \boldsymbol{\frac{2}{5}}, \boldsymbol{\frac{3}{7}}, \boldsymbol{\frac{4}{9}}, \boldsymbol{\frac{5}{11}}, \boldsymbol{\frac{6}{13}} \ldots S_n$$

5. Planteando la sucesión del numerador:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, b_n$$
$$b_n = n$$

6. Planteando la sucesión del denominador

$$3\ ,5\ ,7\ ,9\ ,11\ ,13, \dots, c_n$$

$$5-3=2\ \ ;\ \ 7-5=2\ \ ;\ \ 9-7=2\ \ ;\ \ 11-9=2\ \ ;\ \ 13-11=2$$

$$\begin{array}{ll} c_n = m\,n + b & \text{sucesión aritmética} \\ c_n = 2\,n + b & \text{sustituyendo } m \\ 3 = 2\,(1) + b & \text{encontrando } b \\ b = 1 & \text{el valor de } b \\ c_n = 2\,n + 1 & \text{La sucesión } c_n \end{array}$$

7. La sucesión de la serie será:

$$S_n = \frac{b_n}{c_n} \quad ; \quad S_n = \frac{n}{2n+1}$$

Corroborando el dato

8. Para corroborar con el paso 1, se sustituye $n = 4$.

$$S_4 = \frac{4}{2(4)+1} = \frac{4}{9}$$

Hallando la suma total

9. Se evalúa el límite al infinito

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} * \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 2

Encuentre los primeros cinco elementos de la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ se obtiene una fórmula para S_n en términos de n. Determine también si la serie infinita es convergente o divergente; si es convergente halle la suma.

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

Cuatro elementos de la serie

1. Procedemos a plantear

$$S_4 = \sum_{n=1}^{4} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \mathbf{ln}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) + \mathbf{ln}\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right) + \mathbf{ln}\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right) + \mathbf{ln}\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\right) + \mathbf{ln}\left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\right)$$

$$= \mathbf{ln(1)} - \cancel{\mathbf{ln(2)}} + \cancel{\mathbf{ln(2)}} - \cancel{\mathbf{ln(3)}} + \cancel{\mathbf{ln(3)}} - \cancel{\mathbf{ln(4)}} + \cancel{\mathbf{ln(4)}} - \cancel{\mathbf{ln(5)}} + \cancel{\mathbf{ln(5)}} - \mathbf{ln(6)}$$

$$S_4 = \ln(1) - \ln(6) \quad => \quad S_4 = -\ln(6)$$

Verificando convergencia

2. Se procede a analizar el límite de la sucesión

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\right] = \ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1} * \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)\right] = \ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)\right] = \ln[1] = 0$$

La serie converge (Corroborar con el resultado)

Obteniendo la fórmula

3. En el paso No. 1 quedó evidencia de la serie. Hay términos que se van eliminando a medida que avanza la sumatoria.

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln\left(\frac{4}{5}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\ln(1) - \cancel{\ln(2)} + \cancel{\ln(2)} - \cancel{\ln(3)} + \cancel{\ln(3)} - \cancel{\ln(4)} + \cancel{\ln(4)} - \cancel{\ln(5)} + \cdots + \cancel{\ln(n-1)} - \cancel{\ln(n)} + \cancel{\ln(n)} - \ln(n+1)$$

Se eliminará con el siguiente   se eliminará con el anterior

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln(1) - \ln(n+1) = -\ln(n+1)$$

4. La fórmula de la serie será:

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

Hallando la suma total

5. Se evalúa el límite al infinito.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{\infty}\right) = -\infty$$

La Serie Diverge

NOTA: Este tipo de serie se llama serie armónica, que finge converger y al analizar su fórmula resulta no hacerlo.

Ejemplo 3

Escriba los primeros cuatro términos de la serie infinita. También encuentre los primeros cinco términos de la serie y si la serie converge encuentre la suma.

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} cos(n\pi)$$

Cuatro elementos de la serie

1. Procedemos a plantear

$$S_4 = \sum_{n=1}^{4} cos(n\pi) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = cos\pi + cos2\pi + cos3\pi + cos4\pi$$

$$S_4 = cos\pi + cos2\pi + cos3\pi + cos4\pi = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$$

$$\sum_{n=1}^{4} cos(n\pi) = 0$$

Cinco elementos de la serie

2. Procedemos a plantear

$$S_5 = \sum_{n=1}^{5} cos(n\pi) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = cos\pi + cos2\pi + cos3\pi + cos4\pi + cos5\pi$$

$$S_5 = cos\pi + cos2\pi + cos3\pi + cos4\pi + cos5\pi = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 = -1$$

$$\sum_{n=1}^{5} cos(n\pi) = -1$$

3. Se puede concluir que la serie cuando n es par, la respuesta es 0. Cuando el valor de n es impar la respuesta será -1

La serie es divergente

5.2.2. Otros métodos de solución de series

A. Series geométricas

Similar a las sucesiones geométricas, las series geométricas se presentan cuando la variable n se encuentre como exponente.

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1} = a + a\, r + a\, r^2 + a\, r^3 + \cdots + a\, r^{n-1} \qquad \text{forma estándar}$$

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1} = a(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r^2} + \boldsymbol{r^3} + \cdots + \boldsymbol{r^{n-1}}) \qquad \text{factorizando}$$

Utiliza la identidad

$$1 - r^n = (1 - r)(\boldsymbol{1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1}})$$

$$\frac{1 - r^n}{1 - r} = (\boldsymbol{1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1}}) \qquad \text{Despejando}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \quad \text{si } r \neq 1 \qquad \text{Sustituyendo}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}}$$

Ejemplo 1

Determine también si la serie infinita es convergente o divergente; si es convergente halle la suma.

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

1. Nótese que no tiene la forma de una serie geométrica, por lo tanto, se transforma a su forma estándar.

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} * \frac{3^{-1}}{3^{-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-1} * \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} * \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

2. Se procede a identificar datos

$$a = \frac{1}{3} \quad ; \quad r = \frac{2}{3}$$

3. Obteniendo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} * \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{\frac{1}{3}} = \left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Hallando la suma total

4. Se evalúa el límite al infinito.

$$\lim_{n\to\infty} 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1$$

B. Series geométricas inversa

Similar a las series geométricas, solo que la razón ira como denominador y su forma estándar será:

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{r^{n-1}} = a + \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} + \cdots + \frac{a}{r^{n-1}} \qquad \text{Forma estandar}$$

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{r^{n-1}} = a\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots + \frac{1}{r^{n-1}}\right) \qquad \text{factorizando}$$

Utiliza la identidad

$$1-\frac{1}{r^n} = \left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots + \frac{1}{r^{n-1}}\right) \qquad \text{caso de factorización}$$

$$\frac{1-\frac{1}{r^n}}{1-\frac{1}{r}} = \left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}+\cdots+\frac{1}{r^{n-1}}\right) \qquad \text{Despejando}$$

$$\frac{1-\frac{1}{r^n}}{1-\frac{1}{r}} = \left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}+\cdots+\frac{1}{r^{n-1}}\right) \qquad \text{Despejando}$$

Entonces

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{r^{n-1}} = a * \frac{1-\frac{1}{r^n}}{1-\frac{1}{r}} \qquad \text{factorizando}$$

Teniendo la fórmula

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{r^{n-1}} = a\left(\frac{1-\frac{1}{r^n}}{1-\frac{1}{r}}\right)}$$

Ejemplo 1

Determine también si la serie infinita es convergente o divergente; si es convergente halle la suma.

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^{n-1}}$$

1. Se identifica valores

$$\boldsymbol{a = 2} \qquad \boldsymbol{r = 5}$$

2. Sustituyendo valores

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{r^{n-1}} = a\left(\frac{1-\frac{1}{r^n}}{1-\frac{1}{r}}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^{n-1}} = 2 * \left(\frac{1-\frac{1}{5^n}}{1-\frac{1}{5}}\right) = \frac{2}{\frac{4}{5}}\left(1-\frac{1}{5^n}\right) = \frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^{n-1}} = \frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$$

3. Aplicando el límite para evaluar la suma.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{5^n}\right) = \frac{5}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{5^n}\right) = \frac{5}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^{n-1}} = \frac{5}{2}$$

5.2.3. Series de potencia

Las series analizadas en el capítulo 7.2.1 y 7.2.2. son de términos constantes. Ahora estudiaremos un tipo de serie que es muy importante, sobre todo en aplicaciones (polinomio de Taylor y Maclaurin) llamada serie de potencia.

Se llama serie de potencia debido a que se incluirá una nueva variable x que tendrá como exponente n, dando la apariencia de una función polinomial, multiplicada por una secuencia a_n. Básicamente una serie de potencia es una suma de una secuencia de un polinomio, donde sus coeficientes variarán según n cambie, pero que su variable independiente será x.

Su forma será:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n\, x^n} \quad \text{(función polinomial)}$$

Note querido lector que la única variable será x y n vendría siendo una constante al igual que a_n. A medida que se vaya variando n se irá construyendo como suma la polinomial de grado n

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n-1}\, x^n \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\, x^n \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}\, x^n \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)2^n} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{n+3}\, x^{2n}$$

Convergencia

La convergencia de una serie de potencia depende del intervalo de x donde la haga posible. Por tanto, se debe evaluar el intervalo a través **de la prueba de la razón** para determinar los valores de x.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1} \quad \text{para que converga}$$

Ejemplo 1

Determinar los valores de x para los cuales la serie de potencia es convergente.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

1. Aplicamos nuestra prueba de la razón

$$\text{Identificando:} \quad a_n = \frac{x^n}{n+1} \qquad\qquad a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1+1} = \frac{x^{n+1}}{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+2}}{\frac{x^n}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{(n+2)\,x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cancel{x^n} * x}{(n+2)\cancel{x^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|x\frac{(n+1)}{(n+2)}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|x * \frac{(n+1)}{(n+2)}\right| = \left|x \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\right| = |\,x * 1\,| = |\,x\,|$$

2. Comparando con la restricción

$$|x| < 1 \quad \text{por tanto el intervalos será} \quad -1 < x < 1$$

3. Teniendo el intervalo se debe evaluar las fronteras.

3.1. Se evalúa la sucesión en $x = 1$ en la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

3.2. Debe recordar que existían series armónicas que aparentaban ser convergentes al aplicar el límite, pero realizando la serie ya no convergía. La serie anterior no converge, ya que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty \qquad (\text{no converge})$$

3.3. Se evalúa la sucesión $x = -1$ en la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

3.4. El valor de esa serie es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 \qquad (\text{converge})$$

4. Por tanto, el intervalo de convergencia es:

$$-1 \le x < 1 \qquad o \quad [-1\,,1\,)$$

Ejemplo 2

Determinar los valores de x para los cuales la serie de potencia es convergente.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n-1)\,3^{2n-1}}$$

1. Aplicamos nuestra prueba de la razón

$$\text{Identificando:} \quad \boldsymbol{a_n = (-1)^n \frac{x^n}{(2n-1)\,3^{2n-1}}} \qquad a_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(2(n+1)-1)\,3^{2(n+1)-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \dfrac{x^{n+1}}{(2n+1)\,3^{2n+1}}}{(-1)^n \dfrac{x^n}{(2n-1)\,3^{2n-1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} * x^{n+1} * (2n-1)\,3^{2n-1}}{(-1)^n * x^n * (2n+1)\,3^{2n+1}} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(-1)^n} * (-1) * \cancel{x^n} * x * (2n-1) * \cancel{3^{2n}} * 3^{-1}}{\cancel{(-1)^n} * \cancel{x^n} * (2n+1) * \cancel{3^{2n}} * 3} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1) * x * (2n-1)}{9 * (2n+1)} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x * (1-2n)}{9 * (2n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x * (1-2n)}{(18n+9)} \right| = \left| x * \frac{-2}{18} \right| = \left| x * \frac{-1}{9} \right|$$

2. Comparando con la restricción

$$\left| x * \frac{-1}{9} \right| < 1$$
$$-1 < x * \frac{-1}{9} < 1$$
$$-9 < -x < 9$$
$$9 > x > -9 \quad \text{Siendo también } -9 < x < 9$$

3. Teniendo el intervalo se debe evaluar las fronteras.

3.1. Se evalúa la sucesión en $x = 9$ en la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n-1)\,3^{2n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{9^n}{(2n-1)\,3^{2n-1}} = \frac{3}{4}\pi \quad \text{(converge)}$$

3.2. Se evalúa la sucesión $x = -9$ en la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n-1)\,3^{2n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-9)^n}{(2n-1)\,3^{2n-1}} = \infty \quad \text{(diverge)}$$

4. Por tanto, el intervalo de convergencia es:

$$-9 < x \leq 9 \quad \text{o} \quad (-9\,,9]$$

Otra forma de expresar las series de potencia es trasladando el valor de la sucesión de la forma

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n\,(x-a)^n}$$

Ejemplo 3

Determinar los valores de x para los cuales la serie de potencia es convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

1. Aplicamos nuestra prueba de la razón

$$\text{Identificando:} \quad a_n = (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} \qquad \boldsymbol{a_{n+1} = (-1)^{n+2} \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}}{(-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} * n * (x-1)^{n+1}}{(-1)^{n+1} * (x-1)^n * (n+1)} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(-1)^n} * (-1)^2 * n * \cancel{(x-1)^n}(x-1)}{\cancel{(-1)^n}(-1) * \cancel{(x-1)^n} * (n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-1 * n\,(x-1)}{(n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-n\,(x-1)}{n+1} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-n\,(x-1)}{n+1}\right| \;=\; |-1*(x-1)| = \;|1-x|$$

2. Comparando con la restricción

$$|1-x|<1$$
$$-1\;<\;1-x\;<\;1$$
$$-1-1\;<\;-x\;<\;1-1$$
$$-2\;<-x\;<\;0$$
$$-2*-1\;>-x*-1\;>\;0*-1$$

$$2>\;x\;>\;0 \qquad \text{o que es lo mismo:} \quad 0<x<2$$

3. Teniendo el intervalo se debe evaluar las fronteras.

3.1. Se evalúa la sucesión en $x = 2$ en la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{(x-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{(2-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{(1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n*(-1)\,\frac{(1)^n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n*(1)^n*\frac{-1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n*\frac{-1}{n}=\ln 2 \qquad \text{(converge)}$$

3.2. Se evalúa la sucesión en $x = 0$ en la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{(x-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{(0-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{(-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n*(-1)\frac{(-1)^n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n*(-1)^n\frac{-1}{n}\;=\sum_{n=1}^{\infty}(1)^n\frac{-1}{n} \qquad \text{(No converge)}$$

4. Por tanto, el intervalo de convergencia es:

$$0<x\leq 2 \quad \text{o} \quad (0\,,2]$$

5.3. APLICACIÓN DE SUCESIONES Y SERIES

En el lenguaje de las matemáticas algunas integrales no se pueden resolver de manera exacta, como acostumbra la matemática a resolver todo tipo de problema. Entonces comienza a hacerse una aproximación numérica, haciendo tan exacto el resultado como el calculista lo desee. Para utilizar dicho método táctico se debe conocer la serie de Taylor y la serie de Maclaurin, que hacen que cualquier función se aproxime a una función polinomial en cualquier punto de la variable, ya que es mucho más sencillo integrar una polinomial que cualquier otro tipo de función.

La siguiente integral no se puede realizar por ningún método de integración (Capítulo 1)

$$\int e^{x^2}\ dx = \int 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}\ dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$$

Teniendo ambas integrales es fácil deducir que la integral de la derecha es mucho más sencilla de resolver puesto que solamente son polinomios. Como se ha dicho antes, su valor dependerá de la precisión del calculista o la exactitud que se le solicite.

A continuación, aprenderemos a aproximar cualquier función en una polinomial utilizando los métodos ya mencionados.

En la portada usted observa al niño contemplando al delfín, pero lo hace sin miedo y viendo que el delfín ya no está en los cielos, ahora ha bajado al nivel del suelo. En este punto usted deberá hacer lo mismo, ya no contemplar al delfín en los cielos sino hacerlo aterrizar, justo como debe hacer con el tema.

5.3.1. Polinomio de Taylor

Comencemos por recordar la sección 7.2.3, donde se analizó una serie de potencia y se indicó que la variable sería x y prácticamente n es una constante y su forma matemática es:

1. Derivando la serie de potencia

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_n\,x^n \qquad \text{(Serie Original)}$$

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n * nx^{n-1} \;=\; a_1+2\,a_2x+3\,a_3x^2+4\,a_4x^3+\cdots+a_n * nx^{n-1}$$

$$f''(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n * n(n-1)x^{n-2}$$

$$=2*1\,a_2+3*2\,a_3x+4*3\,a_4x^2+5*4\,a_5x^3+\cdots+a_n * n(n-1)x^{n-1}$$

$$f'''(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n * n(n-1)(n-2)x^{n-3} =$$

$$=3*2*1\,a_3+4*3*2\,a_4\,x+5*4*3\,a_5\,x^2+6*5*4\,a_6\,x^3+\cdots+a_n * n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$f^{(iv)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n * n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} =$$

$$=4*3*2*1\,a_4+5*4*3*2\,a_5\,x+6*5*4*3\,a_6\,x^2+7*6*5*4\,a_7\,x^3+\cdots+a_n * n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$$

2. Se procede a evaluar $x=0$ en cada función.

$f(0)=a_0$; $f'(0)=a_1$; $f''(0)=2*1\,a_2$; $f'''(0)=3*2*1\,a_3$; $f^{(iv)}(0)=4*3*2*1\,a_4$

$\dfrac{f(0)}{1}=a_0$; $\dfrac{f'(0)}{1}=a_1$; $\dfrac{f''(0)}{2*1}=a_2$; $\dfrac{f'''(0)}{3*2*1}=a_3$; $\dfrac{f^{(iv)}(0)}{4*3*2*1}=a_4$

3. Haciendo la analogía utilizando el símbolo factorial.

$\dfrac{f(0)}{0\,!}=a_0$; $\dfrac{f'(0)}{1\,!}=a_1$; $\dfrac{f''(0)}{2\,!}=a_2$; $\dfrac{f'''(0)}{3\,!}=a_3$; $\dfrac{f^{(iv)}(0)}{4\,!}=a_4$

4. Una sucesión del valor a_n.

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}$$

5. Sustituyendo en la serie de potencia

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}\,x^n$$

6. Llegando a la fórmula de Taylor.

$$\boxed{f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}\,x^n} \qquad \textbf{Ecuación 7.3.1.}$$

7. Desarrollada

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}\,x^n \;=f(0)+f'(0)*x+\frac{f''(0)}{2\,!}x^2+\frac{f'''(0)}{3\,!}x^3+\frac{f^{(iv)}(0)}{4\,!}x^4+\cdots+\frac{f^{n}(0)}{n\,!}x^n$$

Ejemplo 1

Hallar la serie de Taylor para e^x.

1. Se obtiene cada una de las derivadas y se evalúan el $x = 0$.

$f(x) = e^x \qquad f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = e^0 = 1$

$f''(x) = e^x \qquad f''(0) = e^0 = 1$

$f'''(x) = e^x \qquad f'''(0) = e^0 = 1$

$f^{(iv)}(x) = e^x \qquad f^{(iv)}(0) = e^0 = 1$

2. Identificando la Ecuación 7.3.1.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!} x^n = \boldsymbol{f(0)} + \boldsymbol{f'(0)} * x + \frac{\boldsymbol{f''(0)}}{2\,!}x^2 + \frac{\boldsymbol{f'''(0)}}{3\,!}x^3 + \frac{\boldsymbol{f^{(iv)}(0)}}{4\,!}x^4 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n\,!}x^n$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!} = 1 + 1 * x + \frac{1}{2\,!}x^2 + \frac{1}{3\,!}x^3 + \frac{1}{4\,!}x^4 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n\,!}x^n$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!} = 1 + x + \frac{1}{2\,!}x^2 + \frac{1}{3\,!}x^3 + \frac{1}{4\,!}x^4 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n\,!}x^n$$

3. Note que para cualquier valor de n

$$f^n(0) = 1 \;\; \text{(siempre)}$$

4. La serie será, por tanto:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n\,!} = 1 + x + \frac{1}{2\,!}x^2 + \frac{1}{3\,!}x^3 + \frac{1}{4\,!}x^4 + \cdots + \frac{x^n}{n\,!}$$

Recuerde que siempre partimos de $n = 0$

Conceptualizando

Aproximemos el valor de:

$$e^2$$

1. Sacando el valor en la calculadora diremos:

$$e^2 = 7.389056099$$

2. Calculando el valor aproximado con 6 valores

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2\,!}x^2 + \frac{1}{3\,!}x^3 + \frac{1}{4\,!}x^4 + \frac{1}{5\,!}x^5$$

$$e^{\boldsymbol{2}} = 1 + 2 + \frac{1}{2\,!}(2)^2 + \frac{1}{3\,!}(2)^3 + \frac{1}{4\,!}(2)^4 + \frac{1}{5\,!}(2)^5$$

$$e^2 = 1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} + \frac{32}{120} = 1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} = 5 + \frac{6}{3} + \frac{4}{15} = 7 + \frac{4}{15}$$

$$e^2 = \frac{109}{15} = 7.266667$$

3. Para tener una mayor aproximación se debe incrementar el valor de n, o sea que se debe utilizar más polinomios.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2\,!}x^2 + \frac{1}{3\,!}x^3 + \frac{1}{4\,!}x^4 + \frac{1}{5\,!}x^5 + \frac{1}{6\,!}x^6 + \frac{1}{7\,!}x^7 + \frac{1}{8\,!}x^8 + \frac{1}{9\,!}x^9$$

$$e^2 = 1 + 2 + \frac{1}{2\,!}(2)^2 + \frac{1}{3\,!}(2)^3 + \frac{1}{4\,!}(2)^4 + \frac{1}{5\,!}(2)^5 + \frac{1}{6\,!}(2)^6 + \frac{1}{7\,!}(2)^7 + \frac{1}{8\,!}(2)^8 + \frac{1}{9\,!}(2)^9$$

$$e^2 = 1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} + \frac{32}{120} + \frac{64}{720} + \frac{128}{5040} + \frac{256}{40320} + \frac{512}{362880}$$

$$e^2 = 1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \frac{4}{45} + \frac{8}{315} + \frac{2}{315} + \frac{4}{2835}$$

$$e^2 = 7 + \frac{1102}{2835}$$

$$e^2 = \frac{20{,}947}{2835} = 7.38871252$$

Note que entre más polinomios se utilicen más aproximado será el valor al valor real.

También puede utilizar identidades de series para obtener nuevas identidades de series como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2

Hallar la serie de Taylor para e^{x^2}.

1. Para evitar los pasos anteriores de solución de la serie podemos utilizar una identidad base para obtener otra identidad de serie. La que utilizaremos será la del ejemplo 1

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{x}^n}{n\,!} = 1 + \boldsymbol{x} + \frac{1}{2\,!}\boldsymbol{x}^2 + \frac{1}{3\,!}\boldsymbol{x}^3 + \frac{1}{4\,!}\boldsymbol{x}^4 + \cdots + \frac{\boldsymbol{x}^n}{n\,!}$$

2. Se realiza una sustitución:

$$x = x^2$$

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n\,!} = 1 + x^2 + \frac{1}{2\,!}(x^2)^2 + \frac{1}{3\,!}(x^2)^3 + \frac{1}{4\,!}(x^2)^4 + \cdots + \frac{(x^2)^n}{n\,!}$$

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n\,!} = 1 + x^2 + \frac{1}{2\,!}\boldsymbol{x}^4 + \frac{1}{3\,!}x^6 + \frac{1}{4\,!}x^8 + \cdots + \frac{x^{2n}}{n\,!}$$

3. Teniendo como respuesta:

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n\,!}$$

Ejemplo 3

Hallar la serie de Taylor para $\cos(x)$.

1. Se obtiene cada una de las derivadas y se evalúan el $x = 0$.
   $f(x) = \cos(x)$ $\qquad$ $f(0) = \cos(0) = 1$

$$f'(x) = -\text{sen}(x) \qquad f'(0) = -sen(0) = 0$$
$$f''(x) = -\cos(x) \qquad f''(0) = -\cos(0) = -1$$
$$f'''(x) = \text{sen}(x) \qquad f'''(0) = sen(0) = 0$$
$$f^{(iv)}(x) = \cos(x) \qquad f^{(iv)}(0) = \cos(0) = 1$$
$$f^{(v)}(x) = -\text{sen}(x) \qquad f^{(v)}(0) = -\text{sen}(0) = 0$$
$$f^{(vi)}(x) = -\cos(x) \qquad f^{(vi)}(0) = -\cos(0) = -1$$

2. Identificando la Ecuación 7.3.1.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}\, x^n = \boldsymbol{f(0)} + \boldsymbol{f'(0)} * x + \frac{\boldsymbol{f''(0)}}{2\,!}x^2 + \frac{\boldsymbol{f'''(0)}}{3\,!}x^3 + \frac{\boldsymbol{f^{(iv)}(0)}}{4\,!}x^4 + \frac{\boldsymbol{f^{(v)}(0)}}{5\,!}x^5 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n\,!}x^n$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}\, x^n = \mathbf{1} + \mathbf{0} * x + \frac{\mathbf{-1}}{2\,!}x^2 + \frac{\mathbf{0}}{3\,!}x^3 + \frac{\mathbf{1}}{4\,!}x^4 + \frac{\mathbf{0}}{5\,!}x^5 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n\,!}x^n$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}\, x^n = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{2\,!}x^2 + \frac{\mathbf{1}}{4\,!}x^4 + \frac{\mathbf{-1}}{6\,!}x^6 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n\,!}x^n$$

3. Armando la sucesión de potencia se nota que el exponente de x va de dos en dos así como el valor del factorial. También nótese que en el numerador el 1 va intercalado de forma positiva, negativa, positiva, negativa…
   Para ello utilizamos lo que se vio en la secuencia alternas $(-1)^n$
$$\frac{x^{2n}}{(2n)!} * (-1)^n$$
4. Llegando a la respuesta:
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}$$

Ejemplo 4

Hallar la serie de Taylor para $\dfrac{\cos(x)}{x}$

1. Utilizamos de referencia el resultado del ejemplo 3
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} = 1 - \frac{1}{2\,!}x^2 + \frac{1}{4\,!}x^4 - \frac{1}{6\,!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)\,!}x^{2n}$$

2. Se procede a dividir por la izquierda y por la derecha de la ecuación por el valor x.
$$\frac{\cos(x)}{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{\boldsymbol{x}}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} = \frac{1}{\boldsymbol{x}} - \frac{1}{2\,!}\frac{x^2}{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{4\,!}\frac{x^4}{\boldsymbol{x}} - \frac{1}{6\,!}\frac{x^6}{\boldsymbol{x}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)\,!}\frac{x^{2n}}{\boldsymbol{x}}$$
$$\frac{\cos(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\,!}x + \frac{1}{4\,!}x^3 - \frac{1}{6\,!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)\,!}x^{2n-1}$$
3. Teniendo como respuesta
$$\frac{\cos(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n-1}$$

5.3.2. Polinomio de Maclaurin

Algunas funciones no se pueden aproximar utilizando la serie de Taylor. A continuación, se le presenta una función que no puede ser aproximada de tal forma

$$f(x) = \ln x \qquad f(0) = \ln 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(0) = \frac{1}{0}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f'(0) = -\frac{1}{(0)^2}$$

Nótese que esta función no puede aproximarse a un polinomio por la serie Taylor. Para ello está la serie de Maclaurin.

1. Debemos recordar la fórmula de serie de potencia trasladada.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n\,(x-a)^n$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n * n\,(x-a)^{n-1} = a_1 + 2*a_2(x-a) + 3*a_3(x-a)^2 + \cdots + n*a_n\,(x-a)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n * n(n-1)(x-a)^{n-2}$$
$$= 2*1\,a_2 + 3*2\,a_3(x-a) + 4*3\,a_4(x-a)^2 + \cdots + n(n-1)a_n\,(x-a)^{n-2}$$

$$f'''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n * n(n-1)(n-2)(x-a)^{n-3} =$$
$$= 3*2*1\,a_3 + 4*3*2\,a_4(x-a) + 5*4*3\,a_5(x-a)^2 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n\,(x-a)^{n-3}$$

$$f^{(iv)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n * n(n-1)(n-2)(n-3)(x-a)^{n-4} =$$
$$= 4*3*2*1\,a_4 + 5*4*3*2\,a_5(x-a) + 6*5*4*3\,a_6(x-a)^2 + \cdots$$
$$+n(n-1)(n-2)(n-3)a_n\,(x-a)^{n-4}$$

2. Se procede a evaluar $x = a$ en cada función.

$$f(a) = a_0 \quad ; \quad f'(a) = a_1 \quad ; \quad f''(a) = 2*1\,a_2 \quad ; \quad f'''(a) = 3*2*1\,a_3 \quad ; \quad f^{(iv)}(a) = 4*3*2*1\,a_4$$

$$\frac{f(a)}{1} = a_0 \quad ; \quad \frac{f'(a)}{1} = a_1 \quad ; \quad \frac{f''(a)}{2*1} = a_2 \quad ; \quad \frac{f'''(a)}{3*2*1} = a_3 \quad ; \quad \frac{f^{(iv)}(a)}{4*3*2*1} = a_4$$

3. Haciendo la analogía se utiliza el símbolo factorial.

$$\frac{f(a)}{0\,!} = a_0 \quad ; \quad \frac{f'(a)}{1\,!} = a_1 \quad ; \quad \frac{f''(a)}{2\,!} = a_2 \quad ; \quad \frac{f'''(a)}{3\,!} = a_3 \quad ; \quad \frac{f^{(iv)}(a)}{4\,!} = a_4$$

4. Una sucesión del valor a_n.

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}$$

5. Sustituyendo en la serie de potencia

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-a)^n \;=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}\,(x-a)^n$$

6. Llegando a la fórmula de Maclaurin.

$$\boxed{f(x)\;=\;\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}\,(x-a)^n}\qquad \textbf{Ecuación 7.3.2.}$$

7. Desarrollada

$$f(x)\;=\;\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}\,(x-a)^n$$

$$=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2\,!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3\,!}(x-a)^3+\frac{f^{(iv)}(a)}{4\,!}(x-a)^4+\cdots+\frac{f^{n}(a)}{n\,!}(x-a)^n$$

El valor de a puede ser arbitrario y es de referencia. Usted como calculista lo toma con su criterio

Ejemplo 1

Halle la representación en serie de potencia para la función: $f(x)=\ln(x)$

1. Identificamos el valor de a

$$a\neq 0\quad \text{debido a que}\ln(0)=\nexists\qquad (\text{no conduce a nada})$$
$$a=1\;\;(\text{se toma el siguiente entero})$$

2. Se comienza a derivar y a evaluar en a

$$f(x)=\ln(x)\qquad\qquad \boldsymbol{f(1)=\ln 1=0}$$
$$f'(x)=\frac{1}{x}\qquad\qquad \boldsymbol{f'(1)=1}$$
$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}\qquad\qquad \boldsymbol{f''(1)=-1}$$
$$f'''(x)=\frac{2}{x^3}\qquad\qquad \boldsymbol{f'''(1)=2}$$
$$f^{(iv)}(x)=-\frac{6}{x^4}\qquad\qquad \boldsymbol{f^{(iv)}(1)=-6}$$
$$f^{(v)}(x)=\frac{24}{x^5}\qquad\qquad \boldsymbol{f^{(v)}(1)=24}$$

3. Sustituyendo datos en la ecuación 7.3.2.

$$\ln(x)\;=\;\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n\,!}\,(x-1)^n=$$

$$=\boldsymbol{f(1)}+\boldsymbol{f'(1)}(x-1)+\frac{\boldsymbol{f''(1)}}{2\,!}(x-1)^2+\frac{\boldsymbol{f'''(1)}}{3\,!}(x-1)^3+\frac{\boldsymbol{f^{(iv)}(1)}}{4\,!}(x-1)^4+\cdots+\frac{f^{n}(1)}{n\,!}(x-1)^n$$

$$\ln(x)\;=\;\boldsymbol{1}(x-1)+\frac{\boldsymbol{-1}}{2!}(x-1)^2+\frac{\boldsymbol{2}}{3\,!}(x-1)^3+\frac{\boldsymbol{-6}}{4\,!}(x-1)^4+\frac{\boldsymbol{24}}{5\,!}(x-1)^5+\cdots+\frac{f^{n}(1)}{n\,!}(x-1)^n$$

$$\ln(x)\;=\;\frac{(x-1)}{1!}-\frac{1}{2!}(x-1)^2+\frac{2}{3\,!}(x-1)^3-\frac{6}{4\,!}(x-1)^4+\frac{24}{5\,!}(x-1)^5+\cdots+\frac{f^{n}(1)}{n\,!}(x-1)^n$$

4. Debemos realizar la analogía de los números acompañados de la factorial. También debe notar que los valores van intercalados en cuanto a su signo.

$$\frac{1}{1!},\frac{1}{2!},\frac{2}{3!},\frac{6}{4!},\frac{24}{5!},\dots$$

$$\frac{1}{1X1},\frac{1}{2X1},\frac{2}{3X2X1},\frac{6}{4X3X2X1},\frac{24}{5X4X3X2X1},\dots$$

$$\frac{\cancel{1}}{1X\cancel{1}},\frac{\cancel{1}}{2X\cancel{1}},\frac{\cancel{2}}{3X\cancel{2X1}},\frac{\cancel{6}}{4X\cancel{3X2X1}},\frac{\cancel{24}}{5X\cancel{4X3X2X1}},\dots$$

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\dots\frac{1}{n+1}$$

4.1. Como puede observar querido lector, al operar los números evaluados en las derivadas con los números factoriales obtenemos que la sucesión es igual a $n+1$.

4.2. Para ajustar las otras secuencias debemos saber que se decidió iniciar en $n=0$. Como el primer número parte del positivo:

$$\frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}$$

5. Llegando a la respuesta

$$\ln(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}$$

NOTA: Algunos textos inician la serie de $n=1$. Es correcto también, pero al iniciarla en $n=1$ cambiará la forma de su secuencia (respetando los mismos cálculos realizados hasta el paso 3.)

$$\frac{1}{1!},\frac{1}{2!},\frac{2}{3!},\frac{6}{4!},\frac{24}{5!},\dots$$

$$\frac{1}{1X1},\frac{1}{2X1},\frac{2}{3X2X1},\frac{6}{4X3X2X1},\frac{24}{5X4X3X2X1},\dots$$

$$\frac{\cancel{1}}{1X\cancel{1}},\frac{\cancel{1}}{2X\cancel{1}},\frac{\cancel{2}}{3X\cancel{2X1}},\frac{\cancel{6}}{4X\cancel{3X2X1}},\frac{\cancel{24}}{5X\cancel{4X3X2X1}},\dots$$

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\dots\frac{1}{n}\qquad(\text{arrancando de n}=1)$$

4.1. Para ajustar las otras secuencias debemos saber que se decidió iniciar en $n=0$, como el primer número parte del positivo:

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$$

5. Llegando a la respuesta

$$\ln(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$$

Observe que ambas series son equivalentes, lo único que cambia es la forma de verlas, por así decirlo. Usted como calculista debe estar seguro de su procedimiento, recuerde lector, confianza en usted.

Ejemplo 2

Halle la representación en serie de potencia para la función: $f(x) = \ln(x+1)$

1. Simplemente debemos tomar de referencia el resultado del *ejemplo 1*

$$\ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}$$

2. Se debe sustituir la variable por:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x+1}$$

$$\ln(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(\boldsymbol{x}-1)^{n+1}$$

$$\ln(\boldsymbol{x+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(\boldsymbol{x+1}-1)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(\boldsymbol{x})^{n+1}$$

3. La respuesta será

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

Ejemplo 3

Halle la representación en serie de potencia para la función: $f(x) = sen^2(x)$

1. Se debe identificar el valor de a

$$\text{puede ser: } a = 0 \quad \text{porque} \quad \cos(0) = 1 \quad (\text{viendo el paso 2.})$$

2. Obtenido las derivadas y siendo evaluadas en $x = \pi/4$

$f(x) = sen^2(x)$	$f(0) = sen^2(0) \quad = 0$
$f'(x) = 2\, sen(x)\, cos(x)$	$f'(0) = 2sen(0)\cos(0) \quad = 0$
$f''(x) = 2\, cos^2(x) - 2sen^2(x) = 2\, cos(2x)$	$f''(0) = 2\, cos(0) \quad = 2$
$f'''(x) = -4sen(2x)$	$f'''(0) = -4sen(0) \quad = 0$
$f^{(iv)}(x) = -8\, cos(2x)$	$f^{(iv)}(0) = -8\, cos(0) \quad = -8$
$f^{(v)}(x) = 16\, sen(2x)$	$f^{(v)}(0) = 16\, sen(0) \quad = 0$
$f^{(vi)}(x) = 32\, cos(2x)$	$f^{(vi)}(0) = 32\, cos(0) \quad = 32$
$f^{(vii)}(x) = -64\, sen(2x)$	$f^{(vii)}(0) = -64\, sen(0) \quad = 0$
$f^{(viii)}(x) = -128\, cos(2x)$	$f^{(viii)}(0) = -128\, cos(0) \quad = -128$
$f^{(ix)}(x) = 256\, sen(2x)$	$f^{(ix)}(0) = 256\, sen(0) \quad = 0$
$f^{(x)}(x) = 512\, cos(2x)$	$f^{(x)}(0) = 512\, cos(0) \quad = 512$

3. Sustituyendo datos en la ecuación 7.3.2.

$$sen^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2\,!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3\,!}(x-0)^3$$

$$+\frac{f^{(iv)}(0)}{4\,!}(x-0)^4 + \frac{f^{(v)}(0)}{5\,!}(x-0)^5 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \cdots + \cdots \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$$

3.1. Sustituyendo datos.

$$sen^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n = 0 + 0(x-0) + \frac{2}{2\,!}(x-0)^2 + \frac{0}{3\,!}(x-0)^3 + \frac{-8}{4\,!}(x-0)^4$$

$$+\frac{0}{5\,!}(x-0)^5 + \frac{32}{6\,!}(x-0)^6 + \frac{0}{7\,!}(x-0)^7 + \frac{-128}{8\,!}(x-0)^8 + \frac{0}{9\,!}(x-0)^9 + \frac{512}{10\,!}(x-0)^{10} + \cdots$$

$$sen^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n = \frac{2}{2\,!}x^2 - \frac{8}{4\,!}x^4 + \frac{32}{6\,!}x^6 - \frac{128}{8\,!}x^8 + \frac{512}{10\,!}x^{10} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$$

4. Planteando la sucesión

$$\begin{array}{cc} (-1)^n & \text{para intecalar signos e iniciar en: } n = 0 \\ x^{2n+2} & \text{para la potencia e iniciar en: } n = 0 \\ (2n+2)! & \text{para el factorial e iniciar en: } n = 0 \end{array}$$

4.1. Planteando la sucesión en el numerador (identificando una sucesión geométrica)

$$2\ ,8\ ,32\ ,128\ ,512\ ,\ldots$$

$$\frac{8}{2} = 4 \quad ; \quad \frac{32}{8} = 4 \quad ; \quad \frac{128}{32} = 4 \quad ; \quad \frac{512}{128} = 4$$

$$2 * (4)^{n-1} \quad \text{iniciando con } n = 1 \quad (\text{necesitamos n} = 0)$$

$$2 * (4)^n \quad \text{iniciando con } n = 0 \quad (\text{lo necesario})$$

5. La serie que represente: $sen^2(x)$

$$sen^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n * \ 2 * (4)^n}{(2n+2)!} * x^{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n * \ 2 * (2 * 2)^n}{(2n+2)!} * x^{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n * 2^{2n+1}}{(2n+2)!} * x^{2n+2}$$

$$sen^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n * 2^{2n+1}}{(2n+2)!} * x^{2n+2}$$

5.3.3. Obtención de otras identidades de series utilizando la derivada e integral

Se puede obtener identidades de series a través de la derivada o de la integral. Vea el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1

Obtenga la serie de la función: $y = \dfrac{1}{x}$

1. Sabiendo que:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

2. Teniendo la identidad de serie:

$$\ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}$$

3. Derivando respecto a x la serie del paso 2.

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(n+1)*(x-1)^{n+1-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n*(x-1)^n$$

4. Nuestra respuesta será

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n*(x-1)^n$$

Ejemplo 2

Obtenga la serie de la función: $sen(x)$

1. Para no utilizar directamente la serie de Maclaurin se puede encontrar la serie solicitada sabiendo:

$$\frac{d}{dx}sen(x) = \cos(x)$$

$$d\big(sen(x)\big) = \cos(x)\,dx \qquad \text{despejando diferencial}$$

$$\int d(sen(x))\,dx = \int \cos(x)\,dx \qquad \text{integrando}$$

$$sen(x) = \int \cos(x)\,dx \qquad \text{integrando}$$

2. Teniendo la identidad de serie:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n}$$

3. Integrando la identidad, recuerde que la sumatoria se toma como constante

$$\int \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

4. Analizando el número con factorial.

$$(2n)!*(2n+1)$$

4.1. Si $n=4$

$$(2*4)!*(2(4)+1) = 8!*9 \quad \text{puede ser igual a } 9!$$

$$9! = (2(4)+1)!$$

4.2. La identidad del valor factorial:

$$(2n)!*(2n+1) = (2n+1)\,!$$

5. La integral por tanto quedará:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}$$

6. La identidad serie de seno será:

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}$$

A continuación, se le presenta una tabla con las series más importantes utilizadas para la transformación.

Tabla 7.3

FUNCIÓN	SERIE	DESARROLLADA
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!}\, x^n$	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{1}{n\,!}\, x^n$
$cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}$
$sen(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n+1}$
$sen^2(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n * 2^{2n+1}}{(2n+2)!} * x^{2n+2}$	$\frac{2}{2\,!}x^2-\frac{8}{4\,!}x^4+\frac{32}{6\,!}x^6-\frac{128}{8\,!}x^8+\cdots+\frac{(-1)^n * 2^{2n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2}$
$tan^{-1}(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n * (x-1)^n$	$1-(x-1)+(x+1)^2-(x+1)^3+\cdots+(-1)^n * (x-1)^n$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n$
$\ln(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}$	$(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}$
$\ln(x+1)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$
$\cosh(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$	$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$
$\mathrm{senh}(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$	$x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$

6. ÁLGEBRA MATRICIAL

El álgebra matricial tiene una alta importancia dentro del mundo de la matemática y dentro de la ingeniería. En esta parte de la matemática nos enfocamos en los temas de matrices, comenzando con responder a ¿qué es una matriz?, tipos de matrices, operaciones entre matrices como lo es la suma, resta y la multiplicación, determinantes entre otros temas que veremos en este capítulo.

Usted como matemático se enfrenta a diversidad de cálculos, desde los más sencillos hasta los más complejos como se ha visto en los capítulos anteriores. En ocasiones es necesario almacenar y ordenar estos mismos datos, como en ecuaciones por ponerle un ejemplo directo, en donde se tienen muchas variables y muchos coeficientes. Entonces lo que hace las matrices es ordenar en base a columnas los coeficientes de cada una de las variables y en base a filas la cantidad de ecuaciones disponibles a resolver.

Un ejemplo directo de este orden de datos que hacen las matrices se puede observar en los ámbitos gráficos de videojuegos, esto debido a que las tarjetas de vídeo de las computadoras realizan todos los procedimientos y orden de la información programada en forma matricial.

En la portada usted observa al hermoso y magnifico san bernardo. El bello animal es un símbolo de las matrices, puesto que no cualquiera tiene un san bernardo y así mismo no todos comprenden las matrices. Debemos luchar para tener un san bernardo, debemos luchar para comprender las matrices.

6.1. Matrices

Una matriz es un conjunto de números ordenados en filas y en columnas. Lo que hace la matriz es ordenar los datos para que el calculista tenga un mejor control y pueda operar de forma directa las mismas matrices sin utilizar expresiones algebraicas y solo llevar secuencia de sus números.

Donde:

Filas (horizontales) Columnas (verticales)

1. Contemple la siguiente ecuación (1)

$$2x + 4y = 10$$

2. Contemple la siguiente ecuación (2)

$$5x - 2y = 13$$

3. Una forma de representar que la x de ambas ecuaciones, así como la y de ambas ecuaciones es la misma variable o que se relacionan las ecuaciones, expresando de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 5x - 2y = 13 \end{cases}$$

4. Otra forma de expresa y ordenar esa ecuación sería colocándola en una matriz (conjunto de números)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \textbf{igualdad} \end{array} \\ \mathrm{A} = & \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{10} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} & \mathbf{13} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{ecuación } (1) \\ \text{ecuación } (2) \end{array}$$

5. Nótese querido lector que las columnas expresan las variables y las fila expresan la cantidad de variables. Entonces eso es una matriz, un conjunto de puntos ordenados por filas y columnas.

6.1.1. Datos de una matriz

- La matriz se representa con letras mayúsculas.
- Se pueden escribir entre paréntesis o entre corchetes (este símbolo es el más común)
- Cada número que lleva dentro se le llama elemento.
- Una matriz se juzga por su cantidad de filas y cantidad de columnas.

Identificación de elementos

Los elementos se colocan con letra minúscula e indican por coordenadas de forma

$$a_{ij} \quad \text{donde} \quad i = \text{número de fila} \;\; ; \; j = \text{número de columna}$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{10} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} & \mathbf{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a_{11}} = \mathbf{2} = \textbf{elemento } \boldsymbol{a} \textbf{ fila 1 y columna 1} \quad ; \quad \boldsymbol{a_{23}} = \mathbf{13} = \textbf{elemento } \boldsymbol{a} \textbf{ fila 2 y columna 3}$$

6.1.2. Dimensión de una matriz

Otra forma de clasificar una matriz es saber a través de una multiplicación cuántas filas tiene y cuántas columnas.

$$\boxed{\mathrm{A}_{m*n}} \quad \mathrm{A} = \text{Matriz} \quad ; \quad m = \text{cantidad de filas} \quad ; \quad n = \text{cantidad columnas}$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{10} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} & \mathbf{13} \end{bmatrix}$$

- La matriz A tiene dos filas y tiene tres columnas, por tanto, se dice que:

$$\mathrm{A}_{2*3}$$

Ejemplo 1

Se tiene la siguiente matriz. Identifique:

a) Dimensión
b) Elemento b_{12} ; b_{31} ; b_{43} ; b_{51}

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -5 & 15 & 3 \\ 8 & -6 & 1 \\ -4 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

1. Se identifica la dimensión de la matriz

$$\text{Se tiene cuatro filas y se tiene tres columnas, por tanto la dimensión es de:}$$
$$\mathrm{B}\ 4\ \mathrm{X}\ 3$$

2. Identificando los elementos solicitados

$$b_{12} = 5 \quad (\text{fila 1 columna 2})$$
$$b_{31} = 8 \quad (\text{fila 3 columna 1})$$
$$b_{43} = -7 \quad (\text{fila 4 columna 3})$$
$$b_{51} = \nexists \quad (\text{fila 4 columna 3})$$

6.1.3. Tipos de matrices

Matriz fila

Este tipo de matriz está formada por una sola fila y muchas columnas, por tanto, será una matriz de $1 \mathrm{x}\ n$.

$$\mathrm{A} = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14} \ \dots \ a_n]$$

Matriz columna

Matriz formada por una sola columna y muchas filas, por tanto, será una matriz de n x 1

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

Matriz nula

Todos sus elementos son de valor cero.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada

Tiene el mismo número de filas y columnas. Esta es de las más importantes. Por tanto, su dimensión es de $n \text{ x } n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

A esta matriz cuadrada se le debe juzgar por su diagonal

Diagonal mayor o diagonal principal

Esta diagonal está formada por: a_{11} , a_{22} , a_{33} , a_{44} , a_{55} … a_{nn}

Diagonal menor o diagonal secundaria

Formada por los elementos a_{ij} donde se cumple que:

$$i + j = n + 1$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

Diagonal mayor　　Diagonal menor

	En la matriz A	En la matriz B	En la matriz C
	A3x3	B2x2	C $4x4$
	$n = 3$	$n = 2$	$n = 4$
Ejemplo en:	a_{13}	b_{21}	c_{32}
	$i = 1 \quad j = 3$	$i = 2 \quad j = 1$	$i = 3 \quad j = 2$
Sustituyendo en ecuación:			
	$i + j = n + 1$	$i + j = n + 1$	$i + j = n + 1$
	$1 + 3 = 3 + 1$	$2 + 1 = 2 + 1$	$3 + 2 = 4 + 1$
	$4 = 4$	$3 = 3$	$5 = 5$

Nótese que para cada valor dentro de la diagonal menor se cumple $i + j = n + 1$

6.1.4. Operación entre matrices

Una matriz es un conjunto de puntos ordenados, como ya se ha dicho, que muchas veces viene de ecuaciones lineales, por tanto, esos valores los podemos operar entre otros mismos valores (operación entre matrices)

Las operaciones que se verán son:

1. Suma de matrices
2. Resta de matrices
3. Multiplicación de una constante por una matriz
4. Multiplicación de matrices.

A. Suma de matrices

Para la suma de matrices, las mismas deben ser de la misma dimensión

$$Amxn + Bmxn = Cmxn$$

Donde A, B y C son matrices.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} \end{bmatrix} \; ; \; C = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & a_{n3}+b_{n3} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1

Sume las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

1. La suma de ambas matrices será:

$$A + B = C$$

$$C = \begin{bmatrix} 3+0 & 5+(-2) & -3+2 \\ -2+1 & 1+3 & 4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

2. La respuesta será:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

B. Resta de matrices

Para la resta de matrices, las mismas deben ser de la misma dimensión.

$$Amxn - Bmxn = Cmxn$$

Donde A, B y C son matrices.

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} \end{bmatrix} \; ; \; C = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} \\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} & a_{33}-b_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}-b_{n1} & a_{n2}-b_{n2} & a_{n3}-b_{n3} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1

Sume las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

1. La resta será:

$$C = \begin{bmatrix} 3-0 & 5-(-2) & -3-2 \\ -2-1 & 1-3 & 4-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -5 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

2. La respuesta será.

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -5 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

C. Multiplicación de una constante por una matriz

Recuerde que en un sistema de ecuaciones al multiplicarla por una constante se multiplican todos los valores.

$$2 * \begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 5x - 2y = 13 \end{cases} = \begin{cases} 2 * 2x + 2 * 4y = 2 * 10 \\ 2 * 5x - 2 * 2y = 2 * 13 \end{cases} = \begin{cases} 4x + 8y = 20 \\ 10x - 4y = 26 \end{cases}$$

Al multiplicar una constante por todo el sistema de ecuaciones se multiplica cada valor por la constante. Así mismo sucede con las matrices

$$\mathrm{k} * \mathbf{A} = \mathrm{k} * \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \boldsymbol{a_{n3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{k} * \boldsymbol{a_{11}} & \mathrm{k} * \boldsymbol{a_{12}} & \mathrm{k} * \boldsymbol{a_{13}} \\ \mathrm{k} * \boldsymbol{a_{21}} & \mathrm{k} * \boldsymbol{a_{22}} & \mathrm{k} * \boldsymbol{a_{23}} \\ \mathrm{k} * \boldsymbol{a_{31}} & \mathrm{k} * \boldsymbol{a_{32}} & \mathrm{k} * \boldsymbol{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{k} * \boldsymbol{a_{n1}} & \mathrm{k} * \boldsymbol{a_{n2}} & \mathrm{k} * \boldsymbol{a_{n3}} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1

Encuentre $5\mathrm{D}$

Donde

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} -3 & 8 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Se multiplica la matriz por 5.

$$5 * \mathbf{D} = 5 * \begin{bmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{8} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{7} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(-3) & 5(8) & 5(3) \\ 5(4) & 5(5) & 5(1) \\ 5(7) & 5(-2) & 5(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 40 & 15 \\ 20 & 25 & 5 \\ 35 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Teniendo como respuesta

$$5\mathrm{D} = \begin{bmatrix} -15 & 40 & 15 \\ 20 & 25 & 5 \\ 35 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Encuentre la suma de $5\mathrm{A} + 2\mathrm{B}$

$$\text{donde:} \qquad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 8 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Se multiplica las matrices por las constantes

$$5\mathrm{A} = 5 * \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad ; \quad 2\mathrm{B} = 2 * \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 8 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 15 & 10 & -20 \\ -5 & 5 & 25 \\ 20 & 15 & 35 \end{bmatrix} \qquad 2\mathrm{B} = 2 * \begin{bmatrix} 0 & 8 & 12 \\ 6 & -4 & 16 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

2. La suma de las matrices ampliadas será:

$$5\mathrm{A} + 2\mathrm{B}$$

$$\begin{bmatrix} 15 & 10 & -20 \\ -5 & 5 & 25 \\ 20 & 15 & 35 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 8 & 12 \\ 6 & -4 & 16 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15+0 & 10+8 & -20+12 \\ -5+6 & 5+(-4) & 25+16 \\ 20+(-2) & 15+(-4) & 35+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 18 & -8 \\ 1 & 1 & 41 \\ 18 & 11 & 37 \end{bmatrix}$$

3. Teniendo como respuesta

$$5A + 2B = \begin{bmatrix} 15 & 18 & -8 \\ 1 & 1 & 41 \\ 18 & 11 & 37 \end{bmatrix}$$

D. Multiplicación de una matriz con una matriz

Para poder multiplicar dos matrices es necesario que el número de **columnas** de la primera matriz sea igual al número de **filas** de la segunda matriz, o sea que se debe cumplir:

$$A mn \text{ X } B np$$
$$\boldsymbol{mn} * \boldsymbol{np}$$

Iguales

$$A_{2*3} \text{ X } B_{3*4} \quad ; \quad A_{4*5} \text{ X } B_{5*2} \quad ; \quad C_{3*3} \text{ X } D_{3*3} \quad ; \quad E_{4*4} \text{ X } G_{4*3}$$

El resultado o la matriz C será de dimensión $\boldsymbol{m}$ x $\boldsymbol{p}$ (filas $\boldsymbol{m}$ y columnas $\boldsymbol{p}$)

- Si no se cumple lo anterior no se puede multiplicar las matrices.

  También debe saber querido lector que en matrices no es lo mismo $A \cdot B$ que $B \cdot A$, solo si ambas son matrices cuadradas, ya que:

$$A mn \text{ X } B np \qquad\qquad B np \text{ X } A mn$$
$$mn * np \quad \text{(cumple)} \qquad\qquad np * mn \quad \text{(no cumple)}$$

¿Cómo se opera la multiplicación?

El elemento que se encuentra en la fila i en la columna j de la matriz C $(C = A \cdot B)$ se obtienen multiplicando los elementos de la fila i de la matriz A por la columna j de la matriz B y sumando sus resultados.

1. Compruebe si se puede hacer la multiplicación $(mn * np)$
2. Ubique la dimensión de su matriz C, donde $C = A \cdot B$
3. Identifique cada elemento de la matriz C $(c_{11}, c_{21}, c_{31} \ldots)$
4. Encuentre el valor de cada elemento, multiplicando filas y columnas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3x3} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3x2} \qquad A \cdot B = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

4.1. Se obtiene c_{11} multiplicando la primera fila con la primera columna. El 1 del subíndice indica la primera fila y el otro 1 indica la primera columna.

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{bmatrix}_{3x3} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3x2}$$

$$c_{11} = a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} + a_{13} * b_{31}$$

4.2. Se obtiene c_{21} multiplicando la segunda fila con la primera columna. El 2 del subíndice indica la segunda fila y el otro 1 indica la primera columna.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{bmatrix}_{3x3} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3x2}$$

$$c_{21} = a_{21} * b_{11} + a_{22} * b_{21} + a_{23} * b_{31}$$

4.3. Se obtiene c_{31} multiplicando la tercera fila con la primera columna. El 3 del subíndice indica la tercera fila y el otro 1 indica la primera columna.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ \boxed{a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33}} \end{bmatrix}_{3x3} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3x2}$$

$$c_{31} = a_{31} * b_{11} + a_{32} * b_{21} + a_{33} * b_{31}$$

4.4. Se obtiene c_{12} multiplicando la primera fila con la segunda columna. El 1 del subíndice indica la primera fila y el otro 2 indica la segunda columna.

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{bmatrix}_{3x3} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3x2}$$

$$c_{12} = a_{11} * b_{12} + a_{12} * b_{22} + a_{13} * b_{32}$$

4.5. Se obtiene c_{22} multiplicando la segunda fila con la segunda columna. El 2 del subíndice indica la segunda fila y el otro 2 indica la segunda columna.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{bmatrix}_{3x3} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3x2}$$

$$c_{22} = a_{21} * b_{12} + a_{22} * b_{22} + a_{23} * b_{32}$$

4.6. Se obtiene c_{32} multiplicando la tercera fila con la segunda columna. El 3 del subíndice indica la tercera fila y el otro 2 indica la segunda columna.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ \boxed{a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33}} \end{bmatrix}_{3x3} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3x2}$$

$$c_{32} = a_{31} * b_{12} + a_{32} * b_{22} + a_{33} * b_{32}$$

Ejemplo 1

Encuentre la multiplicación entre las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

1. Se comprueba si se pueden multiplicar

$$2 \text{ x } \mathbf{3} \,;\; \mathbf{3} \text{ x } 1 \qquad (\text{cumple con } A \cdot B)$$

Se tendrá una matriz resultante de $2x1$ (2 filas y 1 columna)

2. Se dice que la multiplicación dará:

$$C = A \cdot B \qquad \text{Donde} \qquad C = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} \quad (2 \text{ filas y } 1 \text{ columna})$$

3. Identificando elementos de C.

3.1. Identificando c_{11} se multiplica la primera fila y primera columna

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad -2 \quad 3} \\ 1 \quad\; 0 \quad -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = (1 * 4) + (-2 * 5) + (3 * 6) = 4 - 10 + 18 = 12$$

3.2. Identificando c_{21} se multiplica la primera fila y primera columna

$$A = \begin{bmatrix} 1 \quad -2 \quad 3 \\ \boxed{1 \quad\; 0 \quad -1} \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

$$c_{21} = (1 * 4) + (0 * 5) + (-1 * 6) = 4 + 0 - 6 = -2$$

4. Sustituyendo valores

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 12 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Encuentre la multiplicación entre las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Se comprueba si se pueden multiplicar

$$3 \text{ x } \mathbf{3} \,;\; \mathbf{3} \text{ x } 2 \qquad (\text{cumple con } A \cdot B)$$

Se tendrá una matriz resultante de $3x2$ (3 filas y 2 columnas)

2. Se dice que la multiplicación dará:

$$C = A \cdot B \qquad \text{Donde} \qquad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix} \quad (2 \text{ filas y } 1 \text{ columna})$$

3. Identificando elementos de C.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

3.1. Identificando c_{11} multiplicando la primera fila y la primera columna

$$c_{11} = (1 * 1) + (2 * 0) + (3 * -2) = 1 + 0 - 6 = -5$$

3.2. Identificando c_{21} multiplicando la segunda fila y la primera columna

$$c_{21} = (0 * 1) + (1 * 0) + (0 * -2) = 0 + 0 + 0 = 0$$

3.3. Identificando c_{31} multiplicando la tercera fila y la primera columna

$$c_{31} = (3 * 1) + (2 * 0) + (1 * -2) = 3 + 0 - 2 = 1$$

3.4. Identificando c_{12} multiplicando la primera fila y la segunda columna

$$c_{12} = (1 * -1) + (2 * 2) + (3 * 0) = -1 + 4 + 0 = 3$$

3.5. Identificando c_{22} multiplicando la segunda fila y la segunda columna

$$c_{22} = (0 * -1) + (1 * 2) + (0 * 0) = 0 + 2 + 0 = 2$$

3.6. Identificando c_{32} multiplicando la tercera fila y la segunda columna

$$c_{32} = (3 * -1) + (2 * 2) + (1 * 0) = -3 + 4 + 0 = 1$$

4. Sustituyendo valores

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6.2. Determinantes

Una determinante o la determinante de una matriz **es un número** que representa una matriz cuadrada, mismo número de filas que de columnas. Recuerde que una matriz se expresa con letras mayúsculas, pues bien, una determinante se representa entre valores absolutos que indica el tamaño de una matriz o con la simbología de t(Matriz).

$$|A| = \det(A)$$

Sus aplicaciones directas son: simplificar cálculos del rango o de la matriz inversa que lo veremos más adelante. Las determinantes más comunes por obtener en este curso serán para matrices de:

- Matrices de 2X2
- Matrices de 3X3
- Matrices de 4X4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Indica Matriz} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{Indica Determinante}$$

6.2.1. Determinante de matriz 2X2

Las determinantes de 2X2 serán a las matrices de forma

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

La manera de resolver estas determinantes es bien sencilla, ya que solo se tienen que restar a la diagonal mayor y la diagonal menor.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\det A = a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}$$

Ejemplo 1

Evaluación de determinante de orden 2.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$$

1. Se multiplican los valores de forma cruzada

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (2)(-4) - (1)(3) = -8 - 3 = -11$$

$$\text{Determinante} = -11$$

Ejemplo 2

Evaluación de determinante de orden 2.

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Se multiplican los valores de forma cruzada

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-3)(-1) - (-2)(0) = 3 - 0 = 3$$

$$\text{Determinante} = 3$$

6.2.2. Determinante de matriz 3X3

Las determinantes de 3X3 serán a las matrices de forma

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Los métodos de solución serán:

- Método por menores y cofactores
- Regla de Sarrus
- Regla de Cramer
- Método de cofactores

A. Método por menores y cofactores

Este método puede utilizarse no solo para determinantes de 3X3, sino para dimensiones más grandes.

Utiliza un **cofactor** c_{ij} de la entrada a_{ij} donde el cofactor es $c_{ij} = (-1)^{i+j}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

1. Se selecciona el primer elemento de la primera columna

$$a_{11}$$

2. Ubicando el elemento se eliminan la columna y fila que ubica ese elemento.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3. El cofactor para a_{11} será

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}[a_{22} * a_{33} - a_{23} * a_{32}] = (-1)^2[a_{22} * a_{33} - a_{23} * a_{32}]$$

4. Se selecciona el segundo elemento de la segunda columna

$$a_{12}$$

5. Ubicando el elemento se eliminan la columna y fila que ubica ese elemento.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

6. El cofactor para a_{12} será

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}[a_{21} * a_{33} - a_{23} * a_{31}] = (-1)^3[a_{21} * a_{33} - a_{23} * a_{31}]$$

7. Se selecciona el primer elemento de la tercera columna

$$a_{13}$$

8. Ubicando el elemento se eliminan la columna y fila que ubica ese elemento.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

9. El cofactor para a_{13} será

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}[a_{21} * a_{32} - a_{22} * a_{31}] = (-1)^4[a_{21} * a_{32} - a_{22} * a_{31}]$$

10. La determinante por tanto será:

$$\text{Determinante} = a_{11}c_{11} + a_{12}\,c_{12} + a_{13}c_{13}$$

Ejemplo 1

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1. Se selecciona el primer elemento de la primera columna.

$$a_{11} = 2$$

1.1. Ubicando el elemento se eliminan la columna y fila que ubica ese elemento.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1.2. El cofactor para a_{11} será

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \, [\,(0)(1) - (1)(-5)\,] = 1 * [0+5] = 5$$

2. Se selecciona el primer elemento de la segunda columna

$$a_{12} = -1$$

2.1. Ubicando el elemento se eliminan la columna y fila que ubica ese elemento.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

2.2. El cofactor para a_{12} será

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3 \, [(3)(1) - (-5)(2)] = -1 * [3+10] = -13$$

3. Se selecciona el primer elemento de la tercera columna

$$a_{13} = 3$$

3.1. Ubicando el elemento se eliminan la columna y fila que ubica ese elemento.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

3.2. El cofactor para a_{13} será

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4 \, [\,(3)(1) - (0)(2)] = 1 * [3-0] = 3$$

4. El determinante será

$$\text{Determinante} = a_{11}c_{11} + a_{12}\,c_{12} + a_{13}c_{13}$$
$$\text{Determinante} = (2)(5) + (-1)(-13) + (3)(3)$$
$$\text{Determinante} = 10 + 13 + 9$$
$$\text{Determinante} = 32$$

Se prefiere utilizar la primera fila para no equivocarse, pero también puede utilizar otro orden como la segunda columna (ya no la primera fila)

$$\text{Determinante} = a_{12}c_{12} + a_{22}\,c_{22} + a_{32}c_{32}$$

$$\text{Determinante} = (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (0)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\text{Determinante} = (-1)(-1)(13) + 0(1)(-4) + (1)(-1)(-19)$$

$$\text{Determinante} = 13 + 0 + 19 = 32$$

Asimismo, pudo tomar de referencia cualquier columna o fila. Recuerde utilizar mejor la fila 1

Ejemplo 2

$$\begin{vmatrix} 12 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ -10 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

1. La determinante toma de referencia la primera fila

$$\text{determinante} = a_{11} * c_{11} + a_{12} * c_{12} + a_{13} * c_{13}$$

2. Se sustituyen valores. Para la matriz de c_{11} se elimina la primera fila y la primera columna y así sucesivamente con los demás datos.

$$\det = (12) * (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-1) * (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -10 & -3 \end{vmatrix} + (3) * (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -10 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det = (12)(-1)(-3+2) \ + (-1)(-1)(9-10) \ + (3)(-1)(-6+10)$$

$$\det = (12)(-1)(-1) \ + (-1)(-1)(-1) \ + (3)(-1)(4) \ = \ \cancel{12} - 1 - \cancel{12}$$

$$\text{Det} = -1$$

B. Regla de Sarrus

Este método es especial para matrices de 3X3, nada más. El método consiste en operar la matriz como si fuera de 2X2 y para ello agrega dos filas de la misma matriz o agrega dos columnas de esta. En este texto se utilizará la metodología de agregar dos filas.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

1. Se agregan por debajo de la tercera fila las dos primeras.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

2. Se trazan las diagonales mayores y diagonales menores.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\text{Diagonal Mayor} = \ a_{11} * a_{22} * a_{33} \ + \ a_{21} * a_{32} * a_{13} + a_{31} * a_{12} * a_{23}$$
$$\text{Diagonal Menor} = \ a_{13} * a_{22} * a_{31} \ + \ a_{23} * a_{32} * a_{11} + a_{33} * a_{12} * a_{21}$$

$$\text{determinante} \ = \ \text{Diagonal mayor} \ - \ \text{Diagonal menor}$$

Ejemplo 1

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

1. Se une las dos primeras filas por debajo de la tercera fila

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

2. La determinante se obtiene restándole a la diagonal mayor la diagonal menor

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (0 * 3 * 3) + (2 * -1 * 1) + (0 * 1 * 2) - [(1 * 3 * 0) + (2 * -1 * 0) + (3 * 1 * 2)]$$

$$\text{determinante} = 0 - 2 + 0 - [0 + 0 + 6] = -2 - [6] = -8$$

$$\text{determinante} = -8$$

Ejemplo 2

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 0 & 8 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

3. Se une las dos primeras filas por debajo de la tercera fila

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 0 & 8 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 0 & 8 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & 8 & -1 \end{vmatrix}$$

4. La determinante se obtiene restándole a la diagonal mayor, la diagonal menor

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 0 & 8 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & 8 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (5 * 8 * 2) + (0 * 5 * -3) + (-4 * 2 * -1) - [(-3 * 8 * -4) + (-1 * 5 * 5) + (2 * 2 * 0)]$$

$$\text{determinante} = 80 + 0 + 8 - [96 - 25 + 0] = 88 - [71] = 88 - 71 = 17$$

$$\text{Determinante} = 17$$

6.2.3. Determinante de matriz 4 X 4

Existen muchos métodos para encontrar la determinante de estas matrices. Los más reconocidos son:

- Método por menores y cofactores
- Método de Gauss
- Regla de Laplace

A. Método por menores y cofactores

Similar al procedimiento de la matriz 3X3, este método reduce la matriz en tamaño y complejidad, primero la de 4X4, luego la de 3X3 y por último la de 2X2. De igual manera, se toma referencia cualquier fila o columna para los cofactores.

Ejemplo 1

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

1. Se selecciona el primer elemento de la primera columna

$$a_{11} = 2$$

1.1. Ubicando el elemento se elimina la columna y la fila que ubica ese elemento.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

1.2. El cofactor para a_{11} será

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2 * -\mathbf{12} = -12$$

1.3. Encontrando la determinante de la matriz 3X3

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

1.3.1. De forma práctica la determinante será

$$= (1) * (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (0) * (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (3) * (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{determinante 3X3} = (1) * (-6) + 0 + (3)(-2) = -6 - 6 = -\mathbf{12}$$

2. Se selecciona el primer elemento de la segunda columna

$$a_{12} = 0$$

2.1. Ubicando el elemento se elimina la columna y la fila que ubica ese elemento.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

2.2. El cofactor para a_{12} será

$$c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 * -\mathbf{3} = 3$$

2.3. Encontrando la determinante de la matriz 3X3

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

2.3.1. De forma práctica la determinante será

$$= (0) * (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (0) * (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (3) * (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{determinante 3X3} = 0 + 0 + (3)(-1) = -\mathbf{3}$$

3. Se selecciona el primer elemento de la tercera columna.

$$a_{13} = 0$$

3.1. Ubicando el elemento se elimina la columna y la fila que ubica ese elemento.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

3.2. El cofactor para a_{13} será

$$c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 * \mathbf{2} = 2$$

3.3. Encontrando la determinante de la matriz 3X3

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

3.3.1. De forma práctica la determinante será

$$= (0) * (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (1) * (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (3) * (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{determinante 3X3} = 0 + (1)(-1)(-2) + (3)(0) = \mathbf{2}$$

4. Se selecciona el primer elemento de la tercera columna.

$$a_{14} = 1$$

4.1. Ubicando el elemento se elimina la columna y la fila que ubica ese elemento.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

4.2. El cofactor para a_{13} será

$$c_{14} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5 * \mathbf{1} = -1$$

4.3. Encontrando la determinante de la matriz 3X3

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

4.3.1. De forma práctica la determinante será

$$= (0) * (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (1) * (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (0) * (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{determinante 3X3} = 0 + (1)(-1)(-1) + (0)(0) = \mathbf{1}$$

5. La Determinante será

$$\text{determinante} = c_{11} * a_{11} + c_{12} * a_{12} + c_{13} * a_{13} + c_{14} * a_{14}$$

$$\text{determinante} = (-12)(2) + (3)(0) + (2)(0) + (-1)(1) = -24 - 1 = -25$$

$$\text{Determinante 4X4} = -25$$

Esta es la forma de encontrar la determinante. Querido lector, el método más sencillo será la práctica, y verá que conociendo el algoritmo podrá fácilmente encontrar la determinante.

Ejemplo 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

1. La matriz utilizando el método de cofactores

$$\det = (1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+(4)(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

2. Resolviendo las determinantes 3X3

★

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + (3)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= (2)(-6) + (-1)(0) + (3)(0) = -\mathbf{12}$$

★

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-4)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (3)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= (-4)(-6) + (-1)(15) + (3)(-6) = 24 - 15 - 18 = \mathbf{-9}$$

★ $$\begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-4)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (3)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (-4)(0) + (2)(-1)(15) + (3)(0) = \mathbf{-30}$$

★ $$\begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-4)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (-4)(0) + (2)(-1)(-6) + (1)(0) = \mathbf{12}$$

3. Sustituyendo los datos en el paso 1.

$$\det = (1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$
$$+(4)(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\det = (1)(\mathbf{-12}) + 2(-1)(\mathbf{-9}) + (-3)(\mathbf{-30}) + (4)(-1)(\mathbf{12})$$
$$\det = -12 + 18 + 90 - 48 = 48$$

4. La respuesta será

$$\text{Determinante} = 48$$

B. Método de Gauss Jordán

Lo que hace este método es convertir la matriz original en una matriz triangular superior.

Matriz triangular superior

Una matriz triangular superior es aquella matriz cuadrada cuyos valores por debajo de la diagonal Mayor son todos igual a cero.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

Matriz triangular inferior

Una matriz triangular inferior es aquella matriz cuadrada, cuyos valores por encima de la diagonal Mayor son todos igual a cero.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

¿Cómo se resuelve?

1. Suponga que tenemos una matriz de 4X4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

2. Cada elemento de la diagonal mayor será el pivote para transformar la matriz. La fila 1 se comienza a dividir dentro del valor a_{11}

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} * \frac{1}{a_{11}} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \frac{a_{14}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

2.1. El 1 nos servirá para transformar a_{21} , a_{31} y a_{41} a 0

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \frac{a_{14}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} * (a_{21} * \text{Fila 1} - \text{Fila 2}) \quad \text{Ó} \quad \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \frac{a_{14}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \text{Fila 2} - a_{21} * \text{Fila 1}$$

2.2. Lo que se hace es comenzar a operar las filas con las fórmulas indicadas, cualquiera de las dos para la segunda fila.

$$a_{21} * \text{Fila 1} - \text{Fila 2} = \text{Fila 2 Nueva} \quad \text{o} \quad \text{Fila 2} - a_{21} * \text{Fila 1} = \text{Fila 2 Nueva}$$

$$a_{21} * (1) - a_{21} = 0 \quad \text{o} \quad a_{21} - a_{21}(1) = 0$$

Esta fórmula también aplica para los demás valores de la segunda fila y para cada columna.

$$a_{21} * \text{Fila 1} - \text{Fila 2} \quad \text{o} \quad \text{Fila 2} - a_{21} * \text{Fila 1}$$

$$a_{21} * \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) - a_{22} = a_{22\text{N}} \quad \text{o} \quad a_{22} - a_{21} * \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) = a_{22\text{N}}$$

Así se continua con todas las columnas de la fila 2.

2.3. Para la fila 3 se realiza el mismo procedimiento

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \frac{a_{14}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22\text{N}} & a_{23\text{N}} & a_{24\text{N}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} * (a_{31} * \text{Fila 1} - \text{Fila 3}) \quad \text{Ó} \quad \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \frac{a_{14}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22\text{N}} & a_{23\text{N}} & a_{24\text{N}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \text{Fila 3} - a_{31} * \text{Fila 1}$$

2.4. Lo que se hace es comenzar a operar las filas con las fórmulas indicadas, cualquiera de las dos para la tercera fila.

$$a_{31} * \text{Fila 1} - \text{Fila 3} \quad \text{o} \quad \text{Fila 3} - a_{31} * \text{Fila 1}$$

$$a_{31} * (1) - a_{31} = 0 \quad \text{o} \quad a_{31} - a_{31}(1) = 0$$

Esta fórmula también aplica para los demás valores de la tercera fila y para cada columna.

$$a_{31} * \text{Fila 1} - \text{Fila 3} \quad \text{o} \quad \text{Fila 3} - a_{31} * \text{Fila 1}$$

$$a_{31} * \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) - a_{32} = a_{32\text{N}} \quad \text{o} \quad a_{32} - a_{31} * \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) = a_{32\text{N}}$$

2.5. Quedando:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \frac{a_{14}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22N} & a_{23N} & a_{24N} \\ 0 & a_{32N} & a_{33N} & a_{34N} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

2.6. Para convertir a_{41} en 0

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \frac{a_{14}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22N} & a_{23N} & a_{24N} \\ 0 & a_{32N} & a_{33N} & a_{34N} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} * (a_{41} * \text{Fila } 1 - \text{Fila } 4) \quad \text{ó} \quad \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \frac{a_{14}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22N} & a_{23N} & a_{24N} \\ 0 & a_{32N} & a_{33N} & a_{34N} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \text{Fila } 4 - a_{41} * \text{Fila } 1$$

2.7. Lo que se hace es comenzar a operar las filas con las fórmulas indicadas, cualquiera de las dos para la cuarta fila.

$$a_{41} * \text{Fila } 1 - \text{Fila } 4 \quad \text{o} \quad \text{Fila } 4 - a_{41} * \text{Fila } 1$$
$$a_{41} * (1) - a_{41} = 0 \quad \text{o} \quad a_{41} - a_{41}(1) = 0$$

Esta fórmula también aplica para los demás valores de la tercera fila y para cada columna.

$$a_{41} * \text{Fila } 1 - \text{Fila } 4 \quad \text{o} \quad \text{Fila } 4 - a_{41} * \text{Fila } 1$$
$$a_{41} * \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) - a_{42} = a_{42N} \quad \text{o} \quad a_{42} - a_{41} * \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) = a_{42N}$$

2.8. Quedando ahora la matriz

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \frac{a_{14}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22N} & a_{23N} & a_{24N} \\ 0 & a_{32N} & a_{33N} & a_{34N} \\ 0 & a_{42N} & a_{43N} & a_{44N} \end{vmatrix}$$

3. Se debe dividir la segunda fila por a_{22N}

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \frac{a_{14}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22N} & a_{23N} & a_{24N} \\ 0 & a_{32N} & a_{33N} & a_{34N} \\ 0 & a_{42N} & a_{43N} & a_{44N} \end{vmatrix} * \frac{1}{a_{22N}} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \frac{a_{14}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \frac{a_{23N}}{a_{22N}} & \frac{a_{24N}}{a_{22N}} \\ 0 & a_{32N} & a_{33N} & a_{34N} \\ 0 & a_{42N} & a_{43N} & a_{44N} \end{vmatrix}$$

4. Así pues, se continua con el mismo proceso, para poder llegar a una matriz triangular superior

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \frac{a_{14}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \frac{a_{23N}}{a_{22N}} & \frac{a_{24N}}{a_{22N}} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34N} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44N2} \end{vmatrix}$$

$$\text{Determinante} = 1 * 1 * 1 * a_{44N}$$

Nota: No siempre los valores de la diagonal deben ser 1. Eso será solo en caso de que los valores por debajo de los pivotes no sean proporcionales. Estoy seguro querido lector que con los siguientes 3 ejemplos se comprenderá a fondo lo solicitado.

Ejemplo 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

1. Nos enfocamos en el 1 de la primera fila y primera columna a_{11}. En base al 1 haremos cero los valores bajo el y para ello se plantean las nuevas filas

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} * [\text{Fila } 2 - \text{Fila1}] \\ (\text{No se cambia porque ya está en cero}) \\ * [\text{Fila } 4 - 3 * \text{Fila1}] \end{matrix}$$

$$\begin{array}{rrrrr} \text{Fila 2:} & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -\text{Fila 1:} & -1 & -1 & 0 & -5 \\ \hline \text{Fila 2} - \text{Fila 1:} & 0 & 1 & 1 & -5 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} \text{Fila 4:} & 3 & 0 & 0 & -4 \\ -3 * \text{Fila 1:} & -3 & -3 & 0 & -15 \\ \hline \text{Fila4} - 3 * \text{Fila1:} & 0 & -3 & 0 & -19 \end{array}$$

1.1. Sustituyendo nuevas filas

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -19 \end{vmatrix}$$

2. Ahora nos debemos enfocar en el 1 de la segunda fila y segunda columna, pues será nuestro pivote para transformar a los valores de abajo en cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -19 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ * [\text{Fila3} - 2 * \text{Fila2}] \\ * [\text{Fila } 4 + 3 * \text{Fila2}] \end{matrix}$$

$$\begin{array}{rrrrr} \text{Fila 3:} & 0 & 2 & 1 & 1 \\ -2 * \text{Fila 2:} & 0 & -2 & -2 & 10 \\ \hline \text{Fila } 3 - 2\text{Fila 2:} & 0 & 0 & -1 & 11 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} \text{Fila 4:} & 0 & -3 & 0 & -19 \\ 3 * \text{Fila 2:} & 0 & 3 & 3 & -15 \\ \hline \text{Fila4} + 3 * \text{Fila2:} & 0 & 0 & 3 & -34 \end{array}$$

2.1. Sustituyendo nuevas filas

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -34 \end{vmatrix}$$

3. Ahora nos enfocamos en el -1 que será el nuevo pivote para transformar el 3 en cero

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -34 \end{vmatrix} \; * [\textbf{Fila 4} + \textbf{3} * \textbf{Fila3}]$$

$$\begin{array}{rcccc} \textbf{Fila 4:} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{-34} \\ \mathbf{3*Fila\ 3:} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{33} \\ \hline \mathbf{Fila\ 4+3*Fila\ \ 3:} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{array}$$

3.1. Sustituyendo nuevas filas

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

4. El valor de la determinante será:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{determinante} = (1)(1)(-1)(-1) = 1$$

$$\text{Determinante} = 1$$

Ejemplo 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

1. Nos enfocamos en el 1 de la primera fila y primera columna. En base al 1 haremos cero los valores bajo el número y para ello se plantean las nuevas filas

$$\begin{array}{c l} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \\ *[\text{Fila } 2+4*\text{Fila1}] \\ *[\text{Fila } 3-3*\text{Fila } 1] \\ *[\text{Fila } 4-2*\text{Fila1}] \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} \text{Fila 2:} & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 4*\text{Fila 1:} & 4 & 8 & -12 & 16 \\ \hline \text{Fila } 2+4*\text{Fila \ 1:} & 0 & 10 & -11 & 19 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} \text{Fila 3:} & 3 & 0 & 0 & -3 \\ -3*\text{Fila 1:} & -3 & -6 & 9 & -12 \\ \hline \text{Fila4}-3*\text{Fila1:} & 0 & -6 & 9 & -15 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} \text{Fila 4:} & 2 & 0 & -2 & 3 \\ -2*\text{Fila 1:} & -2 & -4 & 6 & -8 \\ \hline \text{Fila } 4-2*\text{Fila 1:} & 0 & -4 & 4 & -5 \end{array}$$

1.1. Sustituyendo nuevas filas

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 10 & -11 & 19 \\ 0 & -6 & 9 & -15 \\ 0 & -4 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

2. Ahora nos debemos enfocar en el 10 de la segunda fila y segunda columna pues será nuestro pivote para transformar a los valores de abajo el cero. Nótese que los valores por debajo no son proporcionales al 10, por tanto, se saca un factor común en la segunda fila, siendo 10.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 10 & -11 & 19 \\ 0 & -6 & 9 & -15 \\ 0 & -4 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 10 * \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -11/10 & 19/10 \\ 0 & -6 & 9 & -15 \\ 0 & -4 & 4 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ * [\text{Fila } 3 + 6 * \text{Fila } 2] \\ * [\text{Fila } 4 + 4 * \text{Fila } 2] \end{matrix}$$

$$\begin{array}{rcccc} \text{Fila 3:} & 0 & -6 & 9 & -15 \\ 6 * \text{Fila 2:} & 0 & 6 & -\frac{33}{5} & \frac{57}{5} \\ \hline \text{Fila } 3 + 6 * \text{Fila } \ 2\text{:} & 0 & 0 & \frac{12}{5} & -\frac{18}{5} \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} \text{Fila 4:} & 0 & -4 & 4 & -5 \\ 4 * \text{Fila 2:} & 0 & 4 & -\frac{22}{5} & \frac{38}{5} \\ \hline \text{Fila4} + 4 * \text{Fila2:} & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{13}{5} \end{array}$$

2.1. Sustituyendo nuevas filas

$$10 * \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -11/10 & 19/10 \\ 0 & -6 & 9 & -15 \\ 0 & -4 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 10 * \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -11/10 & 19/10 \\ 0 & 0 & 12/5 & -18/5 \\ 0 & 0 & -2/5 & 13/5 \end{vmatrix} = 10 * \frac{12}{5} * \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -11/10 & 19/10 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & -2/5 & 13/5 \end{vmatrix}$$

$$\frac{12}{5} * 10 = 24$$

$$24 * \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -11/10 & 19/10 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & -2/5 & 13/5 \end{vmatrix} = 24 * \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -11/10 & 19/10 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1 & 13/2 \end{vmatrix} * \frac{2}{5} = \frac{48}{5} * \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -11/10 & 19/10 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1 & 13/2 \end{vmatrix}$$

$$\frac{48}{5} * \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{10} & 19/10 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1 & 13/2 \end{vmatrix} * [\text{Fila } 4 + \text{Fila3}]$$

$$\begin{array}{rcccc} \text{Fila 4:} & 0 & 0 & -1 & 13/2 \\ \text{Fila 3:} & 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ \hline \text{Fila } 4 + \text{Fila 3:} & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}$$

2.2. La nueva fila será

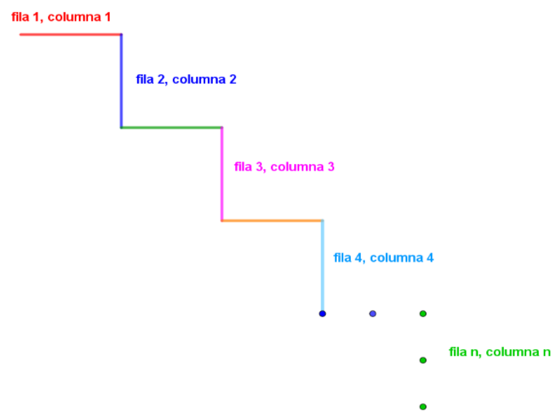
$$\frac{48}{5} * \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -11/10 & 19/10 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{vmatrix} = \frac{48}{5} * \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -11/10 & 19/10 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

3. La determinante será:

$$\frac{48}{5} * (1) * (1) * (1) * (5) = \ 48$$

$$\text{Determinante} \ = \ 48$$

NOTA: Este método al igual que el de menores y cofactores aplica para cualquier determinante de cualquier tamaño. En el caso de este método simplemente debe ir trabajando en forma de una escalera



Como puede observar querido lector, cuando se presentan fracciones al operar la matriz es un poco más complicado, pero no imposible. Para facilitar los cálculos de una determinante aparecen **las propiedades de los determinantes** que usted deberá aprender a utilizar a su conveniencia para facilitar, como ya se dijo, los cálculos.

6.2.4. Propiedades de los determinantes

1. Si una matriz posee una línea (fila o columna) de ceros, el determinante es igual a cero, no importando el tamaño de la matriz.

$$\text{Det(A)} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \text{Det(B)} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \text{Det(C)} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

2. Si una matriz posee dos líneas (filas o columnas) iguales (mismos números), el determinante es igual a cero, no importando el tamaño de la matriz. Deben ser ambas o filas o columnas.

$$\text{Det(A)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \text{Det(B)} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \text{Det(C)} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & 9 & 5 \\ 3 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

3. Si se cambian dos líneas (filas o columnas) paralelas de una matriz, el determinante cambiara de signo.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 2 = 6 \quad \text{Permutando las columnas} \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 8 = -6$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7 \quad \text{Permutando las Filas} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -8 \quad \text{permutando columnas} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8 \quad \text{permutando filas} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

4. Si se multiplica los elementos de una línea (fila o columna), de una determinante por un número diferente a cero, el determinante queda multiplicado por ese número.

Multiplicación de filas

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 10 = 16 \quad \text{Fila 1 por 2} \quad \begin{matrix} *2 \\ \end{matrix}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 20 = 32 = 16 * 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 10 = 16 \quad \text{Fila 2 por 3} \quad \begin{matrix} \\ *3 \end{matrix}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 15 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 30 = 48 = 16 * 3$$

Multiplicación de columnas

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 \quad \text{Columna 1 por 4} \quad \begin{array}{l} 4 \\ * \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 24 = -16 = -4 * 4$$

Esta propiedad se utiliza demasiado para factorizar un valor de una fila o columna y así reducir valores muy grandes (*Ejemplo 2*). También debe saber qué aplica para una determinante de cualquier dimensión.

$$\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 30 - 4 = 26 \quad \text{Factorizando fila 1} \quad 2 * \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 * (15 - 2) = 2 * 13 = 26$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \quad \text{Factorizando fila 1} \quad 4 * \begin{vmatrix} 1 & 1/4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 * \left(1 - \frac{3}{4}\right) = 4 * \frac{1}{4} = 1$$

Como puede ver querido lector, puede multiplicar o puede factorizar siempre respetando la igualdad y no alterando valores.

5. Si a una línea (fila o columna) de una matriz se le suma otra línea multiplicada por un número, el determinante no cambiará. Recuerde que una matriz es el conjunto de puntos ordenados.

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 10 \\ x - 2y - z = 5 \\ 3x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

5.1. Al convertirla en matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 10 \\ 1 & -2 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 25 \end{bmatrix}$$

5.2. Sumando ecuación 1 y 2 por la ley de monotonía de la suma (Método de reducción).

$$\begin{array}{r} 2x + 4y + z = 10 \\ x - 2y - z = 5 \\ \hline 3x + 2y = 15 \end{array}$$

5.3. La ecuación del paso 5.2 se sustituirá a la ecuación número 2 del sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 10 \\ x - 2y - z = 5 \\ 3x + 5y + 2z = 25 \end{cases} = \begin{cases} 2x + 4y + z = 10 \\ 3x + 2y \quad = 5 \\ 3x + 5y + 2z = 25 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 25 \end{bmatrix}$$

Como puede observar, se pueden combinar líneas para transformarlas.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \\ 6 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} * [\text{Fila } 2 - 2 * \text{Fila1}] \\ * [\text{Fila } 3 - 3 * \text{Fila } 1] \\ * [\text{Fila } 4 - \text{Fila1}] \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} \text{Fila 2:} & 4 & 3 & -2 & 3 \\ -2 * \text{Fila 1:} & -4 & -8 & 2 & -2 \\ \hline \text{Fila } 2 + 4 * \text{Fila } \ 1: & 0 & -5 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} \text{Fila 3:} & 6 & 2 & 4 & 2 \\ -3 * \text{Fila 1:} & -6 & -12 & 3 & -3 \\ \hline \text{Fila4} - 3 * \text{Fila1:} & 0 & -10 & 7 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} \text{Fila 4:} & 2 & 1 & 3 & 1 \\ -\text{Fila 1:} & -2 & -4 & 1 & -1 \\ \hline \text{Fila } 4 - 2 * \text{Fila 1:} & 0 & -3 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \\ 6 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

También puede utilizar de base la fila 2, fila 3 y fila 4 (en este caso nuevamente tomamos de base la fila 1)

6. El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta.

$$|\mathrm{A}| = |\mathrm{A}^t|$$

A. Traspuesta

Se llama matriz traspuesta de A y se expresa matemáticamente como A^t a la matriz que se obtiene, cambiando ordenadamente las filas por las columnas.

Fila 1 ⟶ Columna 1 ; Fila 2 ⟶ Columna 2 ; Fila 3 ⟶ Columna 3

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \ ; \ \mathrm{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \ ; \ \mathrm{B}^t = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -6 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \ ; \ \mathrm{C}^t = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 5 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{D} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \ ; \ \mathrm{D}^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la propiedad será:

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 6 = 14 \quad ; \quad |\mathrm{A}^t| = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 20 - 6 = 14$$

Eso para cualquier matriz de cualquier tamaño.

Ejemplo 3

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

1. Para simplificar, se podría permutar la columna 1 y 2. Recuerde que al cambiar filas por columnas o viceversa, se le debe cambiar el signo al determinante.

$$-\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Se utilizará la fila 1 y columna 1 como pivote para transformar los valores por debajo de ese valor en cero.

$$-\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ *\ [\text{Fila } 2 - 2 * \text{Fila1}] \\ *\ [\text{Fila } 3 - \text{Fila } 1] \\ *\ [\text{Fila } 4 - \text{Fila1}] \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{Fila 2:} & 2 & 1 & 3 & 4 \\ -2 * \text{Fila 1:} & -2 & -6 & -6 & 0 \\ \hline \text{Fila } 2 - 2 * \text{Fila } 1: & 0 & -5 & -3 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} \text{Fila 3:} & 1 & 2 & 3 & -1 \\ -\text{Fila 1:} & -1 & -3 & -3 & 0 \\ \hline \text{Fila3} - \text{Fila1:} & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{Fila 4:} & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -\text{Fila 1:} & -1 & -3 & -3 & 0 \\ \hline \text{Fila } 4 - \text{Fila 1:} & 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}$$

2.1. El determinante será:

$$-\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Se puede permutar la columna 3 con la columna 2. También se podría permutar fila 3 con fila 2. En este caso se elegirá permutar columnas.

$$-\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = - * -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

4. Nos enfocamos en el -3 como pivote para realizar todos los números por debajo en cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ *\ [\text{Fila } 4 - \text{Fila2}] \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{Fila 4:} & 0 & -3 & -2 & 1 \\ -\text{Fila 2:} & 0 & 3 & 5 & -4 \\ \hline \text{Fila } 4 - \text{Fila 2:} & 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}$$

4.1. El determinante será

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

5. Nos debemos concentrar en el -1 como pivote.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} * [\text{Fila } 4 + 3 * \text{Fila3}]$$

$$\begin{array}{r|cccc} \text{Fila 4:} & 0 & 0 & 3 & -3 \\ +3 * \text{Fila 3:} & 0 & 0 & -3 & -3 \\ \hline \text{Fila } 4 + 3 * \text{Fila 3:} & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}$$

5.1. La determinante será:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

6. El valor del determinante será

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} \qquad (1)(-3)(-1)(-6) = -18$$

$$\text{Determinante} = -18$$

Entre menos fracciones utilice será mucho más cómodo para usted como calculista, por tanto, debe aprender a manejar las propiedades de los determinantes para no perder esa comodidad y orden, a parte que como ya se vio, simplifica los cálculos.

6.3. Matriz inversa y matriz identidad

Ambas matrices están correlacionadas entre sí. Primero estableceremos la matriz identidad.

6.3.1. Matriz identidad

Es una matriz cuadrada donde todos sus elementos son ceros menos los elementos de la diagonal principal que son de valor 1.

$$\mathrm{I}_{2X2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{I}_{3X3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{I}_{4X4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La relación entre la matriz identidad y la matriz inversa es:

$$\boxed{\mathrm{A} * \mathbf{A}^{-1} = \mathrm{I}} \qquad \boxed{\mathbf{A}^{-1} * \mathrm{A} = \mathrm{I}}$$

$$\mathrm{A} = \text{Matriz} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \text{Matriz Inversa} \qquad \mathrm{I} = \text{Matriz Identidad}$$

Esta multiplicación también la utilizaremos para verificar si la matriz inversa que habremos encontrado es correcta o incorrecta, porque se le dará será la matriz (A).

6.3.2. Matriz inversa

Hemos visto que la matriz inversa de la matriz A se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$A^{-1}$$

Existen muchos métodos para encontrar la misma matriz, entre los cuales están:

- Método de Gauss Jordan
- Método de Cofactores

Las matrices inversas dependen de la matriz A y de sus dimensiones.

A. Método de Gauss Jordan matriz 2X2

Este método es similar al proceso para encontrar el determinante, utilizando el método de Gauss. Lo que deberemos hacer es colocar la determinante que se nos presente a la par de la matriz identidad y convertir nuestra matriz (la que se nos dé) en la matriz identidad, utilizando las propiedades de los determinantes. La matriz que quede del lado derecho será nuestra matriz inversa. A continuación, se le presentará dos ejemplos.

Ejemplo 1

Encuentre la matriz inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

1. Teniendo la matriz A de dimensiones 2X2 se une la matriz identidad a un lado, siendo de 2X2.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. La matriz de la izquierda será la que debemos transformar a la matriz de la derecha. Para ello se utilizará la propiedad de los determinantes número 5. Los números 4 y 3 serán los que se deben hacer cero.

Para que 3 sea cero

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} * \ [5\text{Fila } 1 - 3\text{Fila2}] \\ * \ [\text{Fila } 2 - 2\text{Fila } 1] \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrrrr} 5\text{Fila1} & : & 10 & 15 & 5 & 0 \\ -3\text{Fila2} & : & -12 & -15 & 0 & -3 \\ \hline 5\text{Fila1} - 3\text{Fila2} & : & -2 & 0 & 5 & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrrrr} \text{Fila2} & : & 4 & 5 & 0 & 1 \\ -2\text{ Fila1} & : & -4 & -6 & -2 & 0 \\ \hline \text{Fila2} - 2\text{Fila1} & : & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}$$

2.1. Sustituyendo la nueva matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

2.2. Ahora se deben convertir los valores -2 y -1 en cero. Para ello se dividirá por el mismo valor de cada fila.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} * \ 1/-2 \\ * \ -1 \end{matrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Llegamos a la matriz identidad

Matriz inversa

3. La matriz inversa será

$$\begin{bmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Comprobando respuesta

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \mathrm{A} \ \mathrm{X} \ \mathrm{A}^{-1} \ (2\mathrm{x}2 \ \ 2\mathrm{x}2)$$

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{B}_{11} & \mathrm{B}_{12} \\ \mathrm{B}_{21} & \mathrm{B}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B}_{11} = 2 * \left(-5/2\right) + 3(2) = -5 + 6 = 1 \qquad \mathrm{B}_{12} = 2 * \left(3/2\right) + 3(-1) = 3 - 3 = 0$$

$$\mathrm{B}_{21} = 4 * \left(-5/2\right) + 5(2) = -10 + 10 = 0 \qquad \mathrm{B}_{22} = 4 * \left(3/2\right) + 5(-1) = 6 - 5 = 1$$

4.1. La multiplicación entre $\mathrm{A} \ \mathrm{X} \ \mathrm{A}^{-1}$ será:

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Encuentre la matriz inversa de

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

1. Teniendo la matriz A de dimensiones 2X2 se une la matriz identidad a un lado, siendo de 2X2.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. La matriz de la izquierda será la que debemos transformar a la matriz de la derecha. Para ello se utilizará la propiedad de los determinantes número 5. Los números 4 y 3 serán los que se deberán hacer cero.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} * \ [6\mathrm{Fila}\ 1 + \mathrm{Fila2}] \\ * \ [3\mathrm{Fila}\ 2 + 2\mathrm{Fila}\ 1] \end{matrix}$$

6Fila1	:	−18	− 6	6	0
Fila2	:	2	6	0	1
6Fila1 + Fila2	:	−16	0	6	1

3Fila2	:	6	18	0	3
2 Fila1	:	−6	− 2	2	0
3Fila2 + 2Fila1	:	0	16	2	3

2.1. Sustituyendo la nueva matriz

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} -16 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 16 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

2.2. Ahora se deben convertir los valores -2 y -1 en cero. Para ello se dividirá por el mismo valor cada fila

$$\begin{bmatrix} -16 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 16 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} * \, ^1/_{-16} \\ * \, ^1/_{16} \end{matrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -^3/_8 & -^1/_{16} \\ 0 & 1 & ^1/_8 & ^3/_{16} \end{array}\right]$$

Llegamos a la matriz identidad

Matriz inversa

3. La matriz inversa será

$$\begin{bmatrix} -^3/_8 & -^1/_{16} \\ ^1/_8 & ^3/_{16} \end{bmatrix}$$

4. Comprobando respuesta

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -^3/_8 & -^1/_{16} \\ ^1/_8 & ^3/_{16} \end{bmatrix}$$

$$B = A \ X \ A^{-1} \ (2x2 \ \ 2x2)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = -3(-^3/_8) - 1(^1/_8) = {^9/_8} - {^1/_8} = 1 \qquad B_{12} = -3(-^1/_{16}) - 1(^3/_{16}) = {^3/_{16}} - {^3/_{16}} = 0$$

$$B_{21} = 2(^{-3}/_8) + 6(^1/_8) = {^{-3}/_4} + {^3/_4} = 0 \qquad B_{22} = 2(^{-1}/_{16}) + 6(^3/_{16}) = {^{-1}/_8} + {^9/_8} = 1$$

4.1. La multiplicación entre $A \ X \ A^{-1}$ será:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

B. Método de Gauss Jordan matriz 3 X 3

La forma de resolución es similar a las matrices de 2X2. Utilizando las propiedades de la determinante se puede encontrar

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{bmatrix}$$

1 a_{21} y $a_{31} \longrightarrow 0$ Pivote a_{11}

2 $a_{32} \longrightarrow 0$ Pivote a_{22}

3 a_{13} y $a_{23} \longrightarrow 0$ Pivote a_{33}

4 $a_{12} \longrightarrow 0$ Pivote a_{22}

Ejemplo 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Se coloca a la par de nuestra matriz A la matriz identidad de 3X3

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. Se deben hacer el 3 y el 1 ceros. Para ello se utiliza las propiedades de los determinantes

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ *\,[2\text{Fila }2 - 3\text{Fila}1] \\ *\,[2\text{Fila}3 - \text{Fila}1] \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} 2\text{Fila}2: & 6 & 4 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ -3\text{Fila}1: & -6 & -3 & -12 & -3 & 0 & 0 \\ \hline 2\text{Fila}2-3\text{Fila}1: & 0 & 1 & -16 & -3 & 2 & 0 \\ 2\text{Fila}3: & 2 & -2 & 6 & 0 & 0 & 2 \\ -\text{Fila}1: & -2 & -1 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 2\text{Fila}2-3\text{Fila}1: & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}$$

2.1. Quedando

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -16 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

3. Ahora debemos realizar el -3 en 0 y para ello se utilizará el 1 de la segunda fila y segunda columna como pivote (Fila 2).

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -16 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] *\,[\text{Fila }3 + 3\text{Fila}2]$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} \text{Fila}3: & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3\text{ Fila}2: & 0 & 3 & -48 & -9 & 6 & 0 \\ \hline \text{Fila}3+3\text{Fila}2: & 0 & 0 & -46 & -10 & 6 & 2 \end{array}$$

3.1. Quedando

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -16 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -16 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -46 & -10 & 6 & 2 \end{array}\right]$$

4. Haciendo cero a 4 y -16. Para ello nuestro pivote será el valor de la fila 3, columna 3 (-46)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -16 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -46 & -10 & 6 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} *\,[23\text{Fila }1 + 2\text{Fila}3] \\ *\,[23\text{Fila }2 - 8\text{Fila}3] \\ \\ \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4-46 & 2 \\ 2-23 & 2 \\ 1-23 & 23 \end{array} \quad 23 * 4 = 92$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} 23\text{Fila}1: & 46 & 23 & 92 & 23 & 0 & 0 \\ 2\text{Fila}3: & 0 & 0 & -92 & -20 & 12 & 4 \\ \hline 23\text{Fila}1+2\text{Fila}3: & 46 & 23 & 0 & 3 & 12 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} 23\text{Fila}2: & 0 & 23 & -368 & -69 & 46 & 0 \\ -8\text{Fila}3: & 0 & 0 & 368 & 80 & -48 & -16 \\ \hline 23\text{Fila}2-8\text{Fila}3: & 0 & 23 & 0 & 11 & -2 & -16 \end{array}$$

4.1. Quedando

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -16 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -46 & -10 & 6 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 46 & 23 & 0 & 3 & 12 & 4 \\ 0 & 23 & 0 & 11 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & -46 & -10 & 6 & 2 \end{array}\right]$$

5. Se hará el 23 de la primera fila y segunda columna, cero. Para ello se tomará la fila 2 como pivote.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 46 & 23 & 0 & 3 & 12 & 4 \\ 0 & 23 & 0 & 11 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & -46 & -10 & 6 & 2 \end{array}\right] * [\text{Fila 1} - \text{Fila2}]$$

Fila1 :	46	23	0	3	12	4
−Fila2 :	0	− 23	0	− 11	2	16
Fila1 − Fila2 :	46	0	0	− 8	14	20

5.1. Quedando

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 46 & 23 & 0 & 3 & 12 & 4 \\ 0 & 23 & 0 & 11 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & -46 & -10 & 6 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 46 & 0 & 0 & -8 & 14 & 20 \\ 0 & 23 & 0 & 11 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & -46 & -10 & 6 & 2 \end{array}\right]$$

6. La diagonal se transforma en 1.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 46 & 0 & 0 & -8 & 14 & 20 \\ 0 & 23 & 0 & 11 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & -46 & -10 & 6 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} * \,^1/_{46} \\ * \,^1/_{23} \\ * -^1/_{46} \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & ^{-4}/_{23} & 7/23 & ^{10}/_{23} \\ 0 & 1 & 0 & ^{11}/_{23} & ^{-2}/_{23} & ^{-16}/_{23} \\ 0 & 0 & 1 & ^{5}/_{23} & ^{-3}/_{23} & ^{-1}/_{23} \end{array}\right]$$

7. La inversa será

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} ^{-4}/_{23} & 7/23 & ^{10}/_{23} \\ ^{11}/_{23} & ^{-2}/_{23} & ^{-16}/_{23} \\ ^{5}/_{23} & ^{-3}/_{23} & ^{-1}/_{23} \end{bmatrix}$$

8. Prueba

$$\mathbf{A \; x \; A^{-1} = B}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} ^{-4}/_{23} & 7/23 & ^{10}/_{23} \\ ^{11}/_{23} & ^{-2}/_{23} & ^{-16}/_{23} \\ ^{5}/_{23} & ^{-3}/_{23} & ^{-1}/_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \text{Fila 1xColumna 1} = (2)(^{-4}/_{23}) + (1)(^{11}/_{23}) + (4)(^{5}/_{23}) = 1$$
$$B_{12} = \text{Fila 1xColumna 2} = (2)(^{7}/_{23}) + (1)(^{-2}/_{23}) + (4)(^{-3}/_{23}) = 0$$
$$B_{13} = \text{Fila 1xColumna 3} = (2)(^{10}/_{23}) + (1)(^{-16}/_{23}) + (4)(^{-1}/_{23}) = 0$$
$$B_{21} = \text{Fila 2xColumna 1} = (3)(^{-4}/_{23}) + (2)(^{11}/_{23}) + (-2)(^{5}/_{23}) = 0$$
$$B_{22} = \text{Fila 2xColumna 2} = (3)(^{7}/_{23}) + (2)(^{-2}/_{23}) + (-2)(^{-3}/_{23}) = 1$$
$$B_{23} = \text{Fila 2xColumna 3} = (3)(^{10}/_{23}) + (2)(^{-16}/_{23}) + (-2)(^{-1}/_{23}) = 0$$
$$B_{31} = \text{Fila 3xColumna 1} = (1)(^{-4}/_{23}) + (-1)(^{11}/_{23}) + (3)(^{5}/_{23}) = 0$$
$$B_{32} = \text{Fila 3xColumna 2} = (1)(^{7}/_{23}) + (-1)(^{-2}/_{23}) + (3)(^{-3}/_{23}) = 0$$
$$B_{33} = \text{Fila 3xColumna 3} = (1)(^{10}/_{23}) + (-1)(^{-16}/_{23}) + (3)(^{-1}/_{23}) = 1$$

Ejemplo 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Se coloca a la par de nuestra matriz A la matriz identidad de 3 X 3

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. Se deben convertir el 2 y el 3 en ceros. Para ello se utiliza las propiedades de los determinantes

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ *\,[\text{Fila } 2-\text{Fila}1] \\ *\,[2\text{Fila}3-3\text{Fila}1] \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} \text{Fila}2: & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\text{Fila}1: & -2 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ \hline \text{Fila}2-\text{Fila}1: & 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} 2\text{Fila}3: & 6 & -4 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ -3\text{Fila}1: & -6 & 6 & -6 & -3 & 0 & 0 \\ \hline 2\text{Fila}3-3\text{Fila}1: & 0 & 2 & -2 & -3 & 0 & 2 \end{array}$$

2.1. Quedando

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

3. Pasando el valor 2 en cero.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ *\,[3\text{Fila}3-2\text{Fila}2] \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} 3\text{Fila}3: & 0 & 6 & -6 & -9 & 0 & 6 \\ -2\text{Fila}2: & 0 & -6 & 4 & 2 & -2 & 0 \\ \hline 3\text{Fila}3-2\text{Fila}2: & 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{array}$$

3.1. Quedando

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{array}\right]$$

4. Haciendo el 2 y −2 en cero.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} *\,[\text{Fila}1+\text{Fila}3] \\ *\,[\text{Fila}2-\text{Fila}3] \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} \text{Fila}1: & 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \text{Fila}3: & 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \\ \hline \text{Fila}1+\text{Fila}3: & 2 & -2 & 0 & -6 & -2 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} \text{Fila2}: & 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ -\text{Fila3}: & 0 & 0 & 2 & 7 & 2 & -6 \\ \hline \text{Fila2} - \text{Fila3}: & 0 & 3 & 0 & 6 & 3 & -6 \end{array}$$

4.1. Quedando

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & -6 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{array}\right]$$

5. Convirtiendo el -2 en 0

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & -6 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{bmatrix} * [3\text{Fila1} + 2\text{Fila2}]$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} 3\text{Fila1}: & 6 & -6 & 0 & -18 & -6 & 18 \\ 2\text{Fila2}: & 0 & 6 & 0 & 12 & 6 & -12 \\ \hline 3\text{Fila1} + 2\text{Fila2}: & 6 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 \end{array}$$

5.1. Quedando

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & -6 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{array}\right]$$

6. Convirtiendo la diagonal en 1

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1/6 \\ 1/3 \\ -1/2 \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

7. La matriz inversa será

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7/2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

8. La prueba será

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7/2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$2(-1) + (-2)(2) + (2)(7/2) = -2 - 4 + 7 = 1$

$2(1) + (1)(-2) + (0)(-3) = 2 - 2 + 0 = 0$

$2(0) + (-2)(1) + (2)(1) = 0 - 2 + 2 = 0$

$2(1) + (-2)(-2) + (2)(-3) = 2 + 4 - 6 = 0$

$3(-1) + (-2)(2) + (2)(7/2) = -3 - 4 + 7 = 0$

$2(-1) + (1)(2) + (0)(7/2) = -2 + 2 + 0 = 0$

$3(0) + (-2)(1) + (2)(1) = 0 - 2 + 2 = 0$

$2(0) + (1)(1) + (0)(1) = 0 + 1 + 0 = 1$

$3(1) + (-2)(-2) + (2)(-3) = 3 + 4 - 6 = 1$

6.4. APLICACIÓN DE ÁLGEBRA MATRICIAL

Como se dijo en la introducción de este capítulo, son muchas las aplicaciones del algebra matricial, como los video juegos, que sería una aplicación más compleja. Como en cada tema de matemática existen aplicaciones básicas, intermedias y de reto en cuanto a nivel de dificultad.

Las aplicaciones básicas de los temas de este capítulo son de la vida real como precios totales de ciertos productos. En las aplicaciones intermedias veremos el tema llamado capacidad instalada que siguen siendo ejercicios de la vida cotidiana en cuanto a encontrar precios y cantidades. En las aplicaciones de conocimiento se verán las soluciones para ecuaciones lineales de varias variables, utilizando el método de Gauss Jordan.

Con los ejemplos de aplicación de la vida real que encontrará en esta sección comprenderá mucho mejor lo que es una matriz en cuanto a ordenar datos y poder operarlos entre ellos para la vida cotidiana. Las resoluciones de ecuaciones son para evitar tanta operación algebraica y para poder llevar un mejor control de la solución de estas.

En la portada se observa al niño caminando junto al san bernardo. En este punto debe conceptualizar que así debe ir junto a las matrices, ya no admirarlas de lejos, sino de cerca y en amistad, para que ellas cuiden de usted como matemático.

6.4.1. Aplicación de suma, resta y multiplicación entre matrices

Acá es más evidente la necesidad de ordenar datos por matrices y de cómo operarlos en la vida real.

Ejemplo 1

Gabriela compra 3 helados de sandilla, 4 de mandarina y 6 helados de mora. El helado de sandilla cuesta $Q5.00/\text{cu}$, el de mandarina $Q6.50/\text{cu}$ y el helado de mora $Q7.00$ porque contiene limón. Encuentre la cantidad a pagar total por los helados

1. Como se puede observar, la operación es muy simple. Aritméticamente se haría:

   $\text{Sandilla: } 3 \text{ helados ; } {}^{Q5.00}/_{cu}$ $\quad\quad$ $\textbf{Mandarina: } \mathbf{4} \textbf{ helados ; } {}^{\mathbf{Q6.50}}/_{\mathbf{cu}}$

   $\text{Mora : } 6 \text{ helados ; } {}^{Q7.00}/_{cu}$

$$\text{Precio Total} = 3 * 5 + \mathbf{4} * \mathbf{6.50} + 6 * 7.00 = 15 + 26 + 42 = 83$$
$$\text{Precio Total} = Q83.00$$

2. Al comparar el resultado anterior, se utilizaron matrices y para ello se debe crear una matriz $A = \text{Productos (fruta)}$ y $B = \text{Precios}$. Nótese que la matriz A será de tres columnas porque hay tres tipos de frutas y la matriz B será de una columna porque solo hay un tipo de unidad.

$$\begin{array}{cccc} & \text{Sandilla} & \text{Mandarina} & \text{Mora} \\ A = [& 3 & \mathbf{4} & 6 \;] \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{Quetzales/cu} \\ B = \begin{bmatrix} 5 \\ \mathbf{6.50} \\ 7.00 \end{bmatrix} \end{array}$$

2.1. La multiplicación por A y B será

$$A\ 1\text{x}\mathbf{3}\ ;\ B\mathbf{3}\text{x}1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 5 \\ 6.50 \\ 7.00 \end{bmatrix} = [c_{11}]$$

$$c_{11} = 3(5) + (4)(6.50) + 6(7.00)$$
$$c_{11} = 15 + 26 + 42 = 83$$

2.2. La matriz C será

$$C = [83]$$

Ejemplo 2

Una compañía vende dos tipos de frutas: Manzanas y uvas. La matriz A representa las ventas en quetzales de la compañía en el año 2018, en tres pueblos de Quetzaltenango. La matriz B representa las ventas en los mismos pueblos en el año 2019.

$$\begin{array}{c} 2018 \\ A = \begin{array}{c} \text{Pueblo:} \\ \text{Manzanas} \\ \text{Uvas} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 400 & 350 & 150 \\ 450 & 280 & 850 \end{bmatrix} \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2019 \\ B = \begin{array}{c} \text{Pueblo:} \\ \text{Manzanas} \\ \text{Uvas} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 380 & 330 & 220 \\ 460 & 320 & 750 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

La compañía en el año 2020 dobla las ventas que tuvo en el 2019.
¿Cuál es el cambio de ventas entre el año 2020 y 2018?

1. Se encuentra las ventas del año 2020. Sabiendo que es el doble de las ventas del 2019.

$$B = \begin{bmatrix} 380 & 330 & 220 \\ 460 & 320 & 750 \end{bmatrix} \quad ; \quad 2B = 2\begin{bmatrix} 380 & 330 & 220 \\ 460 & 320 & 750 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 760 & 660 & 440 \\ 920 & 640 & 1500 \end{bmatrix}$$

2. El cambio de ventas entre el año 2020 y 2018 será:

$$\text{Venta 2020} - \text{Venta2018} = 2B - A$$

$$\begin{bmatrix} 760 & 660 & 440 \\ 920 & 640 & 1500 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 400 & 350 & 150 \\ 450 & 280 & 850 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 760-400 & 660-350 & 440-150 \\ 920-450 & 640-280 & 1500-850 \end{bmatrix}$$

$$2B - A = \begin{bmatrix} 360 & 310 & 290 \\ 470 & 360 & 650 \end{bmatrix}$$

3. Las ventas del 2020 superaron a las del 2018 en:

$$\text{Manzanas:} \quad 360 + 310 + 290 = Q960.00$$
$$\text{Uva:} \quad 470 + 360 + 650 = Q1{,}480.00$$

Ejemplo 3

Un arquitecto ha aceptado pedidos para cinco casas estilo rústico, siete casas con estilos modernos y 12 casas con estilo colonial.

$$\begin{array}{cccc} \text{estilo:} & \text{rústico} & \text{moderno} & \text{colonial} \\ A = & [\ 5 & 7 & 12\ ] \end{array}$$

La materia prima que se utiliza en cada tipo de casa está compuesta por: Acero, madera, vidrio, pintura y mano de obra. La cantidad de material por cada casa está dada por la siguiente matriz:

$$\begin{array}{cc} \text{Unidades:} & \begin{array}{ccccc} \text{Acero} & \text{Madera} & \text{Vidrio} & \text{Pintura} & \text{Mano De Obra} \end{array} \\ B = \begin{array}{r} \text{rústico} \\ \text{moderno} \\ \text{colonial} \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} \end{array}$$

Encuentre

a) La cantidad de materia prima necesaria total.

b) Cuál será el costo que tendrá que pagar por las materias primas.

Inciso a)

1. Se debe multiplicar la matriz A con la matriz B para obtener la matriz de unidades necesarias.

$$A_{1x3} \quad , \quad B_{3x5} \qquad \text{Obteniendo una matriz D de dimensión 1x5}$$

$$D = [5 \quad 7 \quad 12] \text{ X } \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} = \begin{array}{ccccc} \text{Acero} & \text{Madera} & \text{Vidrio} & \text{Pintura} & \text{Mano De Obra} \\ [\,D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15}\,] \end{array}$$

2. Obteniendo cada elemento de la matriz D

$$D_{11} = 5(5) + 7(7) + 12(6) = 146 \qquad D_{12} = 5(20) + 7(18) + 12(25) = 526$$
$$D_{13} = 5(16) + 7(12) + 12(8) = 260 \qquad D_{14} = 5(7) + 7(9) + 12(5) = 158$$
$$D_{15} = 5(17) + 7(21) + 12(13) = 388$$

3. La respuesta será

$$\begin{array}{cccccc} \text{Unidades:} & \text{Acero} & \text{Madera} & \text{Vidrio} & \text{Pintura} & \text{Mano De Obra} \\ D = & [\ 146 & 526 & 260 & 158 & 388\ ] \end{array}$$

O sea que el arquitecto necesita comprar 146 unidades de acero, 526 unidades de madera, 260 unidades de vidrio, 158 unidades de pintura y 388 unidades de mano de obra.

Inciso b)

4. Para obtener el costo total se necesita conocer los costos por unidad de los materiales

$$C = \begin{array}{l} \text{acero} \\ \text{madera} \\ \text{vidrio} \\ \text{pintura} \\ \text{mano de obra} \end{array} \begin{array}{c} \text{Quetzaltes} \\ \begin{bmatrix} 1500 \\ 800 \\ 500 \\ 100 \\ 1000 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{Para que se pueda multiplicar con D}$$

5. Se multiplican los materiales totales (matriz D) con los costos por unidad (matriz C)

$$\text{D1x}\mathbf{5}\text{ X C}\mathbf{5}\text{x1}$$

$$C_T = [146 \quad 526 \quad 260 \quad 158 \quad 388]\ X \begin{bmatrix} 1500 \\ 800 \\ 500 \\ 100 \\ 1000 \end{bmatrix} = [\,C_{T1}\,]$$

$$C_{T1} = 146(1500) + 526(800) + 260(500) + 158(100) + 388(1000) = Q1{,}173{,}600$$

6. El costo total de las casas será de:

$$Q1{,}173{,}600$$

6.4.2. Solución de ecuaciones lineales de varias variables

Existen muchos métodos para solucionar ecuaciones de varias variables. Los más utilizados son: método de reducción, método de sustitución, el método de Gauss Jordan y el método de Jacobi (este es de aproximación).

A. Método de Gauss Jordan

Este método utiliza las propiedades vistas en los determinantes por el método de Gauss Jordan. Recuerde que en esa sección aprendimos que el objetivo del método es transformar la matriz en una triangular superior.

Ejemplo 1

Resuelva la ecuación de 3 variables.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

1. Se plantea la matriz que represente la ecuación. Se ordenan los coeficientes en base a columnas y a filas.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \text{No.} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{ecuación 1} \\ \text{ecuación 2} \\ \text{ecuación 3} \end{array}$$

2. Se procede a convertir la matriz en triangular superior.

3. Se toma el 1 de la fila 1 y columna 1 como pivote.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ *\,[\text{Fila2} - 3\text{Fila1}] \\ *\,[\text{Fila3} - 5\text{Fila1}] \end{matrix}$$

$$\begin{array}{rcrrrr} \text{Fila2} & : & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -3\text{Fila1} & : & -3 & -3 & 3 & -3 \\ \hline \text{Fila2} - 3\text{Fila1} & : & 0 & -1 & 4 & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrrrr} \text{Fila3} & : & 5 & 3 & 4 & 2 \\ -5\text{Fila1} & : & -5 & -5 & 5 & -5 \\ \hline 3\text{Fila2} + 2\text{Fila1} & : & 0 & -2 & 9 & -3 \end{array}$$

1.1. Quedando

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

4. Se utiliza el $-\mathbf{1}$ como pivote

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ *\,[\text{Fila3} - 2\text{Fila2}] \end{matrix}$$

$$\begin{array}{rcrrrr} \text{Fila3} & : & 0 & -2 & 9 & -3 \\ -2\text{Fila2} & : & 0 & 2 & -8 & 4 \\ \hline 3\text{Fila1} + 2\text{Fila2} & : & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

4.1. Quedando

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Convirtiendo

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \text{No.} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \text{No.} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

6. Encontrando las variables

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \\ z = 1 \end{cases}$$

6.1. En la ecuación 3 encontramos z

$$z = 1$$

6.2. Resolviendo la ecuación 2

$$-y + 4z = -2$$

$$-y + 4(1) = -2 \qquad y = 6$$

6.3. Resolviendo la ecuación 1

$$x + y - z = 1$$
$$x + 6 - 1 = 1 \qquad x = -4$$
$$x = -4 \quad ; \quad y = 6 \quad ; \quad z = 1$$

Ejemplo 2

$$\begin{cases} 2x - 3z - u = 2 \\ 3y - 2z - 5u = 3 \\ 4y - 3u \qquad = 2 \\ x - 3y + 3u \ \ = 0 \end{cases}$$

1. Se arma la matriz que represente el sistema

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & u & \text{No.} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Ecuación 1} \\ \text{Ecuación 2} \\ \text{Ecuación 3} \\ \text{Ecuación 4} \end{array}$$

2. Se utiliza el 2 de la columna 1 y fila 2 como pivote para transformar los valores hacia abajo en cero.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ *\,[2\text{Fila4} - \text{Fila1}] \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrrrrr} 2\text{Fila4} & : & 2 & -6 & 0 & 6 & 0 \\ -\text{Fila1} & : & -2 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ \hline 2\text{Fila4} - \text{Fila1} & : & 0 & -6 & 3 & 7 & -2 \end{array}$$

2.1. Quedando

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

3. Se utiliza el 3 como pivote para transformar los demás valores en cero.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ *\,[3\text{Fila3} - 4\text{Fila2}] \\ *\,[\text{Fila4} + 2\text{Fila2}] \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrrrrr} 3\text{Fila3} & : & 0 & 12 & 0 & -9 & 6 \\ -4\text{Fila2} & : & 0 & -12 & 8 & 20 & -12 \\ \hline 3\text{Fila3} - 4\text{Fila2} & : & 0 & 0 & 8 & 11 & -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrrrrr} \text{Fila4} & : & 0 & -6 & 3 & 7 & -2 \\ 2\text{Fila2} & : & 0 & 6 & -4 & -10 & 6 \\ \hline \text{Fila4} + 2\text{Fila2} & : & 0 & 0 & -1 & -3 & 4 \end{array}$$

3.1. Quedando

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

4. Se utiliza el 8 como pivote para transformar los demás valores en cero.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ *\,[8\text{Fila4} + \text{Fila3}] \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} 8\text{Fila4}: & 0 & 0 & -8 & -24 & 32 \\ \text{Fila3}: & 0 & 0 & 8 & 11 & -6 \\ \hline 8\text{Fila4}+\text{Fila3}: & 0 & 0 & 0 & -13 & 26 \end{array}$$

4.1. Quedando

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 26 \end{bmatrix}$$

5. Quedando la matriz

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & u & \text{No.} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & u & \text{No.} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 26 \end{bmatrix} \end{array}$$

6. Encontrando variables

(4)
$$-13u = 26$$
$$u = -2$$

(3)
$$8z + 11u = -6$$
$$8z + 11(-2) = -6$$
$$8z = -6 + 22$$
$$z = 2$$

(2)
$$3y - 2z - 5u = 3$$
$$3y - 2(2) - 5(-2) = 3$$
$$3y - 4 + 10 = 3$$
$$y = -1$$

(1)
$$2x - 3z - u = 2$$
$$2x - 3(2) - (-2) = 2$$
$$2x = 2 - 2 + 6 \qquad \Rightarrow \qquad x = 3$$

7. La respuesta será

$$x = 3 \; ; \quad y = -1 \quad ; \quad z = 2 \quad ; \quad u = -2$$

Ejemplo 3

$$\begin{cases} 2x + y + z + w + u = 2 \\ x + 2y + z + w + u = 0 \\ x + y + 3z + w + u = 3 \\ x + y + z + 4w + u = -2 \\ x + y + z + w + 5u = 5 \end{cases}$$

1. Se arma la matriz

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & y & z & w & u & \text{No.} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

2. Se toma el 2 como pivote

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ *\,[2\text{Fila2} - \text{Fila1}] \\ *\,[2\text{Fila3} - \text{Fila1}] \\ *\,[2\text{Fila4} - \text{Fila1}] \\ *\,[2\text{Fila5} - \text{Fila1}] \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} 2\text{Fila2}: & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ -\text{Fila1}: & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ \hline 2\text{Fila2}-\text{Fila1}: & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} 2\text{Fila3}: & 2 & 2 & 6 & 2 & 2 & 6 \\ -\text{Fila1}: & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ \hline 2\text{Fila3}-\text{Fila1}: & 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 2Fila4: & 2 & 2 & 2 & 8 & 2 & -4 \\ -Fila1: & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ \hline 2Fila2 - Fila1: & 0 & 1 & 1 & 7 & 1 & -6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrrr} 2Fila5: & 2 & 2 & 2 & 2 & 10 & 10 \\ -Fila1: & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ \hline 2Fila5 - Fila1: & 0 & 1 & 1 & 1 & 9 & 8 \end{array}$$

2.1. Quedando

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

3. Se utilizará el 3 como pivote

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 9 & 8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ *\ [3Fila3 - Fila2] \\ *\ [3Fila4 - Fila2] \\ *\ [3Fila5 - Fila2] \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 3Fila3: & 0 & 3 & 15 & 3 & 3 & 12 \\ -Fila2: & 0 & -3 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ \hline 3Fila3 - Fila2: & 0 & 0 & 14 & 2 & 2 & 14 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrrr} 3Fila4: & 0 & 3 & 3 & 21 & 3 & -18 \\ -Fila2: & 0 & -3 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ \hline 3Fila4 - Fila2: & 0 & 0 & 2 & 20 & 2 & -16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 3Fila5: & 0 & 3 & 3 & 3 & 27 & 24 \\ -Fila2: & 0 & -3 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ \hline 2Fila2 - Fila1: & 0 & 0 & 2 & 2 & 26 & 26 \end{array}$$

3.1. Quedando

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & 2 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & 20 & 2 & -16 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 26 & 26 \end{bmatrix}$$

4. Se utiliza el 14 como pivote

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & 2 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & 20 & 2 & -16 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 26 & 26 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ *\ [7Fila4 - Fila3] \\ *\ [7Fila5 - Fila3] \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 7Fila4: & 0 & 0 & 14 & 140 & 14 & -112 \\ -Fila3: & 0 & 0 & -14 & -2 & -2 & -14 \\ \hline 7Fila4 - Fila3: & 0 & 0 & 0 & 138 & 12 & -126 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrrr} 7Fila5: & 0 & 0 & 14 & 14 & 182 & 182 \\ -Fila3: & 0 & 0 & -14 & -2 & -2 & -14 \\ \hline 7Fila5 - Fila3: & 0 & 0 & 0 & 12 & 180 & 168 \end{array}$$

4.1. Quedando

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & 2 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & 20 & 2 & -16 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 26 & 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & 2 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 138 & 12 & -126 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 180 & 168 \end{bmatrix}$$

5. Se utiliza el 138 como pivote

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & 2 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 138 & 12 & -126 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 180 & 168 \end{bmatrix} * [23Fila5 - 2Fila4]$$

$$\begin{array}{r|l} 138-12 & 2 \\ 69\ -6 & 3 \\ 23-2 & 23 \\ 1-2 & 2 \\ \hline 1-1 & 276 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc} 23Fila5\ : & 0 & 0 & 0 & 276 & 4140 & 3864 \\ -\,2Fila4: & 0 & 0 & 0 & -\,276 & -\,24 & 252 \\ \hline 23Fila5-2Fila4: & 0 & 0 & 0 & 0 & 4116 & 4116 \end{array}$$

6. Quedando la matriz

$$\begin{array}{cccccc} x & y & z & w & u & \text{No.} \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} x & y & z & w & u & \text{No.} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & 2 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 138 & 12 & -126 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 180 & 168 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & 2 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 138 & 12 & -126 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4116 & 4116 \end{bmatrix}$$

7. Resolviendo la ecuación

$$(5)\quad \begin{aligned} 4116u &= 4116 \\ u &= 1 \end{aligned}$$

$$(4)\quad \begin{aligned} 138w + 12u &= -126 \\ 138w + 12(1) &= -126 \\ 138\,w &= -138 \\ w &= -1 \end{aligned}$$

$$(3)\quad \begin{aligned} 14z + 2w + 2u &= 14 \\ 14z + 2(-1) + 2 &= 14 \\ 14z &= 14 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

$$(2)\quad \begin{aligned} 3y + z + w + u &= -2 \\ 3y + 1 - 1 + 1 &= -2 \\ 3y &= -3 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

$$(1)\quad \begin{aligned} 2x + y + z + w + u &= 2 \\ 2x - 1 + 1 - 1 + 1 &= 2 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

8. La solución será

$$x = 1 \quad ; \quad y = -1 \quad ; \quad z = 1 \quad ; \quad w = -1 \quad ; \quad u = 1$$

B. Método de ecuación matricial A*x* = B

Este método es largo de utilizar debido a la matriz inversa, pero muy útil al momento de tener un software como maple_18 o Wolfram. El método consiste en:

1. Se tiene la ecuación lineal de varias variables

$$\begin{cases} A_1x + A_2y + A_3z = B_1 \\ A_4x + A_5y + A_6z = B_2 \\ A_7x + A_8y + A_9z = B_3 \end{cases}$$

2. El método consiste en aislar los coeficientes $(A_1, A_2, A_3 \dots A_9)$ he ingresarlos en la matriz A y las variables en la matriz x (x, y, z). Así mismo los valores de la igualdad (B_1, B_2, B_3) en la matriz B.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{bmatrix} \quad ; \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

3. Entonces se representa el sistema de ecuaciones del paso 1. De la siguiente manera.

$$\boxed{\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \mathbf{B}} \qquad \textbf{Ecuación} \quad \mathbf{8.1.1}$$

4. La idea del método es llevar la ecuación del paso 8.1.1. en la ecuación

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1} * \mathbf{B}} \qquad \textbf{Ecuación} \quad \mathbf{8.1.2}$$

5. Despejando para x, matriz de las variables. Prácticamente es despejar las variables

Ejemplo 1

Encuentre la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x - 3y \ = 5 \end{cases}$$

1. Se plantea la matriz A, B y x de la ecuación 8.1.1.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad ; \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2. Se resuelve la matriz A, encontrando la matriz inversa

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2.1. Se utiliza el 2 como pivote.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] * \ \text{Fila } 2 - 2\text{Fila1}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{Fila2}: & 4 & -3 & 0 & 1 \\ -2\text{Fila1}: & -4 & -6 & -2 & 0 \\ \hline \text{Fila2} - 2\text{Fila1}: & 0 & -9 & -2 & 1 \end{array}$$

2.2. Quedando

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

2.3. Se utiliza el -9 como pivote

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -2 & 1 \end{bmatrix} * \ 3\text{Fila } 1 + \text{Fila2}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3\text{Fila1}: & 6 & 9 & 3 & 0 \\ +\text{Fila2}: & 0 & -9 & -2 & 1 \\ \hline 3\text{Fila1} + \text{Fila2}: & 6 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

2.4. Quedando

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

2.5. Simplificando ambos lados, para llegar a la matriz inversa

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{matrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{9} \end{matrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{array}\right]$$

2.6. La matriz inversa será

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

3. Utilizando la ecuación 8.1.2. Multiplicando la inversa encontrada con la matriz de igualdad (B)

$$x = A^{-1} * B$$

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad => \quad x = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{6} * 4\right) + \left(\frac{1}{6} * 5\right) \\ \left(\frac{2}{9} * 4\right) + \left(-\frac{1}{9} * 5\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

4. Recordando que la matriz x es la matriz que identifica las variables

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

5. Por tanto, se llega a la respuesta:

$$x = \frac{3}{2} \quad ; \quad y = \frac{1}{3}$$

De la misma forma se resuelven las ecuaciones lineales de varias variables. Se encuentra la matriz inversa para luego multiplicar esa matriz con la matriz de constantes (la matriz B). A continuación, se presenta una aplicación de la resolución de ecuaciones, llamada balanceo de ecuaciones. Se resuelve un mismo problema por ambos métodos.

Balanceo de ecuaciones químicas

Una aplicación que se ha vuelto muy común en ingeniería es el balanceo de ecuaciones, plasmados por Mendeleiev en química. En una publicación suya “La relación entre las propiedades de los elementos y su peso atómico” plasmó las bases del balanceo de ecuaciones químicas donde se hace referencia que la masa no se crea ni se destruye en un proceso cualquiera. Una forma rápida de ver si está correcto el balanceo es verificar la cantidad de elementos en la izquierda y por la derecha.

$$H_2O \rightarrow H_2O \quad \text{(balanceada por dos de hidrógeno y 1 de oxígeno)}$$
$$H_2O \rightarrow HO \quad \text{(No balanceada por el hidrógeno)}$$

Ejemplo 1

Balancee la siguiente ecuación química usando herramientas del álgebra matricial

$$MnS + As_2\,Cr_{10}\,O_{35} + H_2SO_4 \quad \rightarrow \quad HM_nO_4 + A_sH_3 + C_rS_3O_{12} + \; H_2O$$

1. Note que la ecuación química no está balanceada, por tanto, se hará por algebra matricial

2. Se plantean las variables

$$\underset{a}{\underline{MnS}} + \underset{b}{\underline{As_2\,Cr_{10}\,O_{35}}} + \underset{c}{\underline{H_2SO_4}} \quad \rightarrow \quad \underset{d}{\underline{HM_nO_4}} + \underset{e}{\underline{A_sH_3}} + \underset{f}{\underline{C_rS_3O_{12}}} + \underset{g}{\underline{H_2O}}$$

3. Se plantean las ecuaciones identificando elementos.

$$\begin{array}{lcrcl}
Mn \text{ (Magneso)} & \therefore & a & = & d \\
S \text{ (Azufre)} & \therefore & a + c & = & 3f \\
As \text{ (Arsénico)} & \therefore & 2b & = & e \\
Cr \text{ (Cromo)} & \therefore & 10b & = & f \\
O \text{ (Oxígeno)} & \therefore & 35b + 4c & = & 4d + 12f + g \\
H \text{ (Hidrógeno)} & \therefore & 2c & = & d + 3e + 2g
\end{array}$$

4. Se igualan todas las ecuaciones a cero.

$$\begin{array}{rl}
a - d = 0 & \text{Ecuación 1} \\
a + c - 3f = 0 & \text{Ecuación 2} \\
2b - e = 0 & \text{Ecuación 3} \\
10b - f = 0 & \text{Ecuación 4} \\
35b + 4c - 4d - 12f - g = 0 & \text{Ecuación 5} \\
2c - d - 3e - 2g = 0 & \text{Ecuación 6}
\end{array}$$

5. Se arma la matriz con los coeficientes de las variables. Luego se cambia el orden

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 10 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 35 & 4 & -4 & 0 & -12 & -1 \\
0 & 0 & 2 & -1 & -3 & 0 & -2
\end{bmatrix}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} a & g & c & d & e & f & b \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \\
0 & -1 & 4 & -4 & 0 & -12 & 35 \\
0 & -2 & 2 & -1 & -3 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\text{Ecuación 1} \\ \text{Ecuación 2} \\ \text{Ecuación 3} \\ \text{Ecuación 4} \\ \text{Ecuación 5} \\ \text{Ecuación 6}
\end{array}$$

6. Se utiliza la fila 6 como pivote. Esto para que los valores de la diagonal no sean ceros.

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \\
0 & -1 & 4 & -4 & 0 & -12 & 35 \\
0 & -2 & 2 & -1 & -3 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \text{Fila2} - \text{Fila6} \\ \text{Fila3} - \text{Fila6} \\ \text{Fila4} - \text{Fila6} \\ \\ \\
\end{array}
=
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & -1 & 1 & 3 & -3 & 0 \\
0 & 2 & -2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\
0 & 2 & -2 & 1 & 3 & -1 & 10 \\
0 & -1 & 4 & -4 & 0 & -12 & 35 \\
0 & -2 & 2 & -1 & -3 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rccccccc}
\text{Fila2:} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\
-\text{Fila6:} & 0 & 2 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\
\hline
\text{Fila2} - \text{Fila6:} & 1 & 2 & -1 & 1 & 3 & -3 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rccccccc}
\text{Fila3:} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\
-\text{Fila6:} & 0 & 2 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\
\hline
\text{Fila3} - \text{Fila6:} & 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & 0 & 2
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccc}
\text{Fila4:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \\
-\text{Fila6:} & 0 & 2 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\
\hline
\text{Fila4} - \text{Fila6:} & 0 & 2 & -2 & 1 & 3 & -1 & 10
\end{array}$$

7. Se utiliza el 1 como pivote

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & 4 & -4 & 0 & -12 & 35 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \text{Fila2} - \text{Fila1} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & 4 & -4 & 0 & -12 & 35 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fila2:	1	2	−1	1	3	−3	0
−Fila1:	−1	0	0	1	0	0	0
Fila2 − Fila1:	0	2	−1	2	3	−3	0

8. Se utiliza el 2 como pivote.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & 4 & -4 & 0 & -12 & 35 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{Fila3} - \text{Fila2} \\ \text{Fila4} - \text{Fila2} \\ 2\text{Fila5} + \text{Fila2} \\ \text{Fila6} + \text{Fila2} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 7 & -6 & 3 & -27 & 70 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Fila3:	0	2	−2	1	2	0	2
−Fila2:	0	−2	1	−2	−3	3	0
Fila2 − Fila2:	0	0	−1	−1	−1	3	2

Fila4:	0	2	−2	1	3	−1	10
− Fila2:	0	−2	1	−2	−3	3	0
Fila4 − Fila2:	0	0	−1	−1	0	2	10

2Fila5:	0	−2	8	−8	0	−24	70
Fila2:	0	2	−1	2	3	−3	0
2Fila5 + Fila2:	0	0	7	−6	3	−27	70

Fila6:	0	−2	2	−1	−3	0	0
Fila2:	0	2	−1	2	3	−3	0
Fila6 + Fila2:	0	0	1	1	0	−3	0

9. Se utiliza el −1 como pivote

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 7 & -6 & 3 & -27 & 70 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{Fila4} - \text{Fila3} \\ \text{Fila5} + 7\text{Fila3} \\ \text{Fila6} + \text{Fila3} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -4 & -6 & 84 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Fila4:	0	0	−1	−1	0	2	10
−Fila3:	0	0	1	1	1	−3	−2
Fila4 − Fila3:	0	0	0	0	1	−1	8

Fila5:	0	0	7	−6	3	−27	70
7Fila3:	0	0	−7	−7	−7	21	14
Fila5 + 7Fila3:	0	0	0	−13	−4	−6	84

Fila6:	0	0	1	1	0	−3	0
Fila3:	0	0	−1	−1	−1	3	2
Fila6 + Fila3:	0	0	0	0	−1	0	2

10. Se permuta la fila 5 con la fila 4. Como es ecuación no importa el signo negativo del cambio.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -4 & -6 & 84 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -4 & -6 & 84 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

11. Se utiliza el 1 como pivote

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -4 & -6 & 84 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \text{Fila6} + \text{Fila5} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -4 & -6 & 84 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r|ccccccc} \text{Fila6:} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ \text{Fila5:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ \hline \text{Fila6} + \text{Fila5:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \end{array}$$

12. Se utiliza el −1 como pivote

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -4 & -6 & 84 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \text{Fila2} - \text{Fila3} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -4 & -6 & 84 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r|ccccccc} \text{Fila2:} & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ -\text{Fila3:} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ \hline \text{Fila2} - \text{Fila3:} & 0 & 2 & 0 & 3 & 4 & -6 & -2 \end{array}$$

13. Se utiliza el −13 como pivote.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -4 & -6 & 84 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} 13\text{Fila1} - \text{Fila4} \\ 13\text{Fila2} + 3\text{Fila4} \\ 13\text{Fila3} - \text{Fila4} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 & -84 \\ 0 & 26 & 0 & 0 & 40 & -96 & 226 \\ 0 & 0 & -13 & 0 & -9 & 45 & -58 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -4 & -6 & 84 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r|ccccccc} 13\text{Fila1:} & 13 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{Fila4:} & 0 & 0 & 0 & 13 & 4 & 6 & -84 \\ \hline 13\text{Fila1} - \text{Fila4:} & 13 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 & -84 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ccccccc} 13\text{Fila2:} & 0 & 26 & 0 & 39 & 52 & -78 & -26 \\ 3\text{Fila4:} & 0 & 0 & 0 & -39 & -12 & -18 & 252 \\ \hline 13\text{Fila2} + 3\text{Fila4:} & 0 & 26 & 0 & 0 & 40 & -96 & 226 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ccccccc} 13\text{Fila3:} & 0 & 0 & -13 & -13 & -13 & 39 & 26 \\ -\text{Fila4:} & 0 & 0 & 0 & 13 & 4 & 6 & -84 \\ \hline 13\text{Fila3} - \text{Fila4:} & 0 & 0 & -13 & 0 & -9 & 45 & -58 \end{array}$$

14. Se utiliza el 1 como pivote

$$\begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 & -84 \\ 0 & 26 & 0 & 0 & 40 & -96 & 226 \\ 0 & 0 & -13 & 0 & -9 & 45 & -58 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -4 & -6 & 84 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Fila1} - 4\text{Fila5} \\ \text{Fila2} - 40\text{Fila5} \\ \text{Fila3} + 9\text{Fila5} \\ \text{Fila4} + 4\text{Fila5} \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -116 \\ 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & -56 & -94 \\ 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 36 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & -10 & 116 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r|ccccccc} \text{Fila1:} & 13 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 & -84 \\ -4\text{Fila5:} & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & -32 \\ \hline \text{Fila1} - 4\text{Fila5:} & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -116 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ccccccc} \text{Fila2:} & 0 & 26 & 0 & 0 & 40 & -96 & 226 \\ -40\text{Fila5:} & 0 & 0 & 0 & 0 & -40 & 40 & -320 \\ \hline \text{Fila2} - 37\text{Fila5:} & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & -56 & -94 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
\text{Fila3:} & 0 & 0 & -13 & 0 & -9 & 45 & -58 \\
\text{9Fila5:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -9 & 72 \\
\hline
\text{Fila3} + \text{8Fila5:} & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 36 & 14
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
\text{Fila4:} & 0 & 0 & 0 & -13 & -4 & -6 & 84 \\
\text{4Fila5:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 32 \\
\hline
\text{Fila4} + \text{4Fila5:} & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & -10 & 116
\end{array}$$

15. Se utiliza el -1 como pivote

$$\begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -116 \\ 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & -56 & -94 \\ 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 36 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & -10 & 116 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Fila1} + \text{10Fila6} \\ \text{Fila2} - \text{56Fila6} \\ \text{Fila3} + \text{36Fila6} \\ \text{Fila4} - \text{10Fila6} \\ \text{Fila5} - \text{Fila6} \\ \end{array} = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & -654 \\ 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 & 374 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
\text{Fila1:} & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -116 \\
\text{10Fila6:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 100 \\
\hline
\text{Fila1} + \text{10Fila6:} & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -16
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
\text{Fila2:} & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & -56 & -94 \\
-\text{56Fila5:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 56 & -560 \\
\hline
\text{Fila2} - \text{56Fila5:} & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & -654
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
\text{Fila3:} & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 36 & 14 \\
\text{36Fila6:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & 360 \\
\hline
\text{Fila3} + \text{36Fila6:} & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 & 374
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
\text{Fila4:} & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & -10 & 116 \\
-\text{10Fila6:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -100 \\
\hline
\text{Fila4} - \text{10Fila6:} & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 16
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
\text{Fila5:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\
-\text{Fila6:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \\
\hline
\text{Fila5} - \text{6Fila6:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2
\end{array}$$

16. Quedando

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & g & c & d & e & f & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & 4 & -4 & 0 & -12 & 35 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & g & c & d & e & f & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & -654 \\ 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 & 374 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Número} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \end{array}$$

Quedando las variables en terminos de b

$$\left.\begin{array}{l} 13a - 16b = 0 \\ 26g - 654b = 0 \\ -13c + 374b = 0 \\ -13d + 16b = 0 \\ e - 2b = 0 \\ -f + 10b = 0 \end{array}\right\} \quad a = \frac{16}{13}b \;\; ; \;\; c = \frac{374}{13}b \;\; ; \;\; d = \frac{16}{13}b \;\; ; \;\; e = 2b \;\; ; \;\; f = 10b \;\; ; \;\; g = \frac{327}{13}b$$

17. Observe que el valor de b debe ser múltiplo de 13 para que sea enteros. Así también, que todas las variables están en función de b

18. Prueba con $b = 13$

$$aMnS + bAs_2\,Cr_{10}\,O_{35} + cH_2SO_4 \;\rightarrow\; d\,HM_nO_4 + eA_sH_3 + f\,C_rS_3O_{12} + \;g\,H_2O$$

$$16MnS + 13As_2\,Cr_{10}\,O_{35} + 374H_2SO_4 \;\rightarrow\; 16\,HM_nO_4 + 26A_sH_3 + 130\,C_rS_3O_{12} + \;327\,H_20$$

NOTA: En el problema anterior se dejaron todas las variables en términos de b, pero también puede dejarlas en términos de cualquiera de las otras variables, donde mi recomendación es que debe ser la variable más repetida entre las ecuaciones.

Si se desea otro procedimiento se puede utilizar la ecuación

$$\boxed{\text{Matriz inversa } [\mathrm{A}^{-1}] \text{ X Matriz } [\mathrm{B}] = \text{Matriz en terminos de t}} \quad \textbf{Ecuación 8.1.2}$$

Donde Matriz t = la matriz de n filas X 1 columna

Ejemplo 2

Balancee la siguiente ecuación química usando herramientas del álgebra matricial

$$MnS + As_2\,Cr_{10}\,O_{35} + H_2SO_4 \quad \rightarrow \quad HM_nO_4 + A_sH_3 + C_rS_3O_{12} + H_2O$$

1. Note que la ecuación química no está balanceada, por tanto, se hará por algebra matricial

2. Se plantean las variables

$$\underset{a}{\underline{MnS}} + \underset{b}{\underline{As_2\,Cr_{10}\,O_{35}}} + \underset{c}{\underline{H_2SO_4}} \quad \rightarrow \quad \underset{d}{\underline{HM_nO_4}} + \underset{e}{\underline{A_sH_3}} + \underset{f}{\underline{C_rS_3O_{12}}} + \underset{g}{\underline{H_2O}}$$

3. Se plantean las ecuaciones identificando elementos.

$$\begin{array}{lcr}
Mn \text{ (Magneso)} & \therefore & a = d \\
S \text{ (Azufre)} & \therefore & a + c = 3f \\
As \text{ (Arsénico)} & \therefore & 2b = e \\
Cr \text{ (Cromo)} & \therefore & 10b = f \\
O \text{ (Oxígeno)} & \therefore & 35b + 4c = 4d + 12f + g \\
H \text{ (Hidrógeno)} & \therefore & 2c = d + 3e + 2g
\end{array}$$

4. Se igualan todas las ecuaciones a cero.

$$\begin{array}{rl}
a - d = 0 & \text{Ecuación 1} \\
a + c - 3f = 0 & \text{Ecuación 2} \\
2b - e = 0 & \text{Ecuación 3} \\
10b - f = 0 & \text{Ecuación 4} \\
35b + 4c - 4d - 12f - g = 0 & \text{Ecuación 5} \\
2c - d - 3e - 2g = 0 & \text{Ecuación 6}
\end{array}$$

5. Se identifica la matriz A y la matriz B. Se elegirá dejar todo en términos de la variable b por tanto la matriz B = todos los coeficientes de la variable b

$$\text{Matriz A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & g & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -4 & 0 & -12 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{variable} \\ \text{Ecuación 1} \\ \text{Ecuación 2} \\ \text{Ecuación 3} \\ \text{Ecuación 4} \\ \text{Ecuación 5} \\ \text{Ecuación 6} \end{array} \; ; \; \text{Matriz B} = \begin{array}{c} b \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 10 \\ 35 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{variable} \\ \text{Ecuación 1} \\ \text{Ecuación 2} \\ \text{Ecuación 3} \\ \text{Ecuación 4} \\ \text{Ecuación 5} \\ \text{Ecuación 6} \end{array}$$

6. Se obtiene la matriz inversa de K

6.1. Se utiliza el 1 como pivote

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -4 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{Fila2} - \text{Fila1}$$

$$\begin{array}{rcccccc} \text{Fila2:} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ -\text{Fila1:} & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \text{Fila2} - \text{Fila1:} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccccc} \text{Fila2:} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{Fila1:} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \text{Fila2} - \text{Fila1:} & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -4 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

6.2. Se utiliza el −2 como pivote para transformar el cero de la segunda fila y segunda columna.

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -4 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{Fila2} - \text{Fila6}$$

$$\begin{array}{rcccccc} \text{Fila2:} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ -\text{Fila6:} & 0 & 2 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ \hline \text{Fila2} - \text{Fila6:} & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccccc} \text{Fila2:} & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{Fila6:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline \text{Fila2} - \text{Fila6:} & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -4 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

6.3. Se utiliza el 2 como pivote para transformar las columnas de abajo en cero.

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -4 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ 2\text{Fila5} + \text{Fila2} \\ \text{Fila6} + \text{Fila2} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc} 2\text{Fila5:} & 0 & -2 & 8 & -8 & 0 & -24 \\ \text{Fila2:} & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 \\ \hline 2\text{Fila5} + \text{Fila2:} & 0 & 0 & 7 & -6 & 3 & -27 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccccc} 2\text{Fila5:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \text{Fila2:} & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 2\text{Fila5} + \text{Fila2:} & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} \text{Fila6:} & 0 & -2 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ \text{Fila2:} & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 \\ \hline \text{Fila6} + \text{Fila2:} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrrr} \text{Fila6:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \text{Fila2:} & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline \text{Fila6} + \text{Fila2:} & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|rrrrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -6 & 3 & -27 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

6.4. Se utiliza el 1 como pivote para transformar la tercera columna y tercera fila.

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|rrrrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -6 & 3 & -27 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \mathbf{Fila3 + Fila6} \\ \\ \\ \\ \end{array} =$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} \textbf{Fila3:} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \textbf{Fila6:} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ \hline \textbf{Fila3 + Fila6:} & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrrr} \textbf{Fila3:} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \textbf{Fila6:} & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \textbf{Fila3 + Fila6:} & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|rrrrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -6 & 3 & -27 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

6.5. Se utiliza el 1 como pivote para transformar las columnas de abajo en cero.

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|rrrrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -6 & 3 & -27 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \text{Fila5} - 7\text{Fila3} \\ \text{Fila6} - \text{Fila3} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} \text{Fila5:} & 0 & 0 & 7 & -6 & 3 & -27 \\ -7\text{Fila3:} & 0 & 0 & -7 & -7 & 7 & 21 \\ \hline \text{Fila5} - 7\text{Fila3:} & 0 & 0 & 0 & -13 & 10 & -6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrrr} \text{Fila5:} & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -7\text{Fila3:} & 7 & -7 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \text{Fila5} - 7\text{Fila3:} & 6 & -6 & -7 & 0 & 2 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} \text{Fila6:} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ -\text{Fila3:} & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ \hline \text{Fila6} - \text{Fila3:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrrr} \text{Fila6:} & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{Fila3:} & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \text{Fila6} - \text{Fila3:} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|rrrrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 10 & -6 & 6 & -6 & -7 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

6.6. Se utiliza el -13 como pivote para transformar el cero de la cuarta fila y cuarta columna.

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -13 & 10 & -6 & 6 & -6 & -7 & 0 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] \text{Fila4} - \text{Fila5}$$

$$\begin{array}{r|cccccc}
\text{Fila4:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-\text{Fila5:} & 0 & 0 & 0 & 13 & -10 & 6 \\
\hline
\text{Fila4} - \text{Fila5:} & 0 & 0 & 0 & 13 & -10 & 5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|cccccc}
\text{Fila4:} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-\text{Fila5:} & -6 & 6 & 7 & 0 & -2 & 1 \\
\hline
\text{Fila4} - \text{Fila5:} & -6 & 6 & 7 & 1 & -2 & 1
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 13 & -10 & 5 & -6 & 6 & 7 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -13 & 10 & -6 & 6 & -6 & -7 & 0 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

6.7. Se utiliza el 13 como pivote para transformar las columnas debajo en cero.

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 13 & -10 & 5 & -6 & 6 & 7 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -13 & 10 & -6 & 6 & -6 & -7 & 0 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] \text{Fila5} + \text{Fila4}$$

$$\begin{array}{r|cccccc}
\text{Fila5:} & 0 & 0 & 0 & -13 & 10 & -6 \\
\text{Fila4:} & 0 & 0 & 0 & 13 & -10 & 5 \\
\hline
\text{Fila5} + \text{Fila4:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|cccccc}
\text{Fila5:} & 6 & -6 & -7 & 0 & 2 & -1 \\
\text{Fila4:} & -6 & 6 & 7 & 1 & -2 & 1 \\
\hline
\text{Fila5} + \text{Fila4:} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 13 & -10 & 5 & -6 & 6 & 7 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

6.8. Se utiliza el 1 como pivote para transformar el 0 de la quinta fila y quinta columna.

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 13 & -10 & 5 & -6 & 6 & 7 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] \text{Fila5} + \text{Fila6}$$

$$\begin{array}{r|cccccc}
\text{Fila5:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
\text{Fila6:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
\text{Fila5} + \text{Fila6:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|cccccc}
\text{Fila5:} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\text{Fila6:} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\text{Fila5} + \text{Fila6:} & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -10 & 5 & -6 & 6 & 7 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

6.9. Se utiliza el 1 como pivote para transformar la columna de abajo en cero.

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -10 & 5 & -6 & 6 & 7 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{Fila 6} - \text{Fila5}$$

$$\begin{array}{rcccccc} \text{Fila6:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\text{Fila5:} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline \text{Fila6} - \text{Fila5:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccccc} \text{Fila6:} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{Fila5:} & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline \text{Fila6} - \text{Fila5:} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -10 & 5 & -6 & 6 & 7 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

6.10. Se utiliza el 1 como pivote para transformar la columna de arriba en cero.

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -10 & 5 & -6 & 6 & 7 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{Fila 2} + \text{Fila3}$$

$$\begin{array}{rcccccc} \text{Fila2:} & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & -3 \\ \text{Fila3:} & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ \hline \text{Fila2} + \text{Fila3:} & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & -6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccccc} \text{Fila2:} & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \text{Fila3:} & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \text{Fila2} + \text{Fila3:} & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & -6 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -10 & 5 & -6 & 6 & 7 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

6.11. Se utiliza el 13 como pivote para realizar los números por encima de el en cero.

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & -6 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -10 & 5 & -6 & 6 & 7 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} 13\text{Fila1} + \text{Fila4} \\ 13\text{Fila2} - 3\text{Fila4} \\ 13\text{Fila 3} - \text{Fila4} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} 13Fila1: & 13 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 \\ Fila4: & 0 & 0 & 0 & 13 & -10 & 5 \\ \hline 13Fila1+Fila4: & 13 & 0 & 0 & 0 & -10 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrrr} 13Fila1: & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Fila4: & -6 & 6 & 7 & 1 & -2 & 1 \\ \hline 13Fila1+Fila4: & 7 & 6 & 7 & 1 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} 13Fila2: & 0 & 26 & 0 & 39 & 26 & -78 \\ -3Fila4: & 0 & 0 & 0 & -39 & 30 & -15 \\ \hline 13Fila2-3Fila4: & 0 & 26 & 0 & 0 & 56 & -93 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrrr} 13Fila2: & -26 & 26 & 13 & 0 & 0 & -13 \\ -3Fila4: & 18 & -18 & -21 & -3 & 6 & -3 \\ \hline 13Fila2-3Fila4: & -8 & 8 & -8 & -3 & 6 & -16 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} 13Fila3: & 0 & 0 & 13 & 13 & -13 & -39 \\ -Fila4: & 0 & 0 & 0 & -13 & 10 & -5 \\ \hline 13Fila3-Fila4: & 0 & 0 & 13 & 0 & -3 & -44 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrrr} 13Fila3: & -13 & 13 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ -Fila4: & 6 & -6 & -7 & -1 & 2 & -1 \\ \hline 13Fila3-Fila4: & -7 & 7 & 6 & -1 & 2 & -1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|rrrrrr} 13 & 0 & 0 & 0 & -10 & 5 & 7 & 6 & 7 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 26 & 0 & 0 & 56 & -93 & -8 & 8 & -8 & -3 & 6 & -16 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & -3 & -44 & -7 & 7 & 6 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -10 & 5 & -6 & 6 & 7 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

6.12. Se utiliza el 1 como pivote para realizar los números por encima de el en cero.

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{rrrrrr|rrrrrr} 13 & 0 & 0 & 0 & -10 & 5 & 7 & 6 & 7 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 26 & 0 & 0 & 56 & -93 & -8 & 8 & -8 & -3 & 6 & -16 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & -3 & -44 & -7 & 7 & 6 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -10 & 5 & -6 & 6 & 7 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} Fila1+10Fila5 \\ Fila2-56Fila5 \\ Fila\ 3+3Fila5 \\ Fila4+10Fila5 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} Fila1: & 13 & 0 & 0 & 0 & -10 & 5 \\ 10Fila5: & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -10 \\ \hline Fila1+10Fila5: & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrrr} Fila1: & 7 & 6 & 7 & 1 & -2 & 1 \\ 10Fila5: & 0 & 0 & -10 & 10 & 0 & 0 \\ \hline Fila1+10Fila5: & 7 & 6 & -3 & 11 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} Fila2: & 0 & 26 & 0 & 0 & 56 & -93 \\ -56Fila5: & 0 & 0 & 0 & 0 & -56 & 56 \\ \hline Fila2-56Fila5: & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & -37 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrrr} Fila2: & -8 & 8 & -8 & -3 & 6 & -16 \\ -56Fila5: & 0 & 0 & 56 & -56 & 0 & 0 \\ \hline Fila2-56Fila5: & -8 & 8 & 48 & -59 & 6 & -16 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} Fila3: & 0 & 0 & 13 & 0 & -3 & -44 \\ 3Fila5: & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ \hline Fila3+3Fila5: & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & -47 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrrr} Fila3: & -7 & 7 & 6 & -1 & 2 & -1 \\ 3Fila5: & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ \hline Fila1+10Fila5: & -7 & 7 & 3 & 2 & 2 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} Fila4: & 0 & 0 & 0 & 13 & -10 & 5 \\ 10Fila5: & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -10 \\ \hline Fila4+10Fila5: & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & -5 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrrr} Fila4: & -6 & 6 & 7 & 1 & -2 & 1 \\ 10Fila5: & 0 & 0 & -10 & 10 & 0 & 0 \\ \hline Fila4+10Fila5: & -6 & 6 & -3 & 11 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|rrrrrr} 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 7 & 6 & -3 & 11 & -2 & 1 \\ 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & -37 & -8 & 8 & 48 & -59 & 6 & -16 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & -47 & -7 & 7 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & -5 & -6 & 6 & -3 & 11 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

6.13. Se utiliza el valor el 1 como pivote para transformar los demás valores en cero.

$$
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
13 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 7 & 6 & -3 & 11 & -2 & 1 \\
0 & 26 & 0 & 0 & 0 & -37 & -8 & 8 & 48 & -59 & 6 & -16 \\
0 & 0 & 13 & 0 & 0 & -47 & -7 & 7 & 3 & 2 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 13 & 0 & -5 & -6 & 6 & -3 & 11 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l}
\text{Fila1} + 5\text{Fila6} \\
\text{Fila2} + 37\text{Fila6} \\
\text{Fila 3} + 47\text{Fila6} \\
\text{Fila4} + 5\text{Fila6} \\
\text{Fila5} + \text{Fila6} \\
\\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|cccccc}
\text{Fila1:} & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\
5\text{Fila6:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
\hline
\text{Fila1} + 5\text{Fila6:} & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|cccccc}
\text{Fila1:} & 7 & 6 & -3 & 11 & -2 & 1 \\
5\text{Fila6:} & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\
\hline
\text{Fila1} + 5\text{Fila6:} & 7 & 6 & -3 & 6 & -2 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|cccccc}
\text{Fila2:} & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & -37 \\
37\text{Fila6:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 37 \\
\hline
\text{Fila2} + 37\text{Fila6:} & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|cccccc}
\text{Fila2:} & -8 & 8 & 48 & -59 & 6 & -16 \\
37\text{Fila6:} & 0 & 0 & 0 & -37 & 0 & 0 \\
\hline
\text{Fila2} + 37\text{Fila6:} & -8 & 8 & 48 & -96 & 6 & -16
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|cccccc}
\text{Fila3:} & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & -47 \\
47\text{Fila6:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 47 \\
\hline
\text{Fila3} + 47\text{Fila6:} & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|cccccc}
\text{Fila3:} & -7 & 7 & 3 & 2 & 2 & -1 \\
47\text{Fila6:} & 0 & 0 & 0 & -47 & 0 & 0 \\
\hline
\text{Fila3} + 47\text{Fila6:} & -7 & 7 & 3 & -45 & 2 & -1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|cccccc}
\text{Fila4:} & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & -5 \\
5\text{Fila6:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
\hline
\text{Fila4} + 5\text{Fila6:} & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|cccccc}
\text{Fila4:} & -6 & 6 & -3 & 11 & -2 & 1 \\
5\text{Fila6:} & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\
\hline
\text{Fila4} + 5\text{Fila6:} & -6 & 6 & -3 & 6 & -2 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|cccccc}
\text{Fila5:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
\text{Fila6:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\text{Fila5} + \text{Fila6:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|cccccc}
\text{Fila5:} & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
\text{Fila6:} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
\hline
\text{Fila3} + \text{Fila6:} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 6 & -3 & 6 & -2 & 1 \\
0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 8 & 48 & -96 & 6 & -16 \\
0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & -7 & 7 & 3 & -45 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & -6 & 6 & -3 & 6 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

7. Se dividen los valores

$$
\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 6 & -3 & 6 & -2 & 1 \\
0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 8 & 48 & -96 & 6 & -16 \\
0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & -7 & 7 & 3 & -45 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & -6 & 6 & -3 & 6 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
1/13 \\
1/26 \\
1/13 \\
1/13 \\
\\
\\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7/13 & 6/13 & -3/13 & 6/13 & -2/13 & 1/13 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4/13 & 4/13 & 24/13 & -48/13 & 3/13 & -8/13 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -7/13 & 7/13 & 3/13 & -45/13 & 2/13 & -1/13 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6/13 & 6/13 & -3/13 & 6/13 & -2/13 & 1/13 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

8. Se multiplica la matriz inversa por la matriz (Ecuación 8.1.2.)

$$x = \mathrm{A}^{-1} \quad \mathrm{X} \quad \mathrm{B}$$

$$\begin{bmatrix} 7/13 & 6/13 & -3/13 & 6/13 & -2/13 & 1/13 \\ -4/13 & 4/13 & 24/13 & -48/13 & 3/13 & -8/13 \\ -7/13 & 7/13 & 3/13 & -45/13 & 2/13 & -1/13 \\ -6/13 & 6/13 & -3/13 & 6/13 & -2/13 & 1/13 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{X} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 10 \\ 35 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ -g \\ -c \\ -d \\ -e \\ -f \end{bmatrix}$$

8.1. Al multiplicar la matriz 6 X 6 y 6 X 1 se tendrá de resultado la matriz de 6 X 1. De la forma en que se distribuyó en el paso 5 en las columnas, las variables, así quedaran en forma vertical en este paso.

$$x = \begin{bmatrix} -a \\ -g \\ -c \\ -d \\ -e \\ -f \end{bmatrix}$$

8.2. Encontrando los valores se multiplican las matrices

$$-a = \left(\frac{7}{13}\right)(0) + \left(\frac{6}{13}\right)(0) + \left(\frac{-3}{13}\right)(2) + \left(\frac{6}{13}\right)(10) + \left(\frac{-2}{13}\right)(35) + \left(\frac{1}{13}\right)(0) = \frac{-16}{13}$$

$$-g = \left(\frac{-4}{13}\right)(0) + \left(\frac{4}{13}\right)(0) + \left(\frac{24}{13}\right)(2) + \left(\frac{-48}{13}\right)(10) + \left(\frac{3}{13}\right)(35) + \left(\frac{-8}{13}\right)(0) = \frac{-327}{13}$$

$$-c = \left(\frac{-7}{13}\right)(0) + \left(\frac{7}{13}\right)(0) + \left(\frac{3}{13}\right)(2) + \left(\frac{-45}{13}\right)(10) + \left(\frac{2}{13}\right)(35) + \left(\frac{-1}{13}\right)(0) = \frac{-374}{13}$$

$$-d = \left(\frac{-6}{13}\right)(0) + \left(\frac{6}{13}\right)(0) + \left(\frac{-3}{13}\right)(2) + \left(\frac{6}{13}\right)(10) + \left(\frac{-2}{13}\right)(35) + \left(\frac{1}{13}\right)(0) = \frac{-16}{13}$$

$$-e = (0)(0) + (0)(0) + (-1)(2) + (0)(10) + (0)(35) + (0)(0) = -2$$

$$-f = (0)(0) + (0)(0) + (0)(2) + (-1)(10) + (0)(35) + (0)(0) = -10$$

9. Quedando las variables en términos de b como:

$$a = \frac{16}{13}b \ ; \ c = \frac{374}{13}b \ ; \ d = \frac{16}{13}b \ ; \ e = 2b \ ; \ f = 10b \ ; \ g = \frac{327}{13}b$$

¿Cuándo utilizar este método, sí es más largo que Gauss?

Este método se recomienda utilizar en caso de contar con un software como Maple_18 o Wolfram, ya que es más práctico ingresar la matriz A, luego encontrar su inversa y por último multiplicarla por la matriz B. Simplemente debe identificar respecto a qué variable quedarán las demás variables (usted escoge si respecto a, b, c…) y luego armar las matrices correspondientes.

Ejemplo 3

Indicar los valores de k para que el sistema tenga una única solución, no tenga solución o tenga infinitas soluciones

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$$

1. Se arma la matriz que exprese el sistema

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \text{No.} \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

2. Se resuelve la ecuación como comúnmente se haría.

3. Se utiliza el valor k como pivote

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ k\text{Fila2} - \text{Fila1} \\ k\text{Fila3} - \text{Fila1} \end{matrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k^2-1 & k-1 & k-1 \\ 0 & k-1 & k^2-1 & k-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcccc} k\text{Fila2:} & k & k^2 & k & k \\ -\text{Fila1:} & -k & -1 & -1 & -1 \\ \hline k\text{Fila2} - \text{Fila1:} & 0 & k^2-1 & k-1 & k-1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} k\text{Fila3:} & k & k & k^2 & k \\ -\text{Fila1:} & -k & -1 & -1 & -1 \\ \hline k\text{Fila3} - \text{Fila1:} & 0 & k-1 & k^2-1 & k-1 \end{array}$$

4. Se utiliza el valor $k^2 - 1$ como pivote.

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k^2-1 & k-1 & k-1 \\ 0 & k-1 & k^2-1 & k-1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (k+1)\text{Fila3} - \text{Fila2} \end{matrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k^2-1 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & k^3+k^2-2k & k^2-k \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcccc} (k+1)\text{Fila3:} & 0 & k^2-1 & (k+1)(k^2-1) & k^2-1 \\ -\text{Fila2:} & 0 & -k^2+1 & -k+1 & -k+1 \\ \hline (k+1)\text{Fila3} - \text{Fila2:} & 0 & 0 & k^3+k^2-2k & k^2-k \end{array}$$

5. Se factorizan filas para una mejor comprensión.

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k^2-1 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & k^3+k^2-2k & k^2-k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (k+1)(k-1) & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & k(k+2)(k-1) & k(k-1) \end{bmatrix}$$

6. Quedando

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \text{No.} \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (k+1)(k-1) & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & k(k+2)(k-1) & k(k-1) \end{bmatrix} \qquad \text{note que: } k \neq 1$$

$$k(k+2)(k-1)\,\boldsymbol{z} = k(k-1)$$

$$z = \frac{k\,(k-1)}{k\,(k-1)\,(k+2)} \qquad \boldsymbol{z} = \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{k}+\mathbf{2})}$$

7. Encontrando el valor de $\boldsymbol{y}$

$$(k+1)(k-1)y + (k-1)\,z = k-1$$

$$(k+1)y + \boldsymbol{z} = 1 \quad \text{Sustituyendo } \boldsymbol{z}$$

$$(k+1)y + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}+\mathbf{2}} = 1$$

$$(k+1)(k+2)y + 1 = k+2$$

$$(k+1)(k+2)y = k+1$$

$$\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}+\mathbf{2}}$$

8. Encontrando el valor de $\boldsymbol{x}$

$$kx + \mathbf{y} + \mathbf{z} = 1$$

$$kx + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k+2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k+2}} = 1$$

$$kx + \frac{2}{k+2} = 1$$

$$k(k+2)x + 2 = k + 2$$

$$\cancel{k}(k+2)x = \cancel{k}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{k+2}}$$

9. Los valores de las variables serán

$$x = \frac{1}{k+2} \quad ; \quad y = \frac{1}{k+2} \quad ; \quad z = \frac{1}{k+2}$$

10. Para que el sistema no tenga solución. Si es k=1 las 3 ecuaciones se convierten en la misma.

$$k = -2 \quad ; \quad k = 1$$

11. Demostración para cualquier valor de k utilizando la segunda ecuación.

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases} \qquad \frac{1}{k+2} + \frac{k}{k+2} + \frac{1}{k+2} = 1 \qquad => \qquad \frac{2+k}{k+2} = 1$$

12. Por tanto, el valor de k puede ser

$$(-\infty, -2) \ \text{U} \ (-2\ , 1) \ \text{U} \ (1, \infty)$$

6.4.3. Conceptualización final de matrices

Una aplicación directa de matrices en cualquier ingeniería es utilizando el programa Microsoft Excel, el cual es una hoja de cálculo desarrollada por Microsoft para Windows que cuenta con herramientas gráficas, tablas calculares y un lenguaje de programación llamado Visual Basic.

Excel trabaja con cuadritos llamados celdas, cada celda es un dato de una matriz. El conjunto de celdas es la formación de una matriz (datos ordenados).

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4			A_1	A_2	A_3
5		Matriz A	A_4	A_5	A_6
6			A_7	A_8	A_9
7					

Imagen que muestra la forma en que se pueden armar matrices en Excel.

Al buscar empleo de ingeniería, uno de los requisitos que solicitan es el manejo de estos programas. Las matrices tienen gran aplicación en Excel, programando hojas de cálculo, donde al cambiar una celda (un dato de una matriz) cambien los demás datos (los demás datos de la matriz)

Ejemplo 1

Una constructora desea saber el costo de inversión de cada obra y el costo total de inversión de materiales en tres obras distintas. Teniendo la siguiente información:

$$
\begin{array}{ccc}
 & \textbf{Estructura} & \begin{array}{cccc}\textbf{Acero} & \textbf{Madera} & \textbf{Piedra} & \textbf{Cemento}\end{array} \\
\mathbf{B} \; = & \begin{array}{c}\textbf{Puente}\\ \textbf{Muro}\\ \textbf{Edificio}\end{array} & \begin{bmatrix} 44 & 10 & 20 & 100 \\ 10 & 8 & 18 & 150 \\ 55 & 35 & 16 & 300 \end{bmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
\textbf{Quetzales} & \\
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 650.00 \\ 150.00 \\ 225.00 \\ 75.00 \end{bmatrix} & \begin{array}{c}\textbf{Acero}\\ \textbf{Madera}\\ \textbf{Piedra}\\ \textbf{Cemento}\end{array}
\end{array}
$$

1. La Matriz C representará los datos del costo por cada obra

$$C = B \text{ x } A$$

$$
C = \begin{array}{c}\textbf{Puente}\\ \textbf{Muro}\\ \textbf{Edificio}\end{array} \begin{bmatrix} (44*650)+(10*150)+(20*225)+(100*75) \\ (10*650)+(8*150)+(18*225)+(150*75) \\ (55*650)+(35*150)+(16*225)+(300*75) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42{,}100 \\ 23{,}000 \\ 67{,}100 \end{bmatrix}
$$

Los datos indican que, en el puente, la empresa invertirá Q42,100. En la obra del muro se invertirán Q23,000. Por último, en el edificio Q67,100.

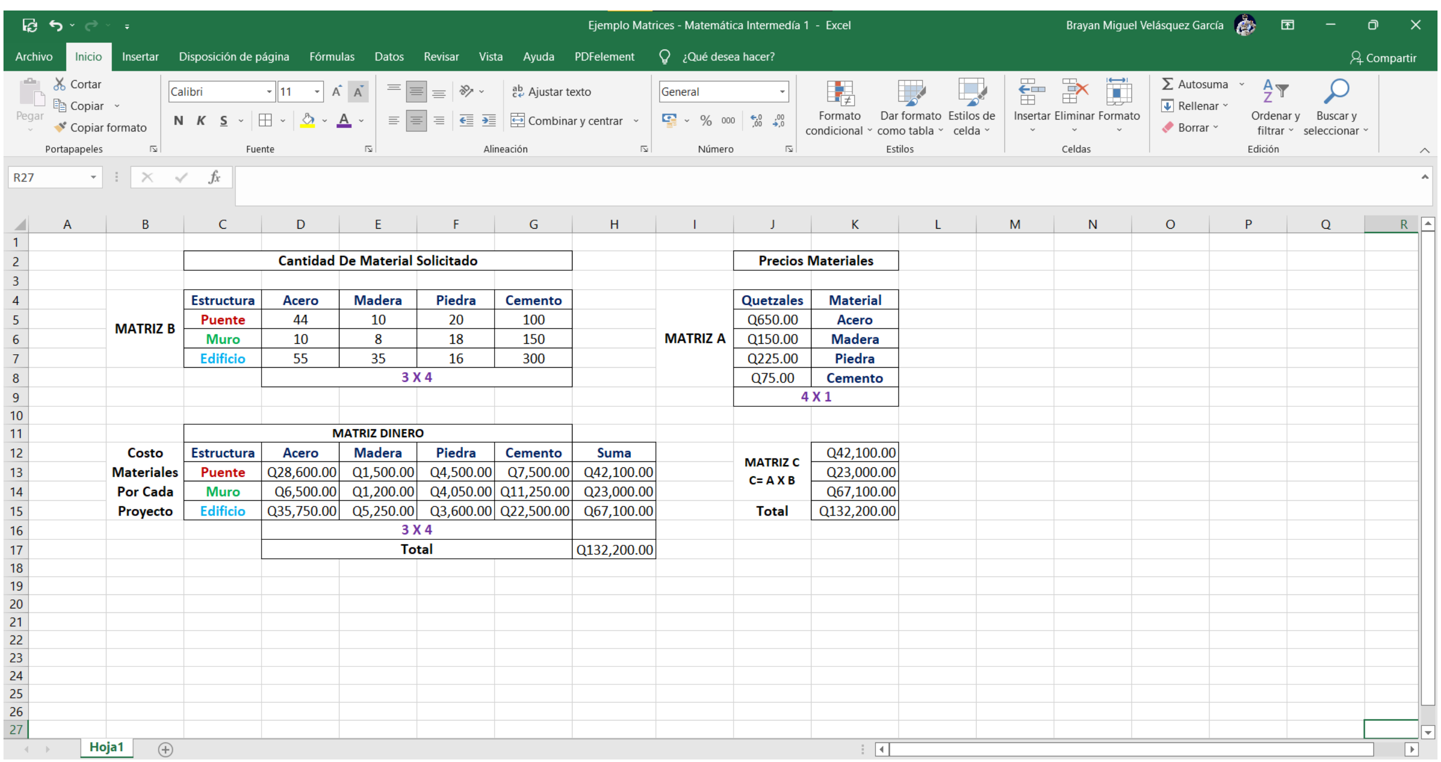
2. Para identificar el costo total, se suman los datos de la matriz C

$$42{,}100 + 23{,}000 + 67{,}100 \; = \; 132{,}200$$

3. La respuesta será

$$
C = \begin{array}{c}\text{Puente}\\ \text{Muro}\\ \text{Edificio}\end{array} \begin{bmatrix} \text{Q } 42{,}100.00 \\ \text{Q } 23{,}000.00 \\ \text{Q } 67{,}100.00 \end{bmatrix} \qquad \text{Inversión Total} \; = \; \text{Q } 132{,}200
$$

4. La representación en Excel de los cálculos anteriores será:



Cantidad De Material Solicitado — MATRIZ B

Estructura	Acero	Madera	Piedra	Cemento
Puente	44	10	20	100
Muro	10	8	18	150
Edificio	55	35	16	300
	3 X 4			

Precios Materiales — MATRIZ A

Quetzales	Material
Q650.00	Acero
Q150.00	Madera
Q225.00	Piedra
Q75.00	Cemento
4 X 1	

MATRIZ DINERO — Costo Materiales Por Cada Proyecto

Estructura	Acero	Madera	Piedra	Cemento	Suma
Puente	Q28,600.00	Q1,500.00	Q4,500.00	Q7,500.00	Q42,100.00
Muro	Q6,500.00	Q1,200.00	Q4,050.00	Q11,250.00	Q23,000.00
Edificio	Q35,750.00	Q5,250.00	Q3,600.00	Q22,500.00	Q67,100.00
	3 X 4				
	Total				Q132,200.00

MATRIZ C C= A X B

	Q42,100.00
	Q23,000.00
	Q67,100.00
Total	Q132,200.00

7. VECTORES Y GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Querido lector, hasta este momento todo lo visto en matemática ha sido en dos dimensiones, salvo algunos sólidos generados al rotar una función o los volúmenes en geometría básica, pero ahora analizaremos más detallado la forma de estudiar este tema.

Este es el último capítulo de nuestro libro, porque es el puente entre matemática intermedia 1 (mate 3 y 4) con la matemática intermedia 2 (mate 5) así que desde ya le hago la advertencia que, si usted no sale preparado correctamente en este tema, en la matemática siguiente tendrá problemas de comprensión. En mi experiencia como estudiante y docente, este tema es el que mayor dificultad se le presenta al estudiante, así que le pido que me siga en la explicación paso a paso.

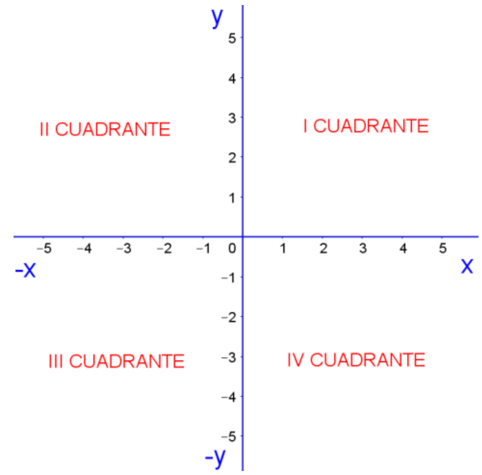
Este capítulo es de alta importancia para el ser humano y su vida cotidiana, ya que todo lo vemos, percibimos y hacemos en tres dimensiones y lo único que aprenderemos será aplicarles lenguaje matemático a esas modalidades cotidianas. Para un ingeniero Civil esta es una de las puertas al mundo de la altimetría para niveles de tierra, movimientos de tierra entre otras cosas.

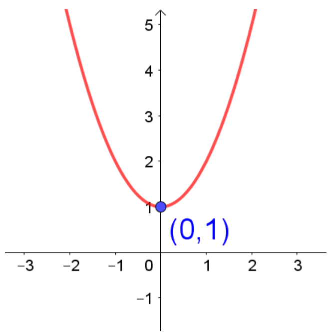
En este capítulo se verán los temas: Sistema tridimensional, vectores, figuras cilíndricas y planos en el espacio. Admirando en la portada el quetzal, símbolo de nuestra libertad como guatemaltecos y, sobre todo, como matemáticos, siendo libres con el pensamiento. La portada debe inspirarlo a perseguir en alto la matemática, tal y como lo hace desde lo alto del cielo tan bella ave, así como a ser grande en los temas.

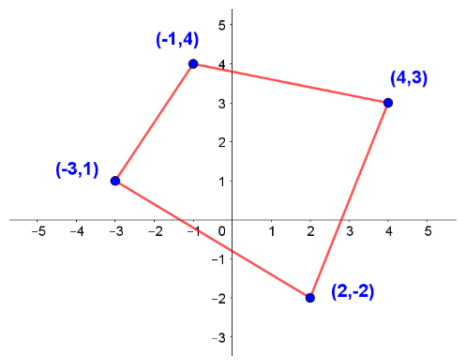
Coordenadas bidimensionales

Debe comenzar por recordar el sistema de coordenadas rectangulares en dos dimensiones.

1. El plano cartesiano es llamado también plano coordenado.
2. El plano cartesiano se divide en 4 cuadrantes.
3. Con el plano cartesiano se trazan funciones, se ubica por puntos coordenados o cualquier otra gráfica geométrica.







7.1. Sistema de coordenadas tridimensional

1. Analice la figura 7.1 donde se tiene el isométrico de un salón de clase de 8 metros por 5 metros. En la figura 2 se tiene la planta de la clase. En ambas figuras ubique la moneda

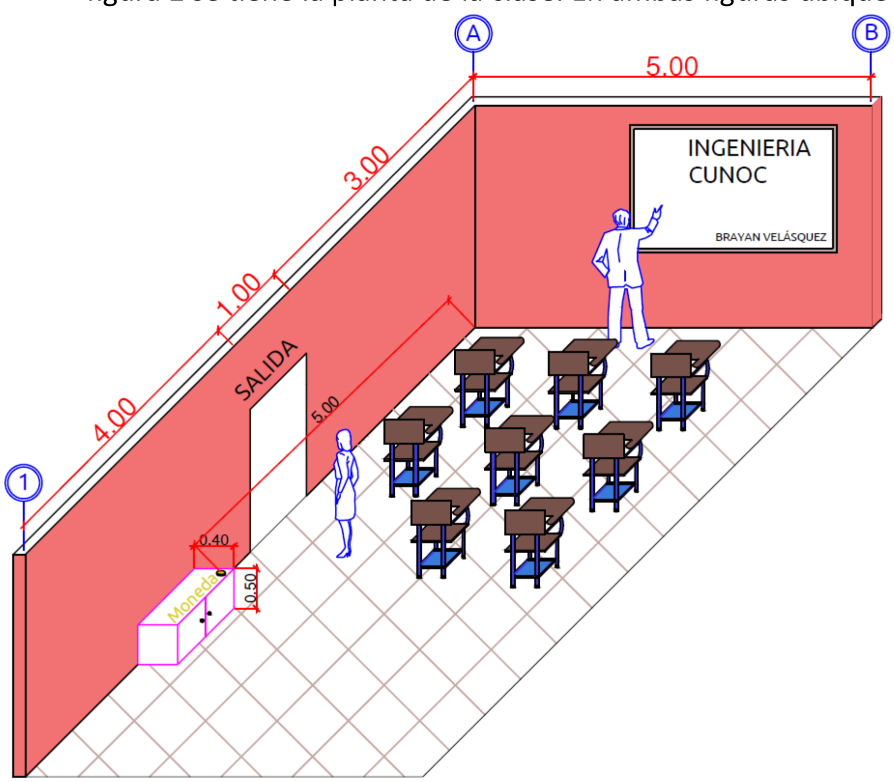


Figura No. 1 - Clase en 3 Dimensiones

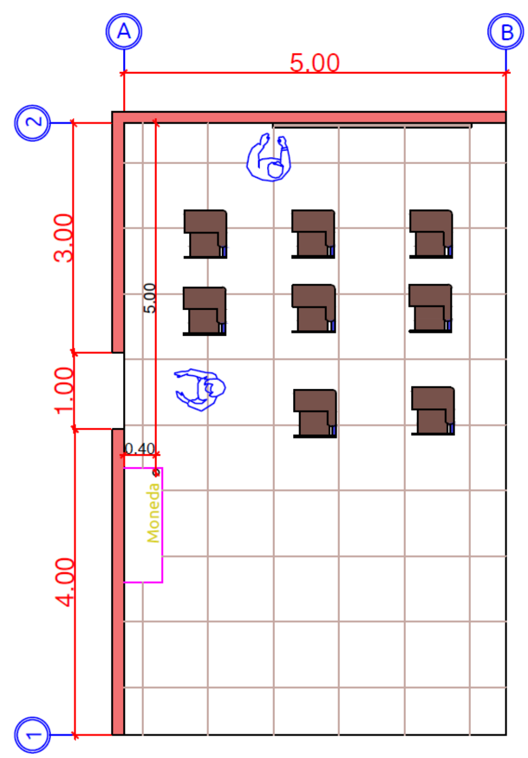


Figura No. 2 Planta De Clase

2. Antes de este capítulo utilizábamos el sistema de la figura 2 para ubicar la moneda, pero nótese que tenía carencias en una dimensión pues no veíamos la altura de la moneda.

3. Para ubicar la moneda en un sistema tridimensional se utiliza el sistema de coordenadas como en la figura No 3.

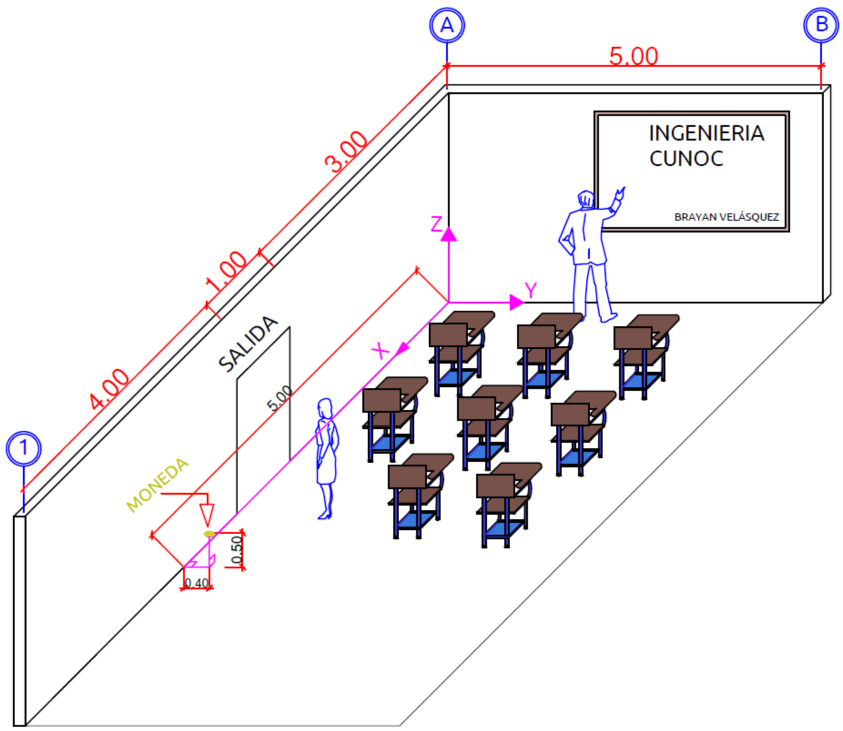


Figura No. 3 Sistema tridimensional

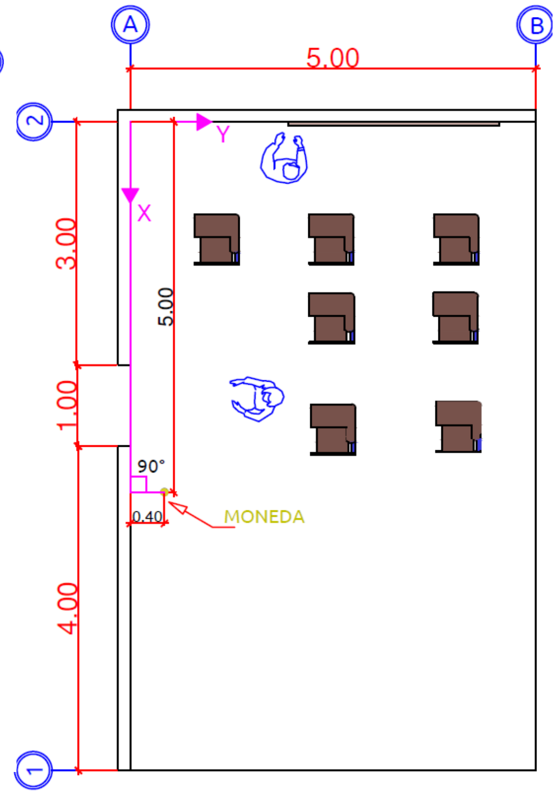
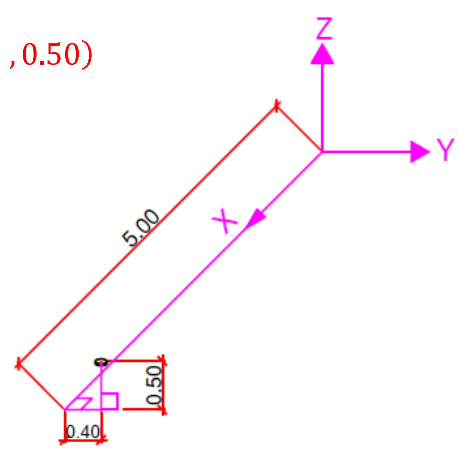


Figura No. 4 Sistema Bidimensional

4. Nótese que se introduce una nueva variable que indica el eje de altura, al cual se le ha denotado Z. Pues bien, ese es el sistema tridimensional, el que incluye tres ejes y al igual que el plano en dos dimensiones, no siempre es X, Y y Z pero sí debe tener los 3 ejes.

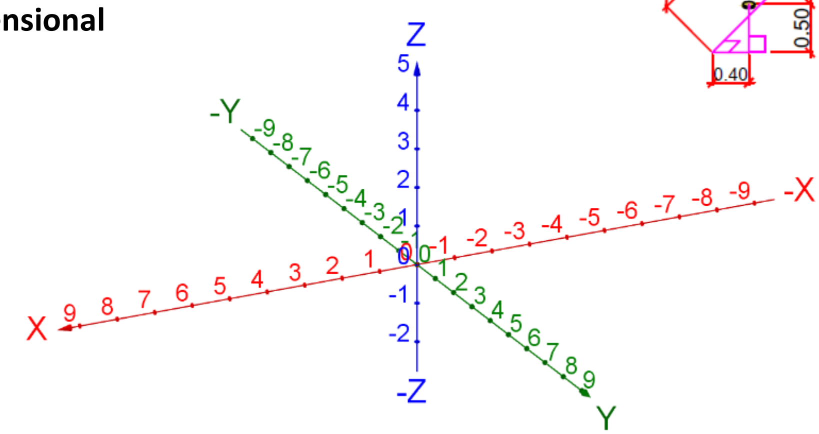
5. Tomando el eje de referencia de la figura 3, donde el origen está en la esquina de la clase, la moneda estará ubicada en:

$$\text{Moneda}\,(x, y, z) \;=\; \text{Moneda}\,(5.00\;\;, 0.40\;\;, 0.50)$$

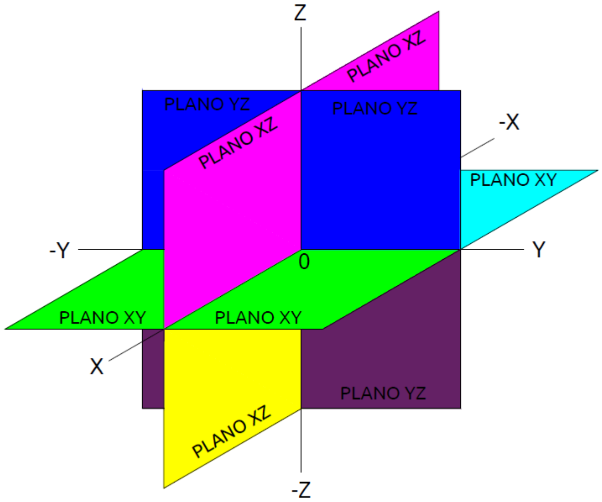


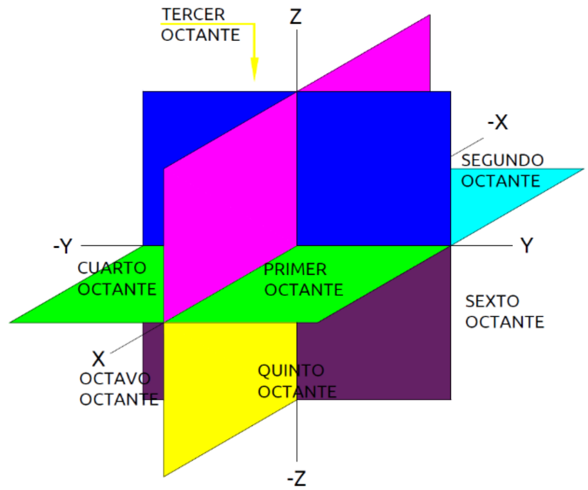
Significando que:
En el eje x debe caminar 5.00 metros
En el eje y debe caminar 0.40 metros
En el eje z debe caminar 0.50 metros

Sistema Tridimensional



El plano cartesiano en 3 Dimensiones también está divido en octantes (ocho partes) y sus planos divisorios serán:

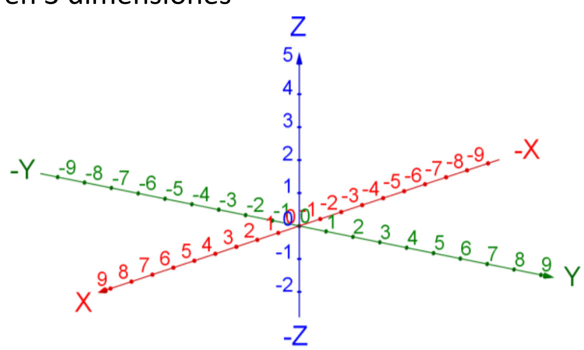




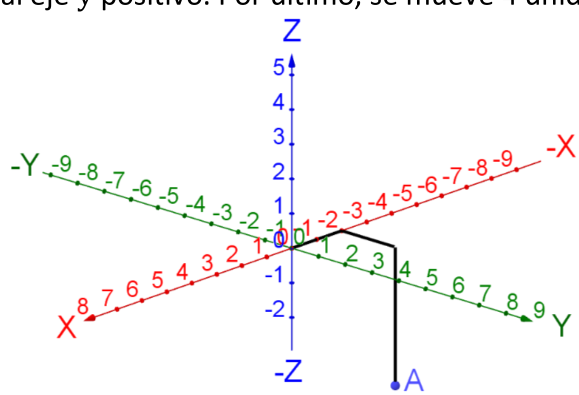
Ejemplo 1

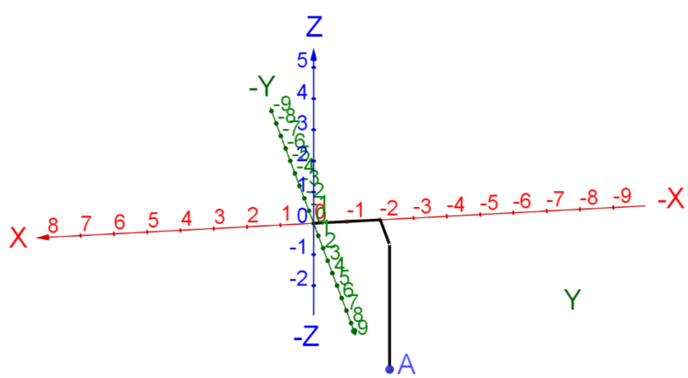
Ubique el punto A dado por la coordenada rectangular $(-2\ ,2\ ,-4)$

1. Se traza el plano cartesiano en 3 dimensiones



2. Se ubica el punto corriéndose 2 unidades al eje x negativo (por eso el -2), luego se corre 2 unidades al eje y positivo. Por último, se mueve 4 unidades hacia el eje z negativo





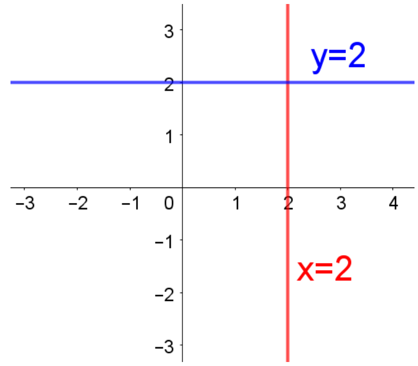
Ejemplo No. 2

Determine la superficie que se forma en 3 dimensiones de:

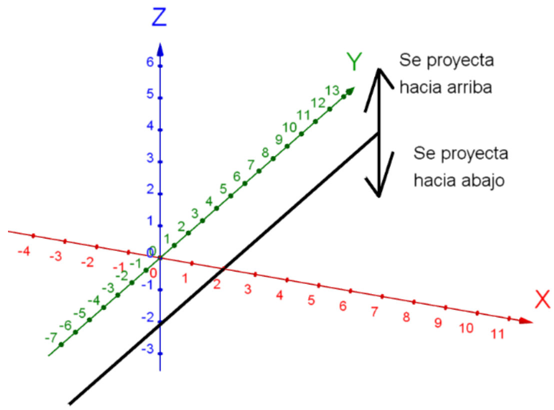
a) $\mathrm{x}=2$
b) $\mathrm{y}=2$
c) $\mathrm{z}=2$

Resolviendo Inciso a)

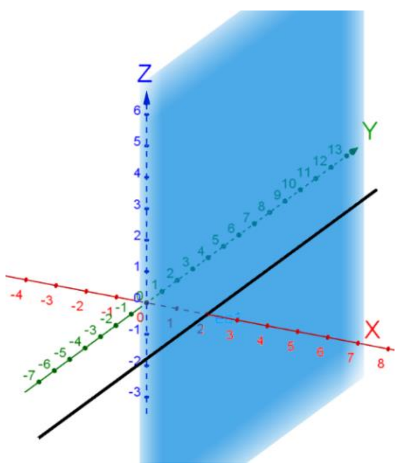
1. Si fuera en dos dimensiones la gráfica sería:

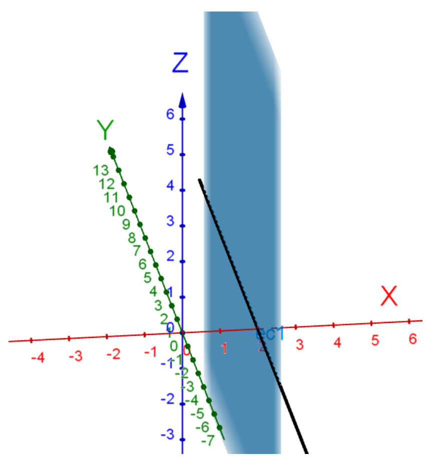


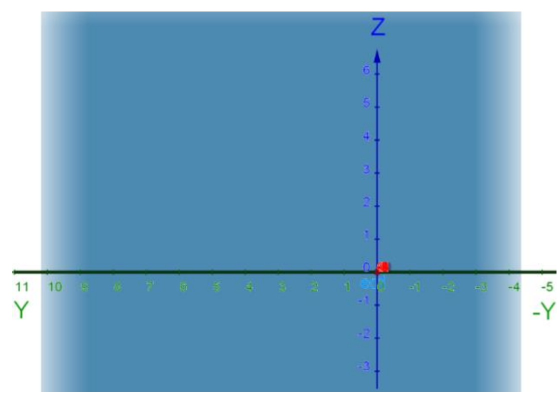
2. Por tanto, en el inciso a) la recta x=2 se proyectará hacia arriba y hacia abajo



3. Quedando la gráfica final

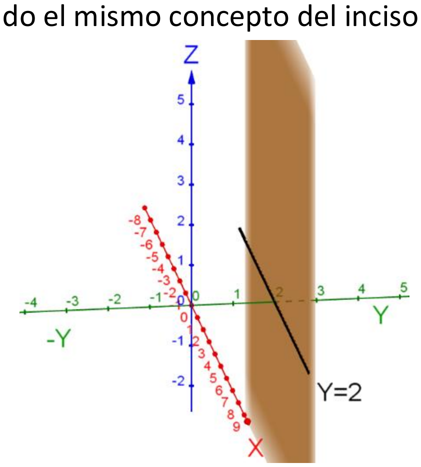


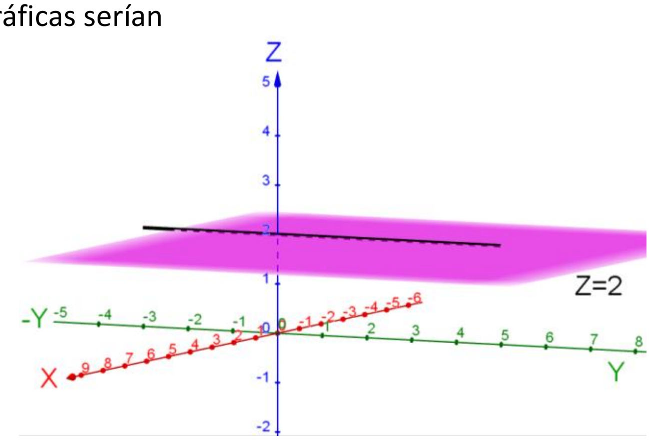




Inciso b) y c)

4. Tomando el mismo concepto del inciso a) las gráficas serían





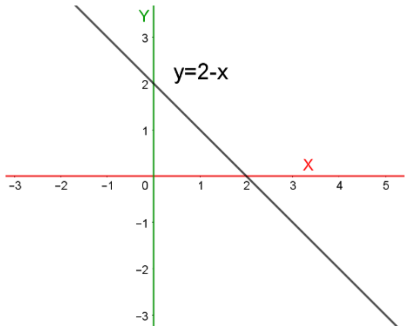
Ejemplo 3

Describa y bosqueje la superficie en R^3 $(\text{tres dimensiones})$ representada por la ecuación
$x + y = 2$

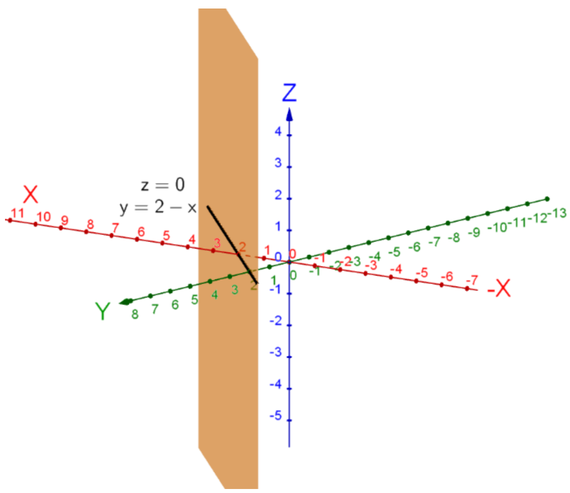
1. Se despeja la variable y

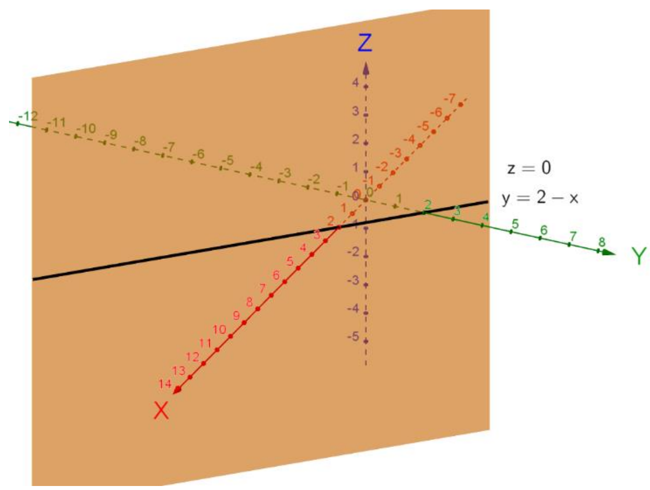
$$y = 2 - x$$

2. Se traza la gráfica en R^2



3. La superficie en R^3 será



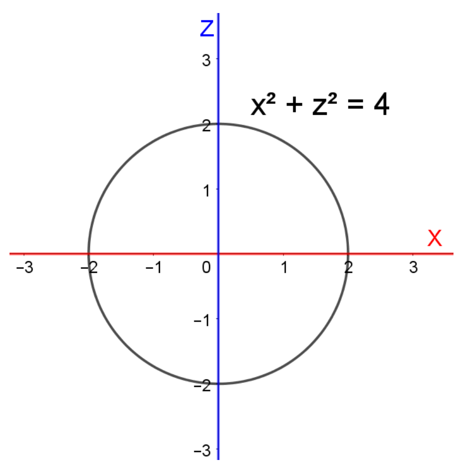


Ejemplo 4

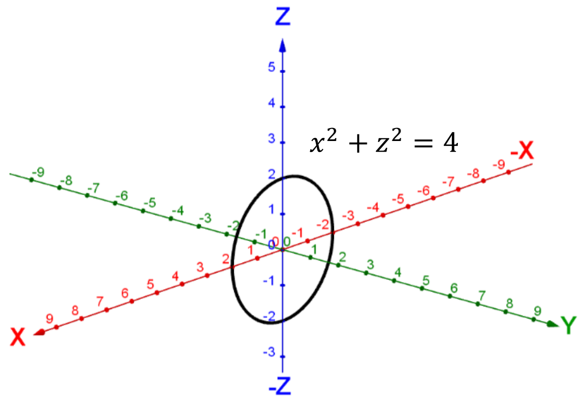
a) Describa y bosqueje la superficie en R^3 $(\text{tres dimensiones})$ representada por la ecuación
$x^2 + z^2 = 4$

b) Límite la gráfica entre $y = -2$ y $y = 2$

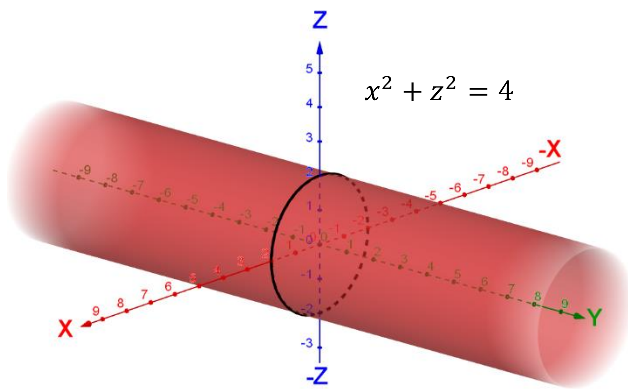
1. Se traza la gráfica en dos dimensiones, relacionando las variables ahí indicadas. También debe notar que la relación describe un círculo de radio 2



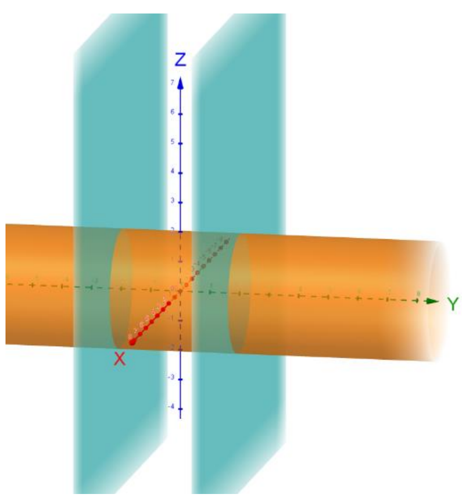
2. El trazo de la gráfica de dos dimensiones se lleva ahora a la 3era dimensión.

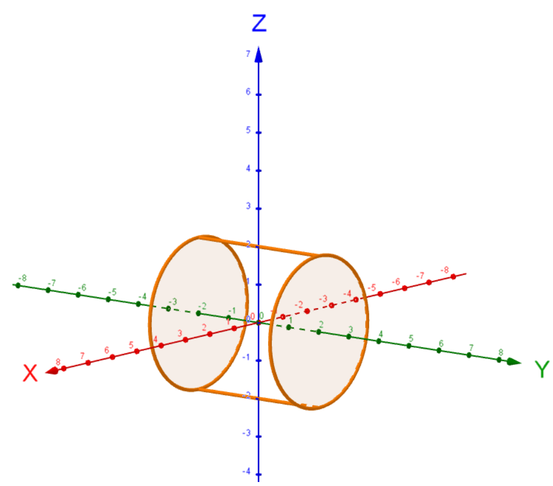


3. Luego se corre toda la gráfica en el eje y, ya que no está incluida en la ecuación original para formar la superficie.



4. Para el inciso b) se deberá trazar un plano para $y = -2$ y para $y = 2$ quedando de la siguiente forma. Note en la gráfica de la derecha que se forma un cilindro





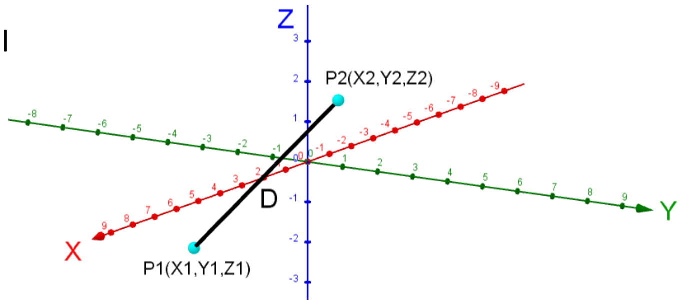
De esta forma se van transformando superficies en tres dimensiones, sin necesidad de hacer rotar gráficas bidimensionales. Este tema se abordará de manera más extensa en el capítulo 7.5 llamado cilindros y superficies cuádricas en donde aprenderemos a trazar gráficas como $z = x^2 + y^2$. Las ideas del plano en tres dimensiones se han dejado plasmadas en el capítulo 7.1.

7.2. Distancia en tres dimensiones

Recuerde que la distancia entre dos puntos, en un sistema bidimensional es:

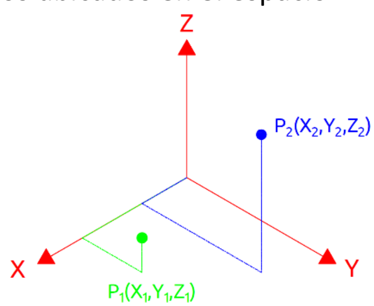
$$D^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \qquad \text{Se obtiene por pitágoras}$$

Para un plano tridimensional



¿De dónde se obtiene la fórmula?

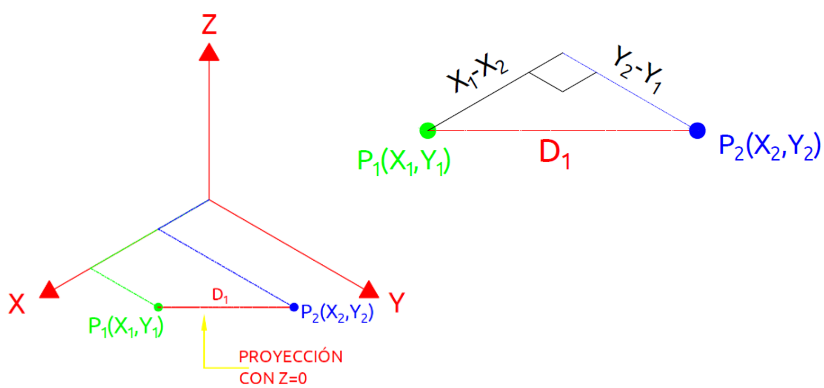
1. Suponga que se tienen dos puntos ubicados en el espacio



2. Se proyecta la distancia entre ambos puntos al plano XY. La distancia D1 se obtiene por el teorema de Pitágoras.

$$D_1{}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$D_1 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



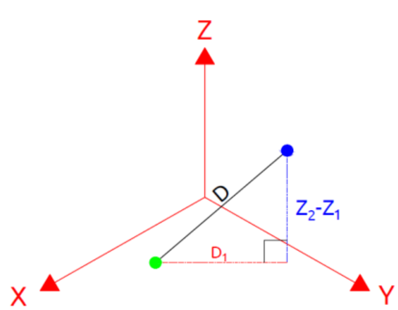
3. Teniendo la distancia D1 se proyecta esa misma distancia en el plano cartesiano para obtener la distancia D en términos de los puntos coordenados, nuevamente se aplica Pitágoras.

$$D^2 = D_1{}^2 + (z_2 - z_1)^2$$

Sustituyendo D1

$$D^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



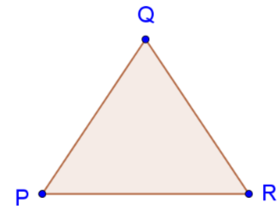
$$\boxed{\mathbf{D} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \qquad \textbf{Ecuación 7.1}$$

Ejemplo 1

Halle las longitudes de los lados del triángulo PQR. ¿Es un triángulo rectángulo? ¿Es un triángulo isósceles?

$P(3\,,-2\,,-3\,)\qquad Q(7\,,0\,,1)\qquad R(1\,,2\,,1\,)$

1. Dada la descripción del problema el triángulo será



2. Se procede a encontrar la distancia PQ siguiendo la fórmula 7.1.

$P(3\,,-2\,,-3\,)\qquad Q(7\,,0\,,1)$

$$|PQ\,| = \sqrt{(7-3)^2+(0-(-2))^2+(1-(-3))^2} \;=\; \sqrt{4^2+2^2+4^2}=\sqrt{36} \;=\; 6$$

3. La distancia PR siguiendo la fórmula 7.1.

$P(3\,,-2\,,-3\,)\qquad R(1\,,2\,,1)$

$$|PQ| \;=\; \sqrt{(1-3)^2+(2-(-2))^2+(1-(-3))^2} \;=\; \sqrt{(-2)^2+4^2+4^2}=\sqrt{36} \;=\; 6$$

4. La distancia QR será utilizando la fórmula 7.1.

$Q(7\,,0\,,1)\qquad R(1\,,2\,,1)$

$$|QR| \;=\; \sqrt{(1-7)^2+(2-0)^2+(1-1)^2} \;=\; \sqrt{(-6)^2+2^2+0^2}=\sqrt{40} \;=\; 2\sqrt{10}$$

5. La respuesta que tiene dos lados iguales es:

$$\text{Un triángulo Isósceles de}\quad 6 \text{ X } 6 \text{ X } 2\sqrt{10}$$

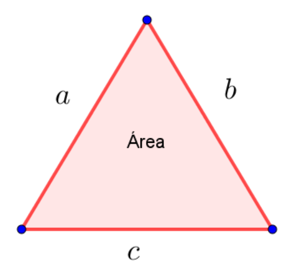
Ejemplo 2

Al triángulo anterior encuéntrele el área utilizando la fórmula de Herón que utiliza el Semiperímetro

1. La fórmula de Herón indica que, teniendo un triángulo de lados a, b y c su área será:

$$Área=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad ;\quad s=\frac{a+b+c}{2}$$

$s=$ Semiperímetro



2. Encontrando el semiperímetro.

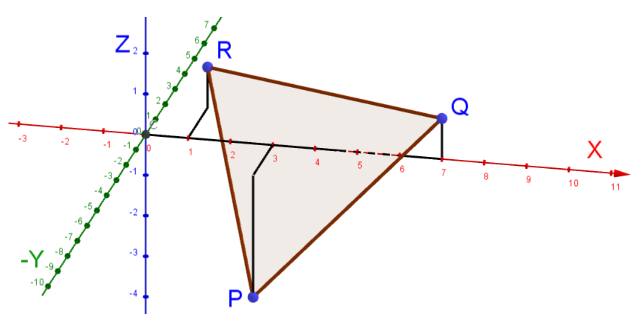
$$s=\frac{|PQ|+|QR|+|PR|}{2} \;=\; \frac{6+2\sqrt{10}+6}{2} \;=6+\sqrt{10}$$

3. Sustituyendo el dato en la fórmula de Herón

$$Área=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \;=\; \sqrt{(6+\sqrt{10})(6+\sqrt{10}-6)(6+\sqrt{10}-2\sqrt{10})(6+\sqrt{10}-6)}$$

$$Área=\sqrt{(6+\sqrt{10})*(\sqrt{10})*(6-\sqrt{10})*(\sqrt{10})} \;=\; \sqrt{10*(36-10)} \;=\; 2\sqrt{65}\;\text{ unidades}^2$$

$$Área=2\sqrt{65}\;\text{ u}^2 \;=\; 16.1245\text{ u}^2$$



7.3. Vectores

En las ciencias exactas se utiliza mucho la palabra vector. A continuación, le presento cuatro escenarios para su comprensión.

1. Suponga que una persona le pregunta a usted querido lector
   - ✓ ¿Cuántos años tiene?
   - ✓ Y usted rápidamente le dirá: 24 años (por poner un ejemplo)

   ¿Cree que necesita decirle algo más?
   La respuesta es NO. Con la magnitud (24) y unidad (años) del tiempo bastará

2. Suponga que necesita medir la temperatura de su café para saber si está en una temperatura agradable. Al hacerlo nota que el termómetro indica 36℃

   ¿Cree que necesita decirle algo más?
   La respuesta es NO. Con la magnitud (37) y unidad (℃) bastará.

3. Suponga que usted va caminando por la calle cuando se escucha que ha ocurrido un robo. En eso usted ve pasar al ladrón cruzando una calle hacia el norte, cuando el policía llega donde usted le preguntará:
   - ✓ Policía: ¿Ha visto pasar al ladrón?
   - ✓ Usted: Se fue corriendo a unos $15\ {}^{m}/_{s}$

   ¿Cree que necesita decirle algo más?
   La respuesta es SÍ. Necesitaría decirle hacia donde se fue el ladrón (dirección), ya que el policía podría correr más rápido que el ladrón, pero en la dirección contraria, por lo que nunca lo alcanzaría.

4. Suponga que una caja ubicada en un punto obstruye el paso y que está cerca de una pared. Por tanto, usted debe moverla aplicándole 20 Newtons de fuerza.

   ¿Cree que necesita decirle algo más?
   La respuesta es SÍ. Necesitaría decirle hacia dónde va el empuje de la caja, ya que si empuja hacia la derecha la caja topará con la pared y si empuja hacia abajo la caja (apachándola) tampoco se moverá hacia la izquierda. Necesita una magnitud y una dirección en la fuerza.

Conceptualizando
El caso 1 y caso 2 son **cantidades escalares** ya que solamente se necesitaba saber la magnitud con su respectiva unidad (24 años y 37 ℃).
El caso 3 y caso 4 son **cantidades vectoriales,** ya que no bastaba con la magnitud de su unidad, sino que también necesitaba saberse su dirección (hacia a donde apuntaba el vector).

Medir

Medir es el acto de comparar la magnitud establecida de la región con otra similar. A continuación, le dejo una tabla para que diferencie las cantidades escalares con las vectoriales.

Tabla 7.1

No.	Cantidades Escalares	Cantidades Vectoriales
1	Distancia	Desplazamiento
2	Rapidez	Velocidad
3	Masa	Fuerza
4	Trabajo	Aceleración
5	Energia	Torque
6	Tiempo	Impulso
7	Área	Momento Lineal
8	Presión	Campo Electrico
9	Potencia	Fuerza Magnetica

Recuerde que para una cantidad escalar solo necesitamos la magnitud y unidad. Para las cantidades vectoriales son un escalar más una dirección.

Diferencia entre distancia y desplazamiento

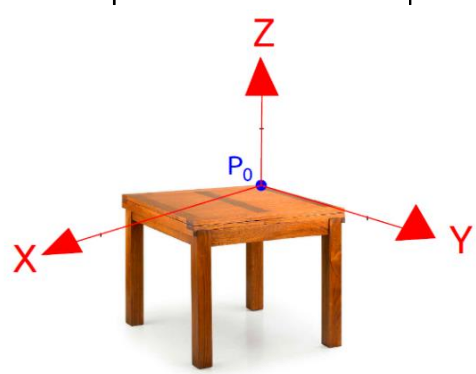
distancia

Piense en la siguiente mesa de 1 metro por 1 metro.

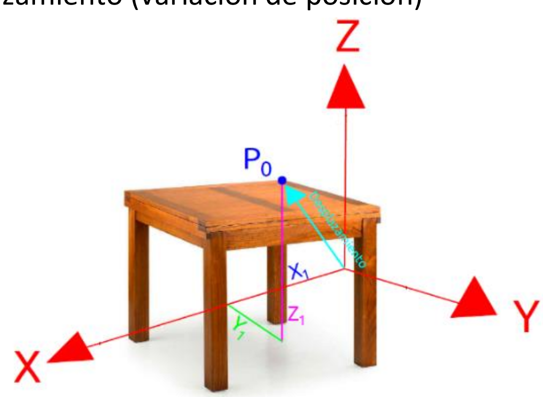
Observe que la medida es la misma si se rota la mesa de la siguiente forma. Esa medida sería una **medida escalar** porque solo nos interesa de ella su magnitud (1) y unidad (metro).

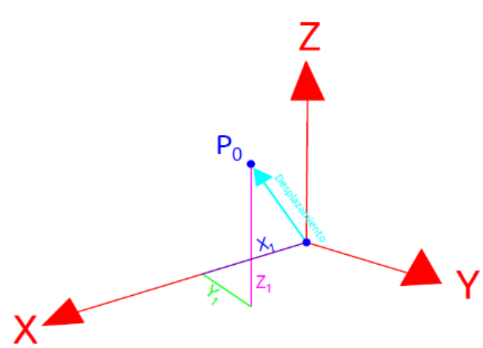
Desplazamiento

Ahora observe la siguiente imagen. La esquina de la mesa del punto P_0 se encuentra en el origen $(0 , 0 , 0)$del plano cartesiano.



Al mover la esquina de la mesa P_0 a otro punto con coordenadas (X_1 , Y_1 , Z_1) ocurrirá lo que se conoce como desplazamiento (variación de posición)





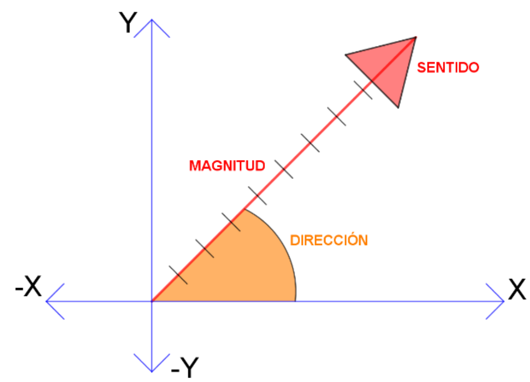
Entonces, como puede observar en la imagen anterior, el desplazamiento es una distancia a una dirección especificada (cantidad vectorial que no es más que cantidad escalar con una dirección y sentido).

Esta diferencia es importante que usted la maneje querido lector, ya que le será útil en la práctica como en el tema de torca. La misma diferencia ocurre en el tema **Rapidez** y **Velocidad,** ya que la rapidez es una cantidad escalar (magnitud y unidad) en tanto que la velocidad es una cantidad vectorial (cantidad escalar con una dirección y sentido).

7.3.1. Datos de un vector

1. a un vector se le coloca una flecha como vínculo, para expresar matemáticamente que es un vector.

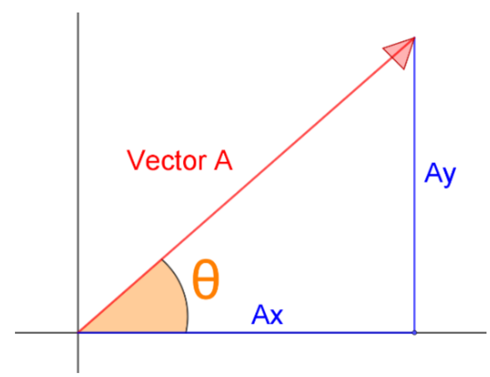
$$\text{Vector A } = \vec{A}$$



2. Un vector se ubica en un plano cartesiano.

3. Un vector tiene una magnitud (número) y una unidad (metros, newtons, libras, m/s, m/s^2...)

4. Un vector tiene una dirección que es un ángulo que indica hacia dónde va el vector. Un ángulo positivo se toma en contra de la dirección de las agujas del reloj, así como un ángulo negativo se toma en dirección de las agujas del reloj.



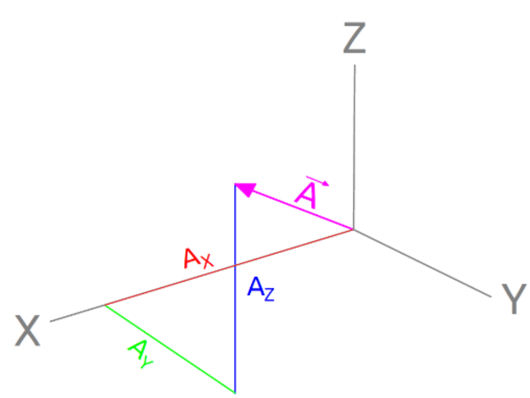
5. Un vector tiene un sentido que es la flecha que va en la punta de este que indica de dónde viene el vector y hacia dónde se dirige.

6. Un vector tiene también coordenadas o componentes. Se calculan por funciones trigonométricas
   $A_x = A\cos\theta \qquad A_y = A\,\text{sen}\theta \quad ; \quad A = \text{Magnitud Vector A}$

   Por tanto, el vector $\vec{A}$ se pude representar como
   $\text{Magnitud A a un ángulo } \theta = \langle A_x , A_y \rangle = \langle A\cos\theta , A\,\text{sen}\theta \rangle =$
   Las componentes de un vector se expresan con la simbología $\langle A_x , A_y \rangle$

   El vector en tres dimensiones tendrá componentes

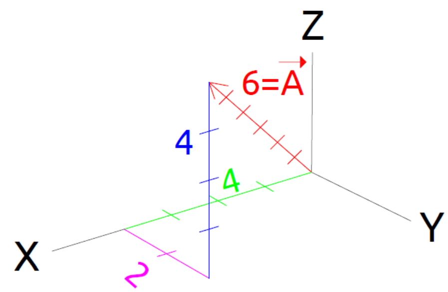
$$\vec{A} = \langle A_x , A_y , A_z \rangle$$



Ejemplo 1

Encuentre la magnitud del vector $A = \langle 4, 2\ , 4 \rangle$

1. Para encontrar la magnitud del vector se debe utilizar la ecuación de distancia entre dos puntos, tomando a uno de los puntos, el origen $\langle 0\ , 0\ , 0 \rangle$



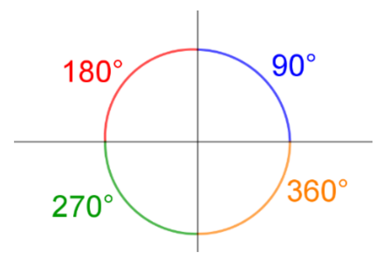
$$\text{Magnitud vector A} \ = \ |\,A\,|$$

$$|\,A\,| \ = \ \sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (4)^2} \ = \sqrt{36} = 6$$

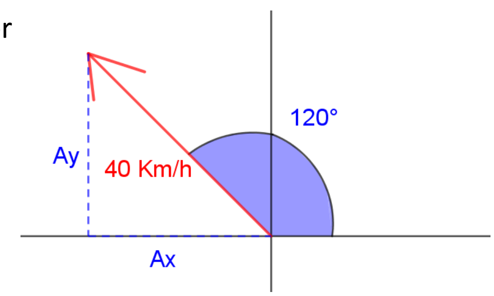
Ejemplo 2

Halle las componentes x y y de una velocidad de 40 $^{\mathrm{Km}}/_{\mathrm{h}}$ a $120°$

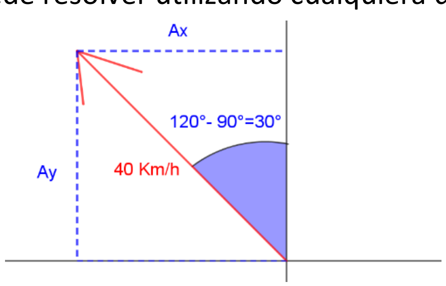
1. Recuerde que el ángulo en grados está dado por:

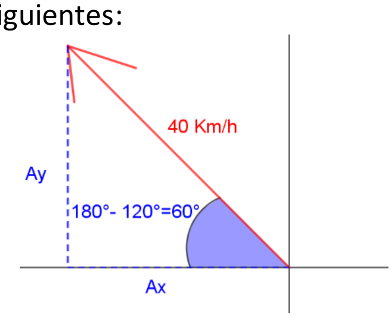


2. Se realiza un diagrama para idealizar las componentes del vector



3. Se puede resolver utilizando cualquiera de los dos triángulos siguientes:





3.1. $$\mathrm{sen}30° = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{A_x}{40\,^{\mathrm{Km}}/_{\mathrm{h}}}$$

$$A_x = 40\,^{\mathrm{Km}}/_{\mathrm{h}} * \mathrm{sen}30° \ = \ 20\ ^{\mathrm{Km}}/_{\mathrm{h}}$$

$$\mathrm{sen}60° = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{A_Y}{40\,^{\mathrm{Km}}/_{\mathrm{h}}}$$

$$A_y = 40\,^{\mathrm{Km}}/_{\mathrm{h}} * \mathrm{sen}60° \ = \ 34.641\ ^{\mathrm{Km}}/_{\mathrm{h}}$$

3.2. $$\cos30° = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{A_y}{40\,^{\mathrm{Km}}/_{\mathrm{h}}}$$

$$A_y = 40\,^{\mathrm{Km}}/_{\mathrm{h}} * \cos30° = 34.641\ ^{\mathrm{Km}}/_{\mathrm{h}}$$

$$\cos30° = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{A_x}{40\,^{\mathrm{Km}}/_{\mathrm{h}}}$$

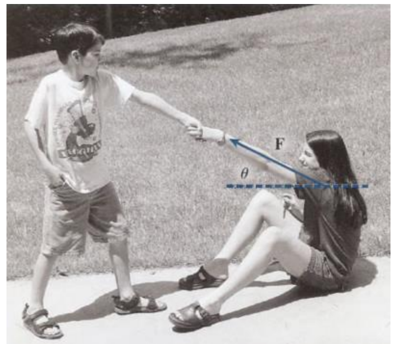
$$A_x = 40\,^{\mathrm{Km}}/_{\mathrm{h}} * \cos60° = 20\ ^{\mathrm{Km}}/_{\mathrm{h}}$$

3.3. La respuesta, viendo las dos gráficas será para ambos casos:

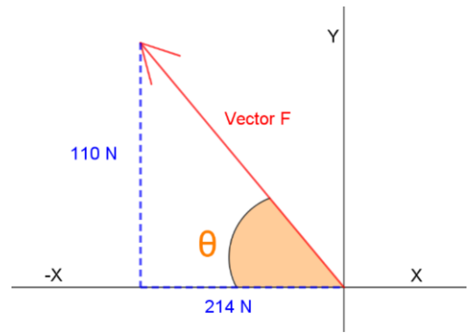
$$\langle -20\ ^{\mathrm{Km}}/_{\mathrm{h}}\ , 34.641\ ^{\mathrm{Km}}/_{\mathrm{h}} \rangle$$

Ejemplo 3

Un niño intenta levantar a su hermana del pavimento. Si la componente vertical de la fuerza que hala **F** tiene una magnitud de 110 N y la componente horizontal tiene una magnitud de 214 N, ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza F?



1. Se procede a obtener un diagrama de fuerzas, tomando el hombro de la niña como punto



2. La magnitud del vector F se encontrará por Pitágoras

$$|\mathrm{F}| = \sqrt{110^2 + 214^2} = \sqrt{57{,}896} = 240.062 \text{ N}$$

3. La dirección del vector será

$$\tan\theta = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{110 \text{ N}}{214 \text{ N}} = \frac{55}{107}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{55}{107}\right) \qquad \text{Despejando el ángulo}$$

$$\theta = 27.204°$$

4. El ángulo del vector será

$$180° - \theta = 180° - 27.204° = 152.796°$$

5. La respuesta será

$$240.062 \text{ N} \quad \text{a} \quad 152.796°$$

7.3.2. Vector unitario

Un vector unitario es un vector sin dimensiones, cuya magnitud es exactamente 1. Su dirección se utiliza para dirigir a un vector cualquiera. En un vector unitario se utilizan los símbolos $\boldsymbol{i}\langle 1,0,0\rangle$ para x, $\boldsymbol{j}\ \langle 0,1,0\rangle$ para y y $\mathbf{k}\ \langle 0,0,1\rangle$ para z.

- Para identificar al vector de 10 m a 0° es más fácil decir: $10\ i$
- Para identificar al vector de 20 N hacia el oeste $(180°)$es más fácil decir: $-20\ i$
- Para identificar al vector de 5 m/s hacia el sur $(270°)$ es más fácil decir: $-5\ j$

Un vector se puede representar utilizando vectores unitarios o también utilizando las componentes

$$\mathrm{A} = A_x i + A_y j + A_z k = \langle A_x, A_j, A_z\rangle$$

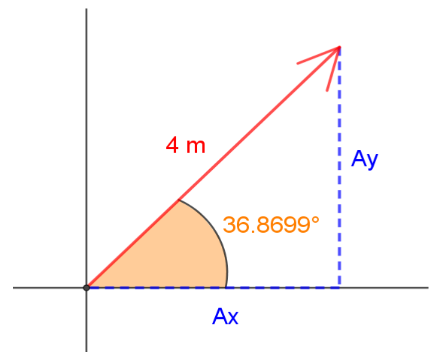
Para encontrar el vector unitario de un vector cualquiera, se debe encontrar la magnitud del vector dado y luego dividir las componentes dentro de esa magnitud.

$$\boxed{u = \frac{\text{A}}{|\,\text{A}\,|}} \qquad \textbf{Ecuación 7.2.}$$

$$u = \frac{\text{A}}{|\,\text{A}\,|} = \left\langle \frac{A_x}{\sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}} , \frac{A_y}{\sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}} , \frac{A_z}{\sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}} \right\rangle$$

Ejemplo 1

Encuentre el vector unitario de $4\text{ m a } 36.8699°$



1. Se obtienen las componentes del vector dado.

$$A_x = 4 * \cos(36.8699) \quad ; \quad A_y = 4 * \text{sen}(36.8699)$$
$$A_x = 3.20\text{ m} \quad ; \quad A_y = 2.40\text{ m}$$

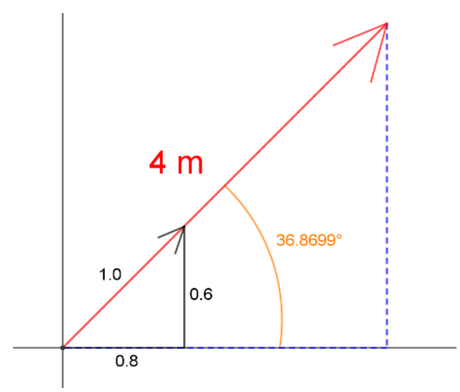
$$\text{A} = 3.20\,i + 2.40\,j = \langle 3.20\,, 2.40 \rangle$$

2. Se obtiene la magnitud del vector A

$$|\,\text{A}\,| = \sqrt{3.20^2 + 2.40^2} = 4 \quad \text{(comprobación de la hipotenusa original)}$$
$$|\,\text{A}\,| = 4$$

3. Se aplica la ecuación 7.2. para encontrar el vector unitario.

$$u = \frac{\text{A}}{|\,\text{A}\,|} = \frac{\langle 3.20\,, 2.40 \rangle}{4} = \left\langle \frac{3.20}{4} , \frac{2.40}{4} \right\rangle = \langle 0.8 \;,\; 0.6 \rangle$$



4. Prueba del resultado, se encontró su magnitud, donde debe ser igual a 1.

$$|u| = \sqrt{0.8^2 + 0.6^2} = \sqrt{1.00} = 1.00$$

5. El resultado será

$$u = \langle\, 0.8 \;,\; 0.6 \,\rangle$$

Ejemplo 2

Halle el vector unitario que tenga la misma dirección que el vector $8i - j + 4k$

1. Se nombrará al vector como A como referencia y el vector dado tiene componentes:

$$\text{A} = \langle 8 \;,\; -1 \;,\; 4 \rangle$$

2. La magnitud del vector será

$$|\,\text{A}\,| = \sqrt{8^2 + (-1)^2 + (4)^2} = \sqrt{81} = 9$$

3. El vector unitario, siguiendo la ecuación 7.2. Será

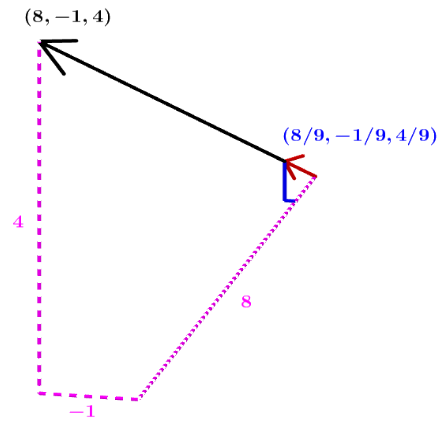
$$u = \frac{\text{A}}{|\,\text{A}\,|} = \frac{\langle 8 \;,\; -1 \;,\; 4 \rangle}{|\,\text{A}\,|} = \frac{1}{9}\langle 8 \;,\; -1 \;,\; 4 \rangle = \left\langle \frac{8}{9} , -\frac{1}{9} , \frac{4}{9} \right\rangle$$

4. La comprobación será sacando la magnitud del vector unitario y verificando que sea 1

$$|u| = \sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(-\frac{1}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{81} + \frac{1}{81} + \frac{16}{81}} = \sqrt{\frac{81}{81}} = \sqrt{1} = 1 \quad \text{(comprobado)}$$

5. La respuesta será

$$\left\langle \frac{8}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{4}{9} \right\rangle$$

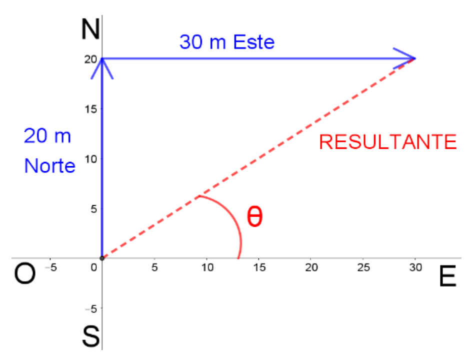


7.3.3. Operación entre vectores

A. Suma y resta de vectores

La suma de vectores es de alta importancia, ya que nos sirve para obtener un solo vector a partir de la suma de dos o más vectores. En vectores, la resta sigue siendo una suma, lo único que cambia es que al vector que está restando se le invierte la dirección.

1. Piense en una persona que camina 20 metros hacia el Norte (a 90 grados) y luego 30 metros hacia el Este (a 0 grados).



2. El desplazamiento de la persona puede omitirse en tanta vuelta si se toma un vector resultante a un ángulo θ. Para obtener ese vector resultante se suman ambos vectores. Los métodos para obtener el vector resultante son:

- Método del triángulo (para dos vectores)
- Método del paralelogramo (para dos vectores)
- Método del polígono (para dos o más vectores)

} Métodos geométricos (a escala)

- Método de las componentes (para dos o más vectores) } Métodos analíticos

Para fines del curso de matemática intermedia 1 y de este libro, solamente se analizará el método de las componentes para sumar y restar vectores.

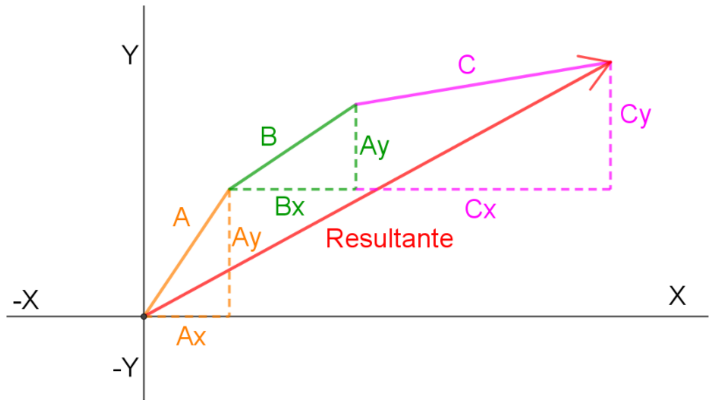
Método de las componentes

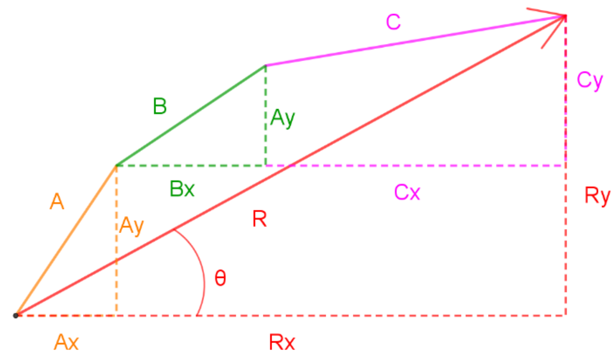
Este es el método más sencillo y eficaz de sumar y restar vectores, ya que, a comparación de los métodos gráficos, este método es exacto y preciso.

1. Se descompone cada vector que se esté sumando en sus componentes.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x\boldsymbol{i} + \mathbf{A}_y\boldsymbol{j} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_x\boldsymbol{i} + \mathbf{B}_y\boldsymbol{j} \qquad \mathbf{C} = \mathbf{C}_x\boldsymbol{i} + \mathbf{C}_y\boldsymbol{j}$$

2. Se suman las componentes en x y las componentes en y justo como lo muestra la siguiente imagen.





3. La suma de los vectores A, B y C será el vector resultante R.

$$\mathrm{R} = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}$$

$$\mathrm{R_x} = \sum x = \mathrm{A_x} + \mathrm{B_x} + \mathrm{C_x} + \cdots \mathrm{n_x} \qquad \mathrm{R} = \mathrm{R_x}i + \mathrm{R_y}j$$

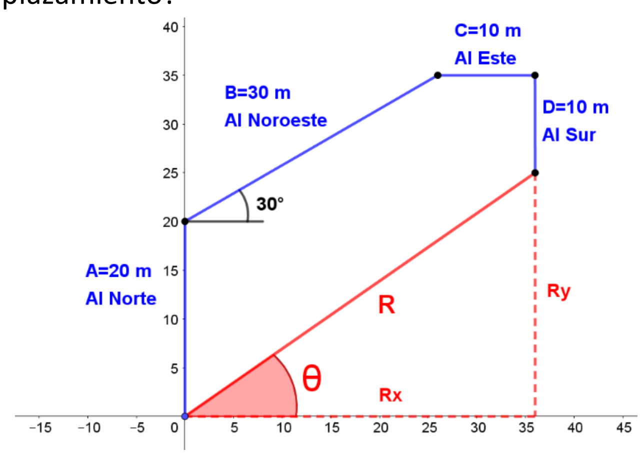
$$\mathrm{R_y} = \sum y = \mathrm{A_y} + \mathrm{B_y} + \mathrm{C_y} + \cdots \mathrm{n_y} \qquad \tan\theta = \frac{\text{Cat. Opuesto}}{\text{Cat. Adyacente}} = \frac{\mathrm{R_y}}{\mathrm{R_x}}$$

Como puede observar en las figuras anteriores, la suma de vectores sigue reglas geométricas y no aritméticas. También aplica para 3 dimensiones simplemente sumando sus componentes en z.

Ejemplo 1

Un ciclista recorre 20 m hacia el Norte, luego 30 m hacia el Noroeste a 30° respecto a la horizontal, 10 m al este y finalmente 10 m al sur. ¿Cuál es su desplazamiento?

1. Se realiza un diagrama de desplazamiento



2. La resultante será la suma de:

$$\mathrm{R} = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{D}$$

3. Las componentes de cada vector serán (ver diagrama de desplazamiento):

$$\mathrm{A} = 20\,j = \langle 0 \;,\; 20 \rangle$$
$$\mathrm{C} = 10\,i = \langle 10 \;,\; 0 \rangle$$

$$D = -10\,j = \langle 0 \;,\; -10 \rangle$$

3.1. El vector B será:

$$\text{sen}30° = \frac{B_y}{B} = \frac{B_y}{30} \qquad \cos 30° = \frac{B_x}{B} = \frac{B_x}{30}$$

$$30 * \text{sen}30° = B_y \qquad 30 * \cos 30° = B_x \qquad \text{Por tanto}$$

$$15\text{ m} = B_y \qquad 25.981\text{ m} = B_x \qquad B = 25.981\,i + 15\,j = \langle 25.981 \;,\; 15 \rangle$$

4. Sumando las componentes tendremos:

$$\begin{aligned} A &= \langle 0 \;,\; 20 \rangle \\ B &= \langle 25.981 \;,\; 15 \rangle \\ C &= \langle 10 \;,\; 0 \rangle \\ D &= \langle 0 \;,\; -10 \rangle \end{aligned} \qquad \text{Resultante} = R$$

$$R = \langle 0 + 25.981 + 10 + 0 \;,\; 20 + 15 + 0 + (-10) \rangle$$

$$R = \langle 35.981 \;,\; 25 \rangle = 35.981\,i + 25j$$

4.1. La magnitud del radio

$$|\,R\,| = \sqrt{35.981^2 + 25^2} = 43.813\text{ m}$$

5. El ángulo será

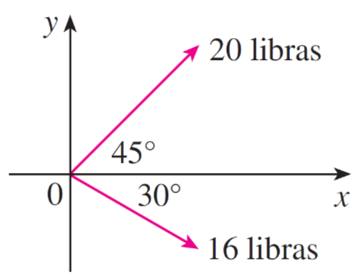
$$\tan\theta = \frac{25}{35.981} \quad \text{despejando } \theta \quad => \quad \theta = tan^{-1}\left(\frac{25}{35.981}\right) \;,\quad \theta = 34.792°$$

6. La respuesta será

$$43.813\text{ m} \;\; a \;\; 34.792°$$

Ejemplo 2

Encuentre la magnitud de la fuerza resultante y el ángulo que forma con el eje x positivo.



1. El problema nos da directamente el diagrama de fuerzas, se procede a obtener las componentes de cada uno de los vectores.

F_{20} = Vector de fuerza de 20 Libras ; F_{16} = Vector de fuerza de 16 libras

$$\text{sen}45° = \frac{\text{Cat. Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{F_{20y}}{|F_{20}|} = \frac{F_{20y}}{20} \qquad \cos 45° = \frac{\text{Cat. Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{F_{20x}}{|F_{20}|} = \frac{F_{20x}}{20}$$

$$20\,\text{sen}45° = F_{20y} \qquad 20\cos 45° = F_{20x}$$

$$14.142\text{ Lb} = F_{20y} \qquad 14.142\text{ Lb} = F_{20x}$$

$$\text{sen}30° = \frac{\text{Cat. Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{F_{16y}}{|F_{16}|} = \frac{F_{20y}}{16} \qquad \cos 30° = \frac{\text{Cat. Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{F_{16x}}{|F_{16}|} = \frac{F_{16x}}{16}$$

$$16\,\text{sen}30° = F_{16y} \qquad 16\cos 30° = F_{16x}$$

$$8\ \text{Lb} = F_{16y} \qquad\qquad 13.856\ \text{Lb} = F_{16x}$$

2. Resumiendo las componentes. Debe ver las direcciones de cada vector en el diagrama original y notar que el vector de 16 libras apunta hacia el eje y negativo, por tanto:

$$F_{20} = \langle 14.142\ ,\ 14.142 \rangle \qquad\qquad F_{16} = \langle 8\ ,\ -13.856 \rangle$$

3. La suma de ambos vectores será

$$\begin{array}{l} F_{20} = \langle 14.142\ ,\ 14.142 \rangle \\ \underline{F_{16} = \langle 8\ ,\ -13.856 \rangle} \end{array}$$

$$R = F_{20} + F_{16} = \langle 14.142 + 8\ ,\ 14.142 - 13.852 \rangle$$
$$R = \langle 22.142\ ,\ 0.29 \rangle$$

4. La magnitud del vector resultante y el ángulo de elevación será:

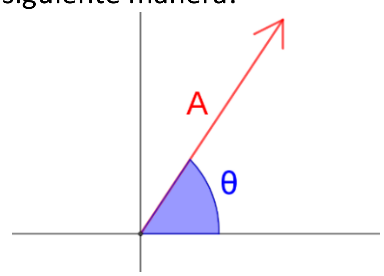
$$R = \sqrt{22.142^2 + 0.29^2} = 22.144\ \text{Lb} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.29}{22.142}\right) = 0.7504°$$

5. La respuesta será

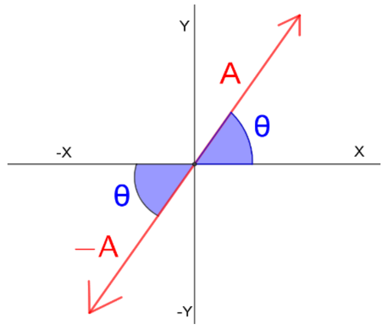
$$22.144\ \text{Lb} \qquad \theta = 0.7504°$$

En la resta de vectores, lo que se hace es invertir el vector de la siguiente manera:

1. Piense en un vector A como lo muestra la siguiente imagen



2. El vector $-A$ será sumándole al ángulo $180°$ al vector A o invirtiendo el vector.

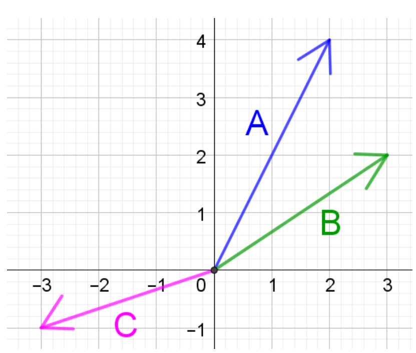


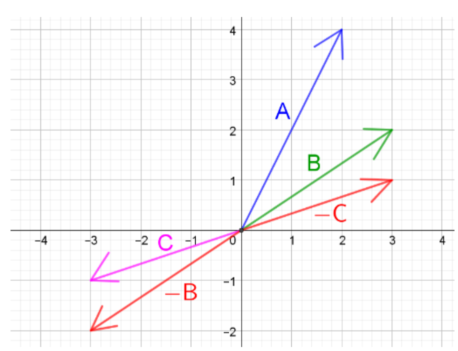
$$A = \langle\ A_x\ ,\ A_y\ ,\ A_z\ \rangle$$
$$-A = \langle\ -A_x\ ,\ -A_y\ ,\ -A_z\ \rangle$$

Ejemplo 1

El vector A esta dado por $\langle 2\ ,\ 4 \rangle$, el vector B $\langle 3\ ,\ 2 \rangle$ y el vector C $\langle -3\ , -1 \rangle$. Encuentre el vector resultante de $A - B - C$

1. Se traza el diagrama de vectores indicando cuáles son los negativos





2. Los nuevos vértices serán: A las componentes de los vectores se les invierte los signos, como se muestra a continuación

$$\begin{array}{lcl} A = \langle 2\,,4\rangle & \text{Nuevo vector} & A = \langle 2\,,4\rangle \\ B = \langle 3\,,2\rangle & \text{Nuevo vector} & B = \langle -3\,,-2\rangle \\ C = \langle -3\,,-1\rangle & \text{Nuevo vector} & C = \langle 3\;,\;\;1\rangle \end{array}$$

3. Se suman los vectores

$$\begin{array}{l} A = \langle 2\,,4\rangle \\ B = \langle -3\,,-2\rangle \\ C = \langle 3\;,\;\;1\rangle \\ \hline\hline \end{array}$$

$$R = \langle 2-3+3\;,\;\;4-2+1\rangle$$

$$R = \langle 2\;,\;\;3\rangle \qquad |R| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} = 3.606$$

4. El ángulo del vector resultante

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 56.31°$$

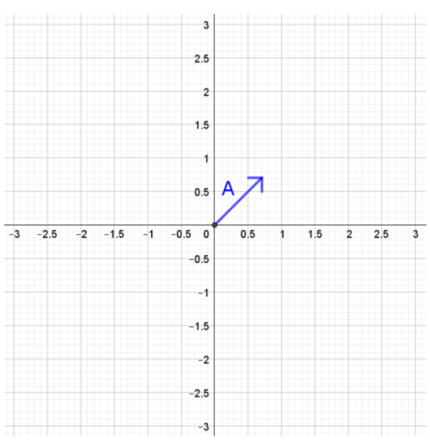
5. La respuesta será:

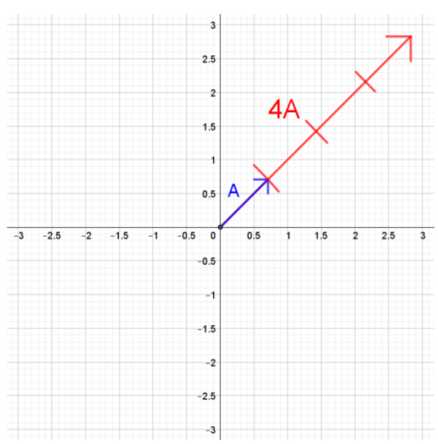
$$3.606\ \text{unidades a}\ \ 56.31°$$

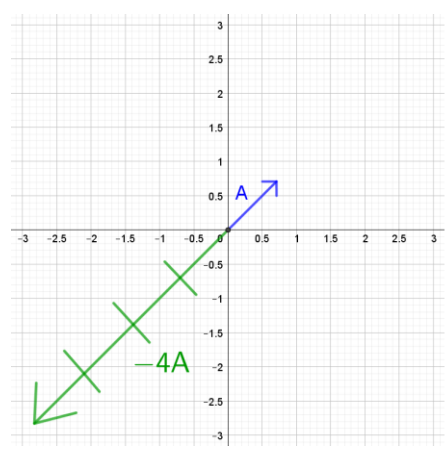
B. Multiplicación entre una constante y un vector

Se le llama producto de un vector por un escalar K (un número real) a un nuevo vector, cuya magnitud es igual a la multiplicación de la magnitud del vector por el escalar.

1. Piense en un vector de magnitud de A (Figura 1). Ese vector se multiplicará por un escalar 4 (Figura 2) y por último se multiplica por un escalar -4 (figura 3)



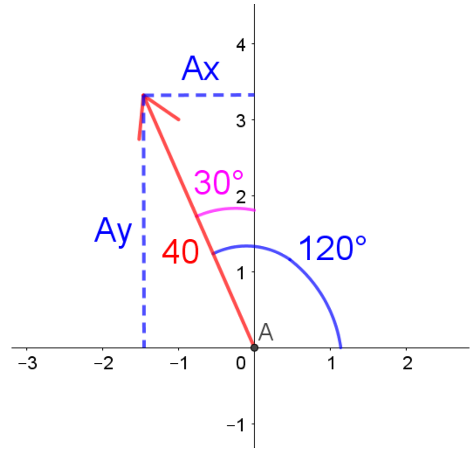




Como puede observar querido lector, un escalar puede cambiarle la dirección a un vector al igual que la resta.

Ejemplo 1

Encuentre las componentes del nuevo vector que es resultado de multiplicar al escalar 6 con el vector $40\text{ m a }120°$



1. Se encuentran las componentes del vector original

$$\text{sen}30° = \frac{A_x}{40} \qquad \cos 30° = \frac{A_y}{40}$$
$$40\ \text{sen}30° = A_x \qquad 40\cos 30° = A_y$$
$$20\text{ m} = A_x \qquad 34.641\text{m} = A_y$$

2. Viendo la dirección del vector, se plasma las componentes

$$A = \langle -20\ ,\ 34.641\rangle$$

3. El paso 1 y 2 se pueden resumir ingresando el ángulo de $120°$

$$40\cos 120° = A_x \qquad 40\ \text{sen}30° = A_y$$
$$-20\text{ m} = A_x \qquad 34.641\text{m} = A_y$$

4. Se multiplican las componentes del vector original por el escalar.

$$A = \langle -20\ ,\ 34.641\rangle$$
$$6\,A = 6\,\langle -20\ ,\ 34.641\rangle$$
$$6\,A = \langle -120\ ,\ 207.846\rangle$$

5. La respuesta será:

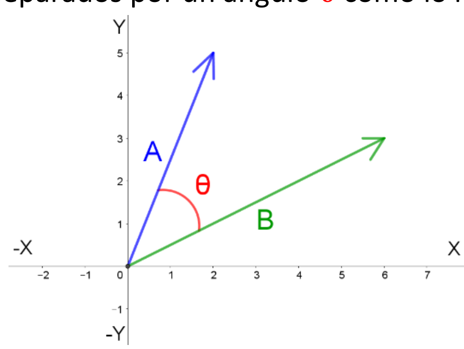
$$6\,A = \langle -120\ ,\ 207.846\rangle$$

C. Multiplicación entre vectores

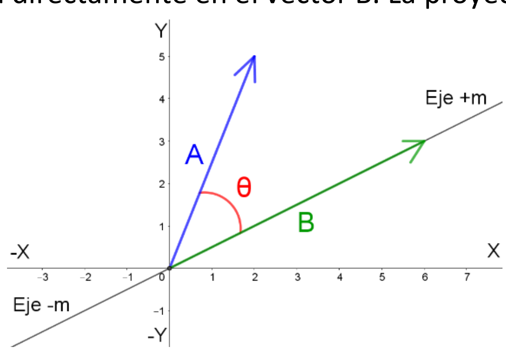
Producto punto (producto escalar)

Se le llama producto punto, pero preferentemente producto escalar a la multiplicación de dos vectores en donde el resultado será un número, de ahí su nombre “producto escalar”.

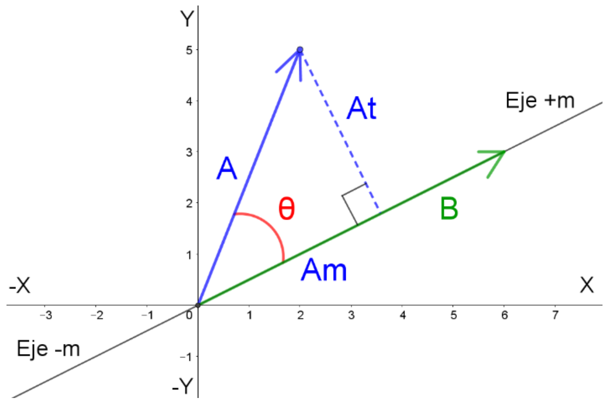
1. Piense en dos vectores A y B separados por un ángulo θ como lo muestra la siguiente gráfica.

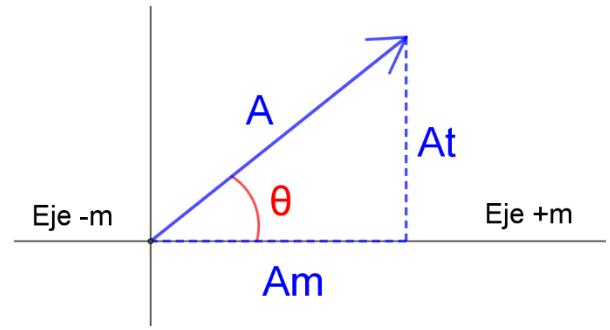


2. Piense en un eje m que pasa directamente en el vector B. La proyección de la componente del vector A en el eje m será



3. La proyección de la componente del vector A en el eje +m será:





4. La componente del vector A en el eje m positivo será:

$$\cos\theta = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{A_m}{A} \qquad \text{donde } A = \text{Magnitud vector A}$$

$$A\cos\theta = A_m$$

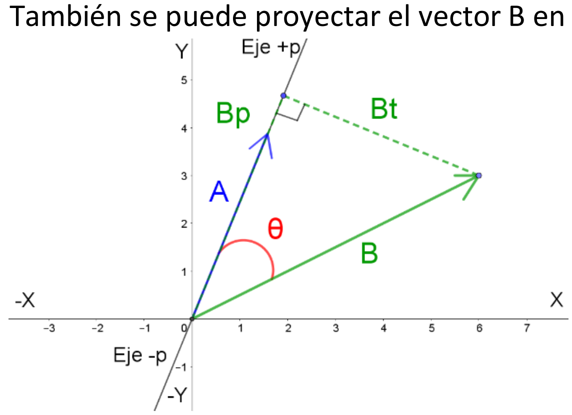
5. El producto punto es la multiplicación del vector B por el vector A_m
Se expresa el producto punto entre el vector A y el vector B como: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \text{Escalar}$

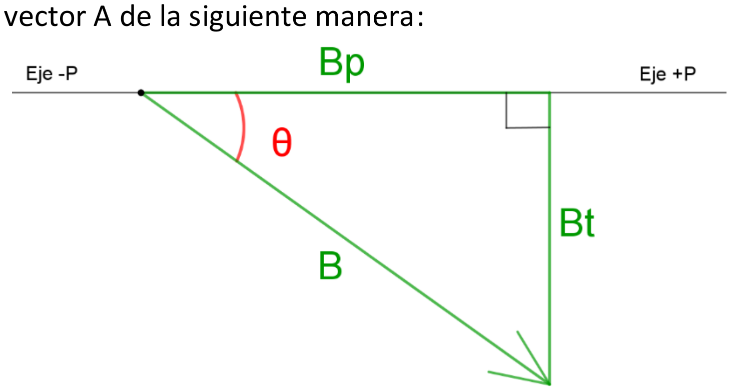
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_m \cdot B$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A\cos\theta \cdot B$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A\,B\,\cos\theta \qquad \text{A y B son la magnitud de A y B} \qquad \textbf{Ecuación 7.3.}$$

6. También se puede proyectar el vector B en el vector A de la siguiente manera:





7. La proyección de **B en el eje A es $\mathbf{B_p}$**, que le hemos llamado Eje +P será:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = B_p \cdot A \qquad \text{donde} \qquad \cos\theta = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{B_p}{B}$$

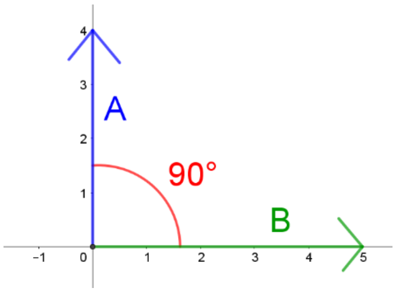
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = B\cos\theta\, A$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A\,B\,\cos\theta \qquad \text{A y B son la magnitud de A y B} \qquad \textbf{Ecuación 7.4.}$$

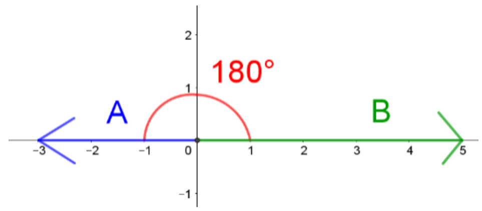
Note que el producto punto es proyectar un vector en otro vector y multiplicar esos valores que nos darán una constante. Entonces al ver las ecuaciones 7.3 y 7.4 decimos:

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A} = A\,B\,\mathrm{Cos}\theta \quad \text{Donde} \quad A \text{ y } B \text{ son la magnitudes}} \qquad \textbf{Ecuación 7.5}$$

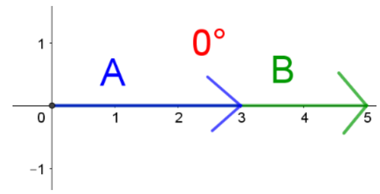
Conceptualizando



$$\overline{A}\cdot\overline{B} = A\,B\cos(90°)$$
$$\overline{A}\cdot\overline{B} = 0$$
No se puede proyectar A en B



$$\overline{A}\cdot\overline{B} = A\,B\cos(180°)$$
$$\overline{A}\cdot\overline{B} = -A\,B$$
Uno de ellos debe ir para otro lado



$$\overline{A}\cdot\overline{B} = A\,B\cos(0°)$$
$$\overline{A}\cdot\overline{B} = A\,B$$
No necesita ninguna proyección

El producto punto en componentes

1. Piense en dos vectores formados por:

$$\vec{A} = \langle A_x\,,\ A_y\,,\ A_z\rangle \qquad \vec{B} = \langle B_x\,,\ B_y\,,\ B_z\rangle$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x * B_x + A_y * B_y + A_z * B_z = A\,B\,\mathrm{Cos}\theta$$

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x * B_x + A_y * B_y + A_z * B_z} \qquad \textbf{Ecuación 7.6}$$

Ejemplo 1

Encuentre $a \cdot b$

$$a = \langle -2\ ,\ 3\rangle \quad b = \langle 0.7\ ,\ 12\rangle$$

1. Se aplica la ecuación 7.6

$$a\cdot b = (-2)(0.7) + (3)(12) = -1.4 + 36 = 34.6$$

2. La respuesta será

$$34.6$$

Ejemplo 2

Encuentre el ángulo entre los vectores

$$a = 4i - 3j + k \qquad b = 2i - k$$

1. Dejando los vectores en sus componentes

$$a = \langle 4\,, -3\,,\ 1\rangle \quad b = \langle 2\,,\ 0\ , -1\rangle$$

2. Obteniendo la magnitud de cada vector

$$|a| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{26} \qquad |b| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

3. Utilizando la ecuación 7.6 para obtener el producto punto

$$a\cdot b = (4)(2) + (-3)(0) + (1)(-1) = 8 + 0 - 1 = 7$$

4. Se utiliza la ecuación 7.5

$$a \cdot b = |a|\ |b| \cos\theta$$

$$7 = \sqrt{26} * \sqrt{5} \cos\theta$$

$$\frac{7}{\sqrt{26}\sqrt{5}} = \cos\theta \qquad \text{despejando coseno}$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{26}\sqrt{5}}\right) = \theta \qquad \text{despejando para el ángulo}$$

$$\theta = 52.125°$$

Ejemplo 3

Encuentre el ángulo agudo entre las rectas: $x + 2y = 7 \quad , \quad 5x - y = 2$

1. Se trazan las gráficas encontrando puntos de intersección, raíces e interceptos en el eje y. Luego se transforman esos puntos en vectores

$$y = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x \qquad\qquad y = 5x - 2$$

$$\text{(igualando)} \quad \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x = 5x - 2 \quad => \quad 7 - x = 10x - 4 \quad => \quad 11 = 11x$$

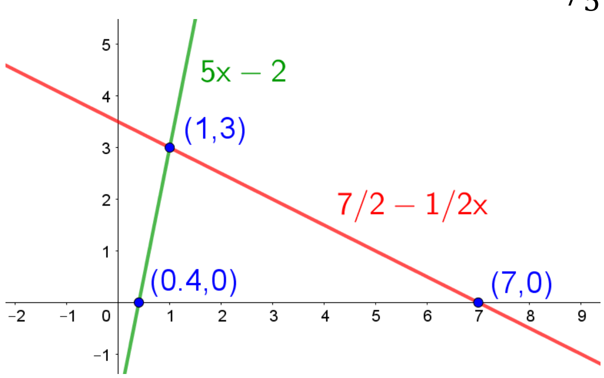
$$x = 1 \quad \text{El punto será:} \quad (1\,,3)$$

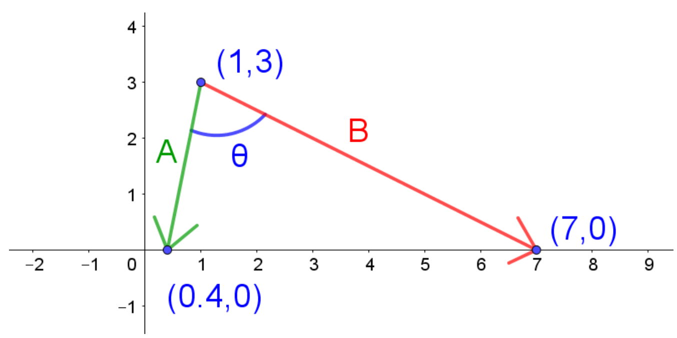
$$y = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x \qquad\qquad y = 5x - 2$$

$$0 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x \qquad\qquad 0 = 5x - 2$$

$$0 = 7 - x \qquad\qquad 2 = 5x$$

$$x = 7 \qquad\qquad {}^{2}/_{5} = x$$





2. Se encuentran los vectores A y B utilizando el sentido (flecha) de cada vector. Ambas flechas deben salir del mismo punto y por eso se toma ese sentido de los vectores.

$$A = \langle 0.4 - 1\ ,\ 0 - 3 \rangle \qquad B = \langle 7 - 1\ ,\ 0 - 3 \rangle$$
$$A = \langle -0.6\ , -3 \rangle \qquad B = \langle 6\ , -3 \rangle$$

3. Se encuentra la magnitud de cada vector

$$|\,A\,| = \sqrt{(-0.6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9.36} \qquad |\,B\,| = \sqrt{(6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{45}$$

4. Se encuentra el producto punto de ambos vectores

$$A = \langle -0.6 \ , -3 \rangle \qquad\qquad B = \langle 6 \ , -3 \rangle$$

$$A \cdot B = (-0.6)(6) + (-3)(-3) = -3.6 + 9 = 5.4$$

5. Utilizando la ecuación 7.6

$$A \cdot B = |\,A\,|\,|\,B\,| \cos\theta$$

$$5.4 = \sqrt{9.36}\,\sqrt{45}\,\cos\theta$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5.4}{\sqrt{9.36}\,\sqrt{45}}\right) = 74.745°$$

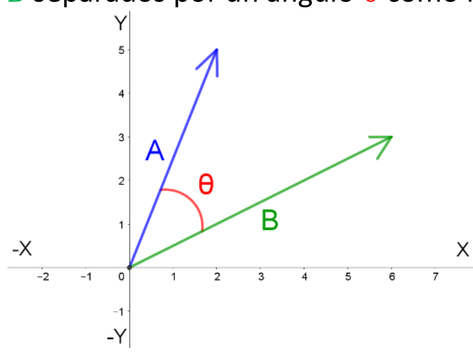
6. La respuesta será:

$$\theta = 74.745°$$

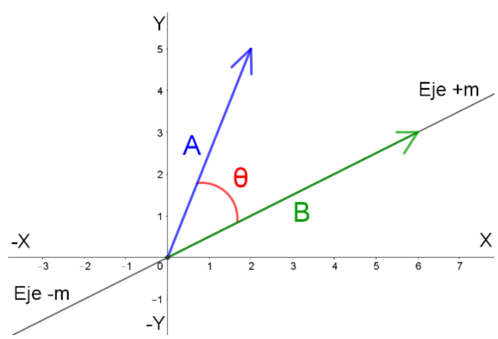
Producto cruz (producto vectorial)

Se le llama producto cruz o producto vectorial a la multiplicación especial de dos vectores, en donde el resultado será otro vector, a diferencia del producto punto que el resultado era una constante.

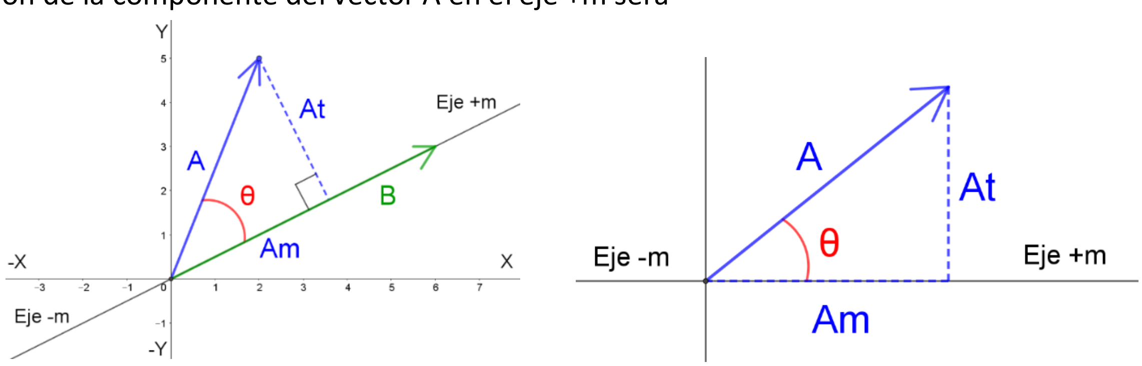
1. Piense en dos vectores A y B separados por un ángulo θ como lo muestra la siguiente gráfica:



2. Piense en un eje m que pasa directamente en el vector B. La proyección de la componente del vector A en el eje m será:



3. La proyección de la componente del vector A en el eje +m será



4. La componente perpendicular (a noventa grados) del vector B en el eje m positivo será:

$$\text{sen}\theta = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{A_t}{A} \qquad \text{Despejando: } A_t \quad => \quad A_t = A\,\text{sen}\theta$$

5. La multiplicación especial llamada producto cruz o producto punto entre el vector A y el vector B es la multiplicación entre la componente A_t y el vector B.

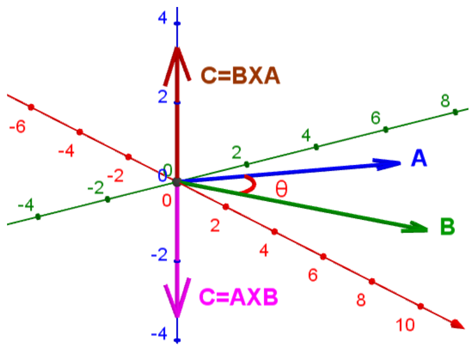
$$\vec{A}\ \text{X}\ \vec{B} = A_t * B \qquad \text{Donde At y B son magnitudes}$$

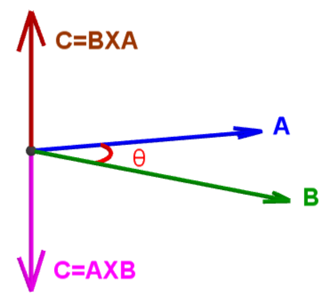
$$\vec{A}\ \text{X}\ \vec{B} = A\,\text{sen}\theta * B \qquad \text{Donde At y B son magnitudes}$$

$$\vec{A}\ \text{X}\ \vec{B} = A\,B\,\text{sen}\theta \qquad \text{Donde A y B son las magnitudes de los vectores}$$

6. **¿Qué representa gráficamente esa multiplicación?**
   De esa multiplicación se obtiene un nuevo vector llamado C

$$\vec{C} = \vec{A}\ \text{X}\ \vec{B}$$





- El vector **C** será un vector a 90° del plano que une a los vectores A y B
- La dirección del vector **C** depende del orden de la multiplicación de los vectores, ya que no es lo mismo decir: AXB que BXA

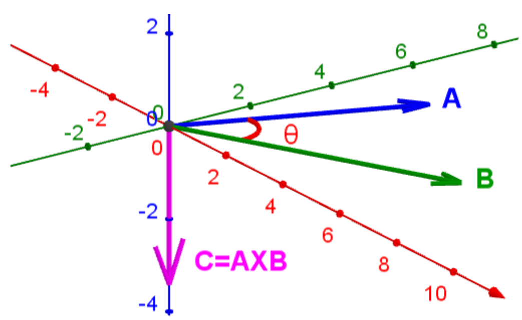
$$AXB \neq BXA \qquad \text{(Ver la prueba de la mano derecha)}$$

- La magnitud del vector C será igual a

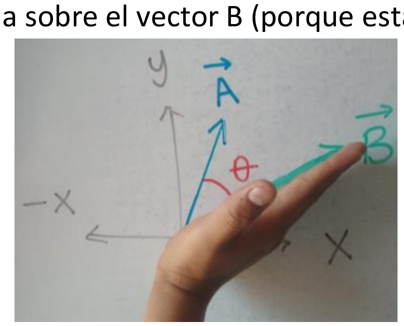
$$C = A\,B\,\text{sen}\theta$$

7. **Prueba de la mano derecha**
   La prueba de la mano derecha se utiliza para saber la dirección del vector C, conociendo el orden de la multiplicación

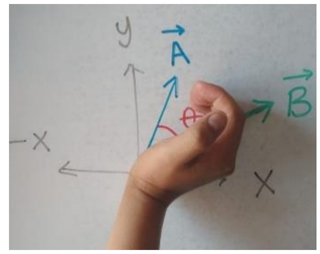
7.1. Piense en el vector BXA



7.2. Coloca su mano derecha sobre el vector B (porque está multiplicando primero)

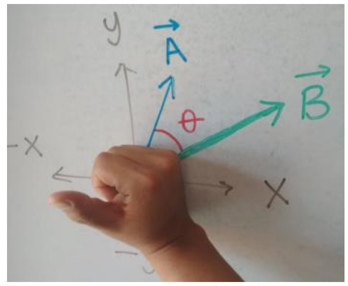


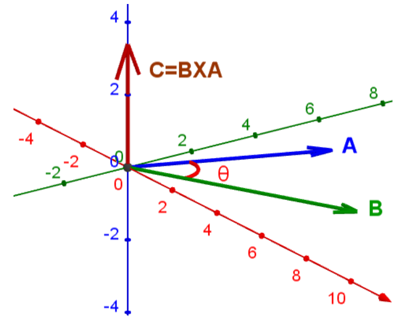
7.3. Cierre su mano en dirección al vector A.



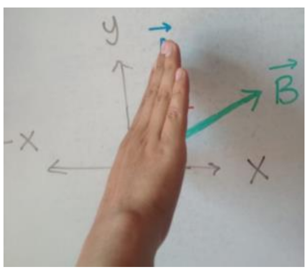
7.4. Note que, al cerrar completamente el puño, su dedo gordo apunta hacia arriba o fuera de la pizarra (el eje z positivo)

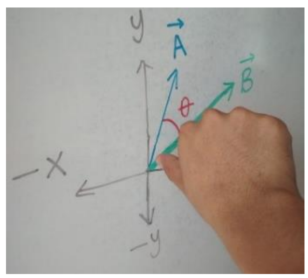
El dedo gordo apunta hacia la dirección del vector C

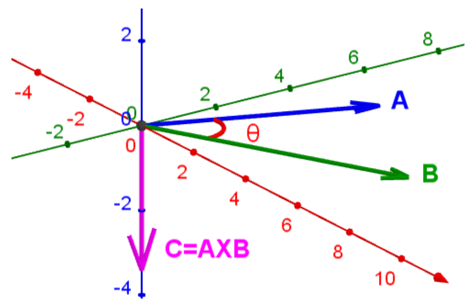




7.5. Lo mismo sucedería con el vector AXB, al hacerlo notaria que el dedo gordo apuntaría hacia dentro del pizarrón (eje z negativo)







8. Por tanto, se dice que:

$$\boxed{\vec{A}\ X\ \vec{B} = A\,B\,\text{sen}\theta}$$ **Ecuación 7.7**

$$\boxed{\vec{A}\ X\ \vec{B} = -\vec{B}\ X\ \vec{A}}$$ **Ecuación 7.8**

El producto cruz en componentes

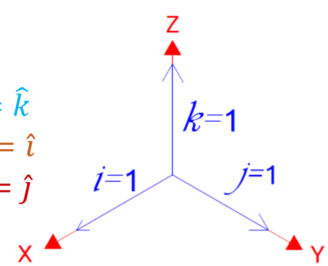
¿de dónde se obtiene la fórmula?

1. Con la prueba de la mano derecha y tomando la ecuación 7.8 decimos

$\hat{\imath}\ X\ \hat{\imath} = (1)(1)\text{sen}(0) = 0$ $\quad \hat{\imath}\ X\ \hat{\jmath} = (1)(1)\text{sen}(90) = 1$ mano derecha $\hat{\imath}\ X\ \hat{\jmath} = \hat{k}$

$\hat{\jmath}\ X\ \hat{\jmath} = (1)(1)\text{sen}(0) = 0$ $\quad \hat{\jmath}\ X\ \hat{k} = (1)(1)\text{sen}(90) = 1$ mano derecha $\hat{\jmath}\ X\ \hat{k} = \hat{\imath}$

$\hat{k}\ X\ \hat{k} = (1)(1)\text{sen}(0) = 0$ $\quad \hat{k}\ X\ \hat{\imath} = (1)(1)\text{sen}(90) = 1$ mano derecha $\hat{k}\ X\ \hat{\imath} = \hat{\jmath}$



2. Piense en dos vectores formados por:

$$\vec{A} = \langle A_x,\ A_y,\ A_z\rangle \qquad \vec{B} = \langle B_x,\ B_y,\ B_z\rangle$$

2.1. Se multiplica cada componente de A con cada componente de B.

$$C = \vec{A}\ X\ \vec{B} = \langle C_x,\ C_y,\ C_z\rangle$$

$$\vec{A}\ X\ \vec{B} = A_xXB_x + A_xXB_y + A_xXB_z + A_yXB_x + A_yXB_y + A_yXB_z + A_zXB_x + A_zXB_y + A_zXB_z$$

En base al paso 1. $A_xXB_x = 0$ (porque $iXi = 0$) Así como: $A_xXB_y = (A_xB_y)\hat{k}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \cancel{A_x X B_x} + A_x X B_y + A_x X B_z + A_y X B_x + \cancel{A_y X B_y} + A_y X B_z + A_z X B_x + A_z X B_y + \cancel{A_z X B_z}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = 0 + (A_x B_y)\hat{k} + (A_x B_z) - \hat{j} + (A_y B_x) - \hat{k} + 0 + (A_y B_z)\hat{\imath} + (A_z B_x)\hat{j} + (A_z B_y) - \hat{\imath} + 0$$

2.2. Sumando términos semejantes de los ejes.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \langle A_y B_z - A_z B_y \ , -A_x B_z + A_z B_x \ , A_x B_y - A_y B_x \rangle$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \langle A_y B_z - A_z B_y \ , -(A_x B_z - A_z B_x) \ , A_x B_y - A_y B_x \rangle$$

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = \langle A_y B_z - A_z B_y \ , -(A_x B_z - A_z B_x) \ , A_x B_y - A_y B_x \rangle} \qquad \textbf{Ecuación 7.9}$$

Ejemplo 1

Dados: a = $i + 2j - 2k$, b = $4i - 3k$. Hallar el producto vectorial a x b , |axb| , b x a y |bxa|

1. Se representan los vectores en forma de sus componentes.

$$a = \langle 1 , \ 2 \ , -2 \rangle \qquad b = \langle 4 , \ 0 \ , -3 \rangle$$

2. Se utiliza la ecuación 7.9 para encontrar el producto cruz.

$$a = \langle 1 , \ 2 \ , -2 \rangle$$
$$b = \langle 4 , \ 0 \ , -3 \rangle$$
$$a \times b = \langle (2 * -3) - (-2 * 0) \ , \ -[(1 * -3) - (-2 * 4)] \ , \ (1 * 0) - (2 * 4) \rangle$$
$$a \times b = \langle -6 - 0 \ , \ -[-3 + 8] \ , \ 0 - 8 \rangle$$
$$a \times b = \langle -6 \ , \ -5 \ , \ -8 \rangle$$

3. Encontrando la magnitud del vector axb

$$|\, axb \,| = \sqrt{(-6)^2 + (-5)^2 + (-8)^2} = \sqrt{125} = 11.1803$$

4. Se encuentra el vector b x a

$$b = \langle 4 , \ 0 \ , -3 \rangle$$
$$a = \langle 1 , \ 2 \ , -2 \rangle$$
$$b \times a = \langle (0 * -2) - (-3 * 2) \ , \ -[(4 * -2) - (-3 * 1)] \ , \ (4 * 2) - (0 * 1) \rangle$$
$$b \times a = \langle 0 + 6 \ , \ -[-8 + 3] \ , \ 8 - 0 \rangle$$
$$b \times a = \langle 6 \ , \ 5 \ , \ 8 \rangle$$

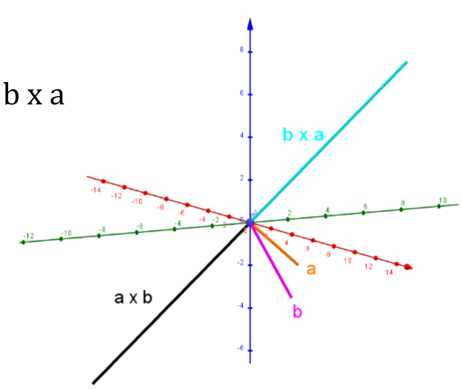
Comprobando la ecuación 7.8

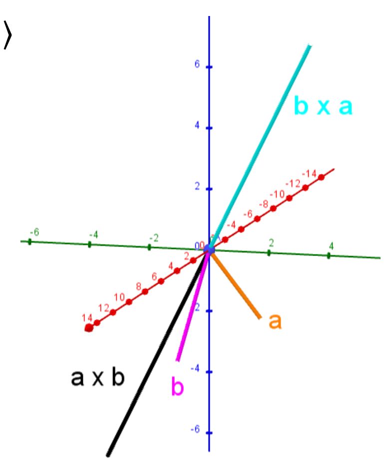
$$a \times b = -b \times a$$

5. La magnitud del vector b x a

$$|\, bxa \,| = \sqrt{(6)^2 + (5)^2 + (8)^2}$$

$$|\, bxa \,| = \sqrt{125} = 11.1803$$





Ejemplo 2

Encuentre un vector unitario que es ortogonal a: $\mathrm{a} = i + j$ e $\mathrm{b} = \mathrm{i} + \mathrm{k}$

1. Se busca un vector que sea a 90 grados del vector a y el vector b (ortogonal)

2. Se pasa a la forma de sus componentes

$$\mathrm{a} = \langle 1 \ , \ 1 \ , \ 0 \rangle \qquad \mathrm{b} = \langle 1 \ , \ 0 \ , \ 1 \rangle$$

3. Se multiplica por el producto cruz para obtener el vector ortogonal al plano de ambos vectores

$$\mathrm{a} = \langle 1 \ , \ 1 \ , \ 0 \rangle$$
$$\mathrm{b} = \langle 1 \ , \ 0 \ , \ 1 \rangle$$
$$\mathrm{a \, x \, b} = \langle (1)(1) - (0)(0) \ , \ -[(1)(1) - (0)(1)] \ , \ (1)(0) - (1)(1) \rangle$$
$$\mathrm{a \, x \, b} = \langle 1 \ , \ -1 \ , -1 \rangle$$

4. Se encuentra la magnitud del vector a x b

$$|\,\mathrm{axb}\,| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

5. El vector unitario a x b será

$$\mathrm{u_{axb}} = \frac{\mathrm{axb}}{|\,\mathrm{axb}\,|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle 1 \ , \ -1 \ , -1 \rangle$$

6. También existe otro vector unitario, siendo el producto cruz de b x a

$$\mathrm{b \, x \, a} = \langle -1 \ , \ 1 \ , 1 \rangle \qquad \text{se obtiene con: } \ \mathrm{b \, x \, a} = -\,\mathrm{a \, x \, b}$$

7. El vector unitario b x a será

$$\mathrm{u_{bxa}} = \frac{\mathrm{bxa}}{|\,\mathrm{bxa}\,|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle -1 \ , \ 1 \ , 1 \rangle$$

8. Siendo la respuesta:

$$\mathrm{u_{axb}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle 1 \ , \ -1 \ , -1 \rangle \quad \text{o} \quad \mathrm{u_{bxa}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle -1 \ , \ 1 \ , 1 \rangle$$

Ejemplo 3

Encuentre el ángulo entre los vectores

$$\mathrm{a} = 4i - 3j + k \qquad \mathrm{b} = 2i - k$$

1. Se puede obtener por producto punto y por producto cruz. En este ejemplo se conceptualizará por el producto cruz, se obtiene su forma de componentes.

$$\mathrm{a} = \langle 4 \ , -3 \ , \ 1 \rangle \qquad \mathrm{b} = \langle 2 \ , \ 0 \ , -1 \rangle$$

2. Se obtiene el producto cruz entre ambos vectores

$$\mathrm{a} = \langle 4 \ , -3 \ , \ 1 \rangle$$
$$\mathrm{b} = \langle 2 \ , \ 0 \ , -1 \rangle$$
$$\mathrm{a \, x \, b} = \langle (-3 * -1) - (1 * 0) \ , -[(4 * -1) - (1 * 2)] \ , (4 * 0) - (-3 * 2) \rangle$$
$$\mathrm{a \, x \, b} = \langle 3 - 0 \ , -[-4 - 2] \ , \ 0 + 6 \rangle$$
$$\mathrm{a \, x \, b} = \langle 3 \ , 6 \ , \ 6 \rangle$$

3. Obteniendo la magnitud del vector a x b

$$|\mathrm{a \, x \, b}| = \sqrt{3^2 + (6)^2 + (6)^2} = \sqrt{81} = 9$$

4. Obteniendo la magnitud del vector a y del vector b

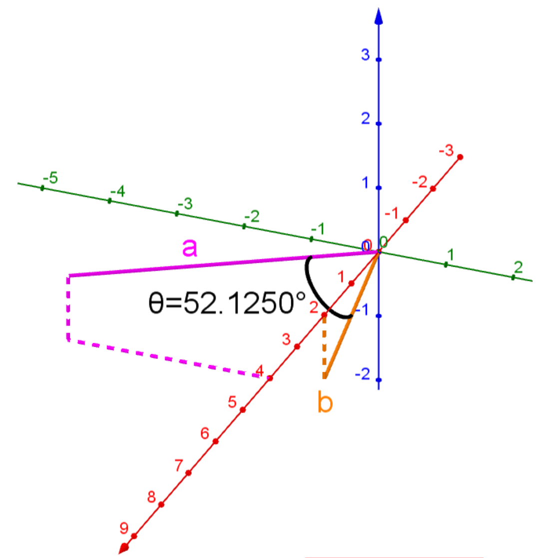
$$|a| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{16 + 9 + 1} = \sqrt{26}$$
$$|b| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 0 + 1} = \sqrt{5}$$

5. Utilizando la ecuación 7.7.

$$|a \times b| = |a|\ |b|\ \text{sen}\theta$$
$$9 = \sqrt{26}\ \sqrt{5}\ \text{sen}\theta$$
$$\frac{9}{\sqrt{26}\ \sqrt{5}} = \text{sen}\theta \quad => \quad \text{sen}^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{26}\ \sqrt{5}}\right) = \theta$$

6. La respuesta será

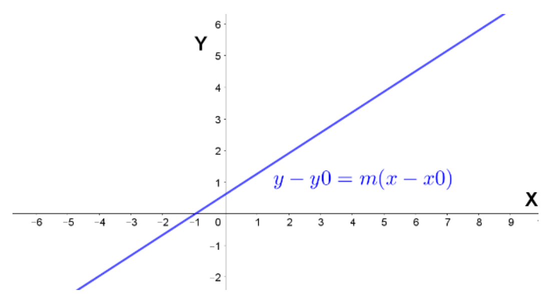
$$\theta = 52.1250°$$



NOTA: Recuerde que, si desea un resultado escalar, entonces utiliza el producto punto. Si desea como resultado un vector, entonces producto cruz. En la siguiente sección de este capítulo se verán las aplicaciones físicas de vectores.

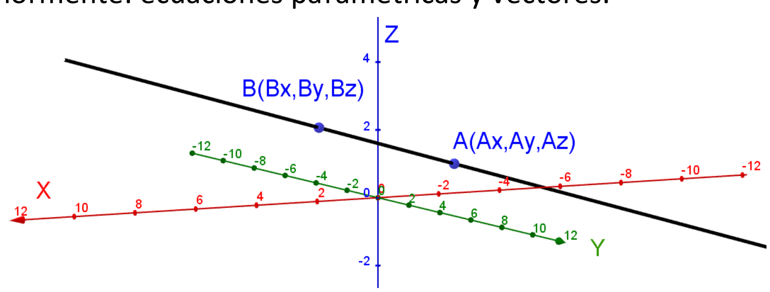
7.4. Ecuaciones de rectas

Para encontrar una recta en un sistema bidimensional se necesitaba tener dos puntos coordenados para utilizar su ecuación:



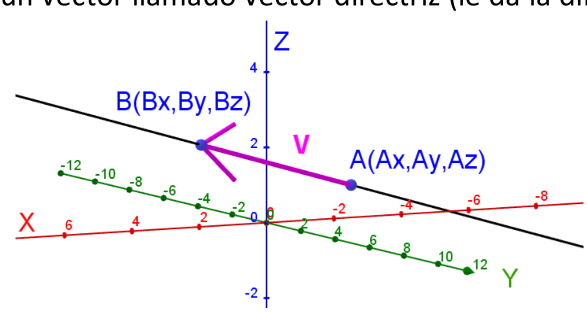
Para el sistema tridimensional se utiliza nuevamente dos puntos, pero para modelar la ecuación de la recta se utilizan dos temas vistos anteriormente: ecuaciones paramétricas y vectores.

1. Piense en la recta tridimensional



2. Teniendo ambos puntos se puede obtener un vector llamado vector directriz (le da la dirección a la recta)

$$\bar{v} = \langle B_x - A_x\ , B_y - A_y\ ,\ \ B_z - A_z \rangle$$

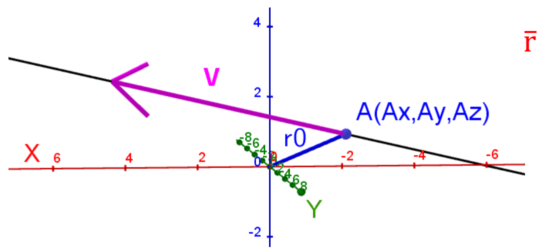


3. El vector directriz es como la pendiente de una recta en dos dimensiones. Ahora si necesitara un punto de inicio, se tomará el punto A

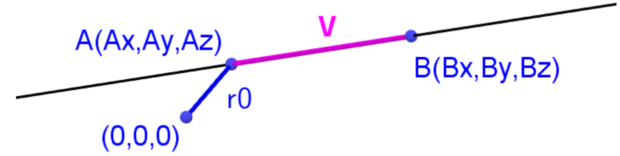
$$\overline{r_0} = \langle A_x \ , \ A_y \ , \ A_z \rangle$$

4. Teniendo la directriz del vector y un punto inicial se plantea la ecuación de la recta en términos de un parámetro t (tomado como una constante que multiplica al vector directriz)

$$\text{recta} = \bar{r} \qquad \text{donde } \bar{r} \text{ es un vector}$$
$$\text{recta} = \text{Posición inicial} + \text{parámetro} * \text{vector directriz}$$



$$\bar{r} = \bar{r_0} + t\,\bar{v}$$



$$\bar{r} = \langle A_x \, , \ A_y \, , \ A_z \rangle + t \,\langle B_x - A_x \ , B_y - A_y \ , \ B_z - A_z \rangle$$
$$\bar{r} = \langle A_x \, , \ A_y \, , \ A_z \rangle + \langle t\,(B_x - A_x) \ , t(B_y - A_y) \ , \ t\,(B_z - A_z) \rangle$$
$$\bar{r} = \langle A_x + \ t\,(B_x - A_x) \, , \ A_y + \ t(B_y - A_y) \, , \ A_z + t\,(B_z - A_z) \rangle$$

$$\boxed{\bar{r} = \langle A_x + \ t\,(B_x - A_x) \, , \ A_y + \ t(B_y - A_y) \, , \ A_z + t\,(B_z - A_z) \rangle} \qquad \textbf{Ecuación 7.10}$$

Donde t es el dato cambiante como un parámetro (ver capítulo 3 de este libro) dado su dominio por un número real (entero, fracción e irracional)

5. A menudo, los textos presentan el vector de la recta como

$$a = B_x - A_x \quad ; \quad b = B_y - A_y \quad ; \quad c = B_z - A_z$$
$$A_x = x_0 \quad ; \quad A_y = y_0 \quad ; \quad A_z = z_0$$

6. Sustituyendo en la ecuación 7.10

$$\bar{r} = \langle A_x + \ t\,(B_x - A_x) \, , \ A_y + \ t(B_y - A_y) \, , \ A_z + t\,(B_z - A_z) \rangle$$
$$\bar{r} = \langle x_0 + t\,a \ , \ y_0 + t\,b \ , \ z_0 + t\,c \rangle$$

$$\boxed{\bar{r} = \langle x_0 + a\,t \ , \ y_0 + b\,t \ , \ z_0 + c\,t \rangle} \qquad \textbf{Ecuación 7.11}$$

La dirección de la recta no importa, sino la recta y su tamaño de trazo que se definirá por el intervalo t

Como $\bar{r}$ es un vector con coordenadas $\langle \, x(\mathrm{t}) \, , \ y(t) \ , \ z(t) \, \rangle$

7. Otra forma de expresar una recta de forma paramétrica es:

$$x = x_0 + at \quad ; \quad y = y_0 + bt \quad ; \quad z = z_0 + ct$$

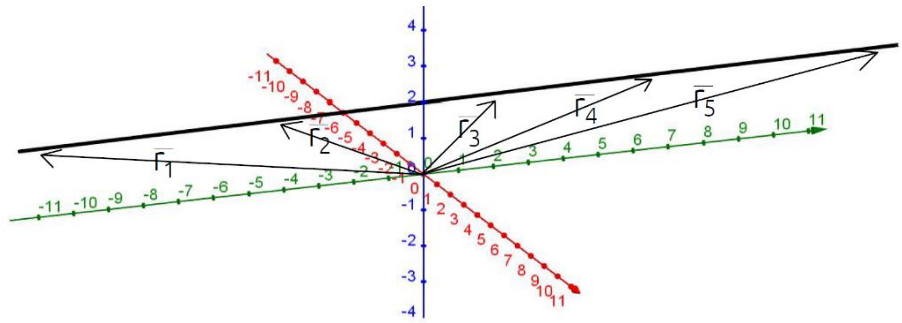
8. Despejando para t en cada ecuación

$$\frac{x - x_0}{a} = t \quad ; \quad \frac{y - y_0}{b} = t \quad ; \quad \frac{z - z_0}{c} = t$$

9. Como t es el mismo parámetro, se tiene:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t} \qquad \textbf{Ecuación 7.12}$$

La ecuación 7.12 se utiliza para obtener las ecuaciones simétricas. Conceptualizando, la ecuación de una recta está dada por una ecuación paramétrica que al ingresar distintos valores de t le va dando distintos tipos de vectores que al unirlos grafican una recta.



Ejemplo 1

Encuentre una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por $\mathrm{A}(2{,}4{,}3)$ y $\mathrm{B}(\,3\,,2\,,1\,)$. Luego trace la gráfica de la recta y analícela.

1. Se procede a obtener la pendiente de dicha recta, encontrando sus vectores directores

$$\hat{\mathrm{v}} = \langle a\,,b,c\rangle = \langle 3-2\ ,\ 2-4\ ,\ 1-3\rangle = \langle\,1\,,\ -2\,,\ -2\rangle$$

$$a = 1 \quad ; \quad b = -2 \quad c = -2$$

2. La ecuación de la recta vectorial estará dada por:

$$\text{Tomando el punto inicial como A }(2{,}4{,}3)\quad x_0 = 2\ ;\ y_0 = 4\ ;\ z_0 = 3$$

$$\hat{r} = \langle 2 + 1 * t\,,\ 4 - 2 * t\,,\ 3 - 2 * t\rangle$$

$$\hat{r} = \langle 2 + t\,,\ 4 - 2t\,,\ 3 - 2t\rangle$$

3. La recta expresada de forma paramétrica será:

$$x = 2 + t \quad ; \quad y = 4 - 2t \quad ; \quad z = 3 - 2t$$

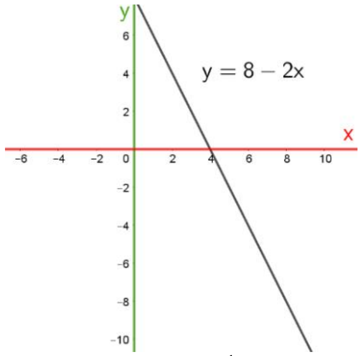
4. Las ecuaciones simétricas serán (utilizando la ecuación 7.12)

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t$$

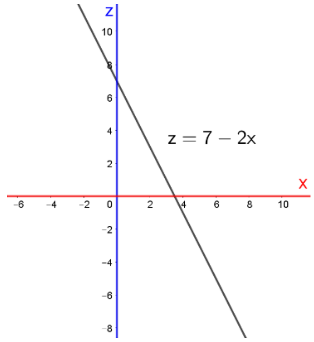
$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 4}{-2} = \frac{z - 3}{-2} = t$$

$$x - 2 = -\frac{1}{2}y + 2 = -\frac{1}{2}\,z + \frac{3}{2}$$

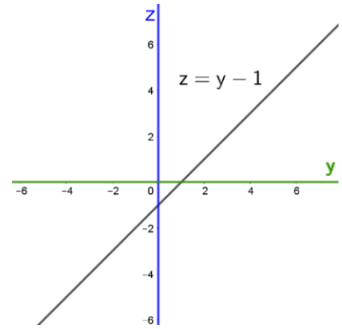
Estas relaciones se utilizan para graficar las vistas del isométrico que es la recta. También se utiliza para encontrar puntos en caso de que se diga, cuanto es x y y si z =0



$$x - 2 = -\frac{1}{2}y + 2$$

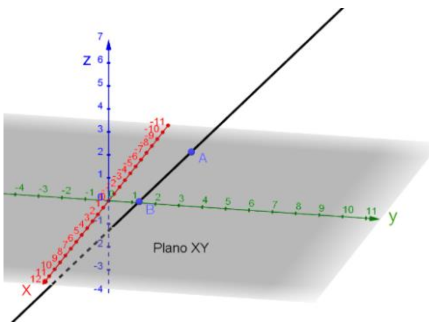


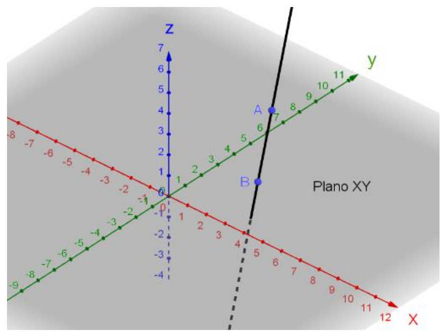
$$x - 2 = -\frac{1}{2}\,z + \frac{3}{2}$$

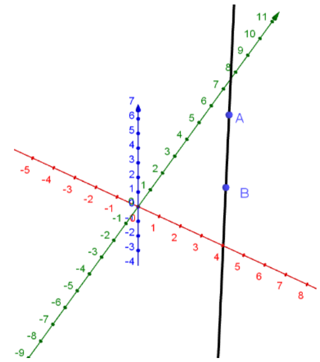


$$-\frac{1}{2}y + 2 \;=\; -\frac{1}{2}\,z + \frac{3}{2}$$

5. La recta como isométrico será:







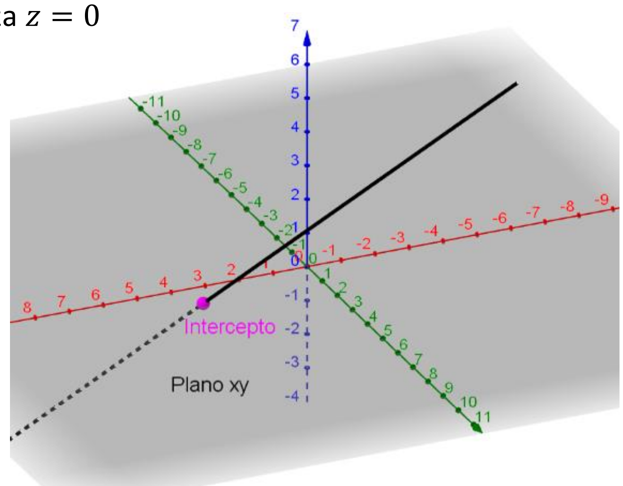
6. Para encontrar el intercepto en el plano xy se utiliza $z = 0$

$$x - 2 \;=\; -\frac{1}{2}y + 2 \;=\; -\frac{1}{2}\,z + \frac{3}{2}$$

$$x - 2 \;=\; -\frac{1}{2}y + 2 \;=\; -\frac{1}{2}\,(0) + \frac{3}{2}$$

$$x - 2 \;=\; -\frac{1}{2}y + 2 \;=\; \frac{3}{2}$$

- $x - 2 = \frac{3}{2} \qquad => \qquad x = \frac{7}{2}$
- $-\frac{1}{2}y + 2 = \frac{3}{2} \qquad => \qquad y = 1$



$$\text{Intercepto} = \left(\frac{7}{2}\,, 1\,, 0\right)$$

También se pudo haber resuelto el paso 6 con la respuesta del paso 3, utilizando el parámetro t

Ejemplo 2

La recta que pasa por $(-2\,,4{,}0\,)$ y $(\,1{,}1{,}1\,)$, ¿Es perpendicular a la recta que pasa por $(2\,,3{,}4)$ y $(3, -1\,, -8)$?

1. El vector directriz de la recta 1 (lo que llamamos pendiente en este texto) será:

$$\hat{v}_1 \;=\; \langle 1 - (-2), 1 - 4\,, 1 - 0\rangle \;=\; \langle 3\,, -3\,, 1\rangle$$

2. El vector directriz de la recta 2 será

$$\hat{v}_2 \;=\; \langle 3 - 2\,, -1 - 3\,, -8 - 4\rangle \;=\; \langle 1\,, -4\,, -12\rangle$$

3. Si son perpendiculares debería haber 90 grados entre ambas rectas. Para ello nos auxiliamos del producto punto, para averiguar cuántos grados hay entre $\hat{v}_1$ y $\hat{v}_2$

3.1. La magnitud de $\hat{v}_1$ y $\hat{v}_2$

$$|\hat{v}_1| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{19} \qquad |\hat{v}_2| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-12)^2} = \sqrt{161}$$

3.2. El producto punto entre ambos vectores

$$\hat{v}_1 = \langle 3\,, -3\,, 1\rangle$$
$$\hat{v}_2 = \langle 1\,, -4\,, -12\rangle$$
$$\hat{v}_1 \cdot \hat{v}_2 = (3)(1) + (-3)(-4) + (1)(-12) = 3 + 12 - 12 = 3$$

4. Comprobando el ángulo

$$\hat{v}_1 \cdot \hat{v}_2 = |\hat{v}_1|\,|\hat{v}_2| \cos\theta$$
$$3 = \sqrt{19}\,\sqrt{161}\,\cos\theta$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{19}\,\sqrt{161}}\right) = 86.8906° \qquad \text{(No son perpendiculares)}$$

NOTA: Aunque las rectas no se intersectan, con los vectores directrices se pueden obtener los ángulos entre las rectas.

Ejemplo 3

La recta que pasa por $(-4\,,-6\,,1)$ y $(-2\,,0\,,-3)$, ¿Es paralela a la recta que pasa por $(10\,,\ 18\,,4)$ y $(5\,,3\,,\ 14)$?

1. El vector directriz de la recta 1 (lo que llamamos pendiente en este texto) será:

$$\hat{v}_1 = \langle -2-(-4)\,, 0-(-6)\,, -3-1\rangle = \langle 2\,,\ 6\,, -4\rangle$$

2. El vector directriz de la recta 2 será

$$\hat{v}_2 = \langle 5-10\,,\ 3-18\,, 14-4\rangle = \langle -5\,, -15\,, 10\rangle$$

3. La magnitud de $\hat{v}_1$ y $\hat{v}_2$

$$|\hat{v}_1| = \sqrt{2^2 + 6^2 + (-4)^2} = \sqrt{56} \qquad |\hat{v}_2| = \sqrt{(-5)^2 + (-15)^2 + (10)^2} = \sqrt{350}$$

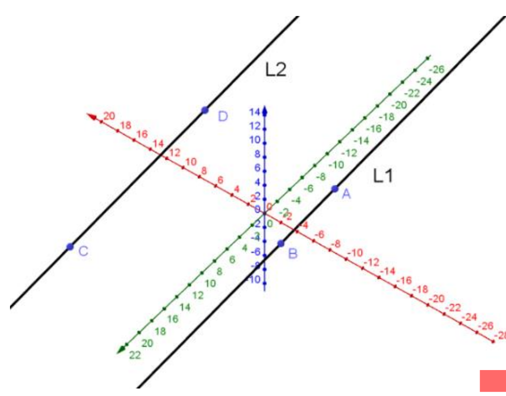
4. El producto punto entre ambos vectores será:

$$\hat{v}_1 = \langle 2\,,\ 6\,, -4\rangle$$
$$\hat{v}_2 = \langle -5\,, -15\,, 10\rangle$$
$$\hat{v}_1 \cdot \hat{v}_2 = (2)(-5) + (6)(-15) + (-4)(10) = -10 - 90 - 40 = -140$$

5. Comprobando el ángulo

$$\hat{v}_1 \cdot \hat{v}_2 = |\hat{v}_1|\,|\hat{v}_2| \cos\theta$$
$$-140 = \sqrt{56}\,\sqrt{350}\,\cos\theta$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-140}{\sqrt{56}\,\sqrt{350}}\right) = \cos^{-1}(-1) = 180°$$

Comprobando que las rectas son paralelas.



Ejemplo 4

Dibujar y obtener las ecuaciones paramétricas y simétricas de: La recta que pasa por $(0\,,1\,,4)$ y es perpendicular a $\mathrm{v}_1 = \langle 2\,,-5\,,1\rangle\ ,\ \mathrm{v}_2 = \langle -3\,,\ 1\,,4\rangle$

1. Se obtiene el vector perpendicular a v_1 y a v_2 a través del producto Cruz (vectorial)

$$\mathrm{v}_1 = \langle 2\,,-5\,,1\rangle$$
$$\mathrm{v}_2 = \langle -3\,,\ 1\,,4\rangle$$
$$\mathrm{v}_3 = \mathrm{v}_1 \,\mathrm{X}\, \mathrm{v}_2 = \langle\, (-5*4)-(1*1)\,,\ -[(2*4)-(1*-3)]\ ,\ (2*1)-(-5*-3)\rangle$$
$$\mathrm{v}_3 = \mathrm{v}_1 \,\mathrm{X}\, \mathrm{v}_2 = \langle -21\,,\ -11\ ,\ -13\rangle$$

2. Se tiene el vector directriz de la recta (la pendiente de la recta). Ahora se utilizará la ecuación 7.11 para obtener la ecuación paramétrica

Datos

$x_0 = 0 \quad y_0 = 1 \quad z_0 = 4 \quad a = -21 \quad b = -11 \quad c = -13$

$$\bar{\mathrm{r}} = \langle x_0 + a\,t\ ,\ y_0 + b\,t\ ,\ z_0 + c\,t\rangle$$
$$\bar{\mathrm{r}} = \langle 0 - 21\,t\ ,\ 1 - 11\,t\ ,\ 4 - 13\,t\rangle$$
$$\bar{\mathrm{r}} = \langle -21\,t\ ,\ 1 - 11\,t\ ,\ 4 - 13\,t\rangle$$

3. Las ecuaciones paramétricas serán:

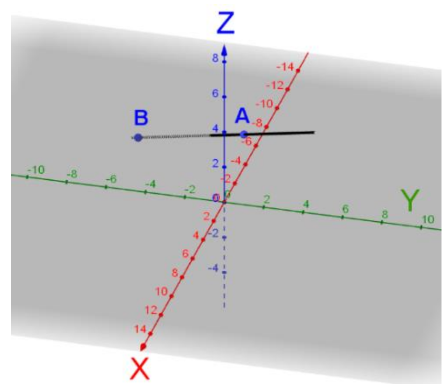
$$x = -21t \qquad y = 1 - 11t \qquad z = 4 - 13t$$

4. La ecuación simétrica será utilizando la ecuación 7.12

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t$$

$$\frac{x - 0}{-21} = \frac{y - 1}{-11} = \frac{z - 4}{-13} = t$$

$$\frac{x}{-21} = \frac{y - 1}{-11} = \frac{z - 4}{-13}$$



5. Para el trazo de la gráfica se plotean dos puntos

$$t = 0 \quad \mathrm{A}(0\,,1\,,4) \qquad ; \qquad t = 1 \quad \mathrm{B}(-21\,,\ -10\ ,\ -9)$$

Ejemplo 5

Calcular la menor distancia entre: $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{2}\ ;\ \dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-3}$

1. Se deja la primera recta en términos del parámetro t utilizando la ecuación 7.12.

$$\frac{x-1}{5} = t \quad ; \quad \frac{y-2}{3} = t \quad ; \quad \frac{z+1}{2} = t$$
$$x = 5t + 1 \qquad y = 3t + 2 \qquad z = 2t - 1$$

2. Se deja la segunda recta en términos del parámetro t utilizando la ecuación 7.12.

$$\frac{x+2}{4} = t \quad ; \quad \frac{y+1}{2} = t \quad ; \quad \frac{z-3}{-3} = t$$
$$x = 4t - 2 \qquad y = 2t - 1 \qquad z = -3t + 3$$

3. La función distancia entre ambos puntos, tomando en cuenta que ambas rectas tienen el mismo parámetro.

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$D = \sqrt{\left(5t + 1 - (4t - 2)\right)^2 + \left(3t + 2 - (2t - 1)\right)^2 + \left(2t - 1 - (-3t + 3)\right)^2}$$

$$D = \sqrt{(5t + 1 - 4t + 2)^2 + (3t + 2 - 2t + 1)^2 + (2t - 1 + 3t - 3)^2}$$

$$D = \sqrt{(t + 3)^2 + (t + 3)^2 + (5t - 4)^2}$$

$$D = \sqrt{t^2 + 6t + 9 + t^2 + 6t + 9 + 25t^2 - 40t + 16}$$

$$D = \sqrt{27t^2 - 28t + 34}$$

4. Derivando la distancia

$$\frac{dD}{dt} = \frac{54t - 28}{2\sqrt{27t^2 - 28t + 34}}$$

5. Igualando la derivada a cero

$$\frac{dD}{dt} = \frac{54t - 28}{2\sqrt{27t^2 - 28t + 34}} = 0$$

$$54t - 28 = 0$$

$$t = \frac{28}{54} = \frac{14}{27}$$

6. Sustituyendo el valor de t en la distancia

$$D = \sqrt{27t^2 - 28t + 34}$$

$$D\left(\frac{14}{27}\right) = \sqrt{27\left(\frac{14}{27}\right)^2 - 28\left(\frac{14}{27}\right) + 34} = \sqrt{\frac{722}{27}} = 5.17114 \text{ unidades}$$

7. Para encontrar el punto de intersección de ambas rectas se igualan los valores:

$$x = 5t + 1 \qquad y = 3t + 2 \qquad z = 2t - 1$$
$$x = 4t - 2 \qquad y = 2t - 1 \qquad z = -3t + 3$$

$$\begin{array}{ccc} x = x & y = y & z = z \\ 5t + 1 = 4t - 2 & 3t + 2 = 2t - 1 & 2t - 1 = -3t + 3 \\ t = -3 & t = -3 & t = -3 \end{array}$$

8. El punto de encuentro será

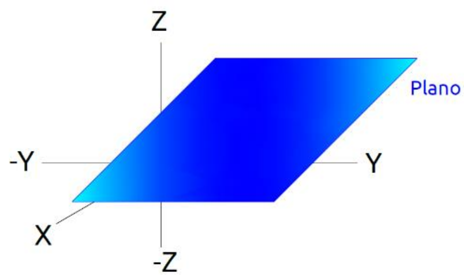
$$x(-3) = 5(-3) + 1 \qquad y(-3) = 3(-3) + 2 \qquad z(-3) = 2(-3) - 1$$

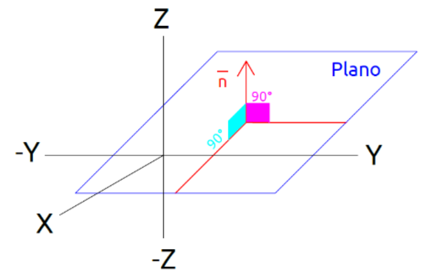
$$x(-3) = -14 \qquad y(-3) = -7 \qquad z(-3) = -7$$

$$\text{Intersección} = (-14\,, -7\,, -7)$$

7.5. Ecuaciones de planos

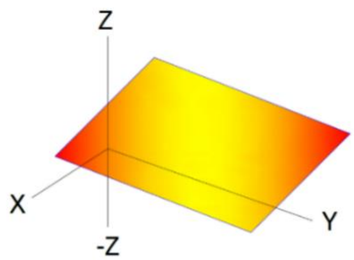
La descripción matemática de un plano en el espacio es más complicada que la descripción de una recta, ya que en el plano necesita conocer un vector, como el vector directriz de una recta, pero este vector es un vector normal al plano, significando que tiene 90 grados en cualquier punto del plano y el vector. Este vector es el que le da la inclinación al plano, tal y como lo muestran las siguientes figuras:





Inicialmente en este capítulo se trató el tema de planos en el espacio, trazando el plano $x = 2$, $y = 2$ y $z = 2$ pero ahora se profundizará más en el tema, ya que como ha visto, existen planos inclinados guiados por un vector normal.

1. Piense en el siguiente plano:

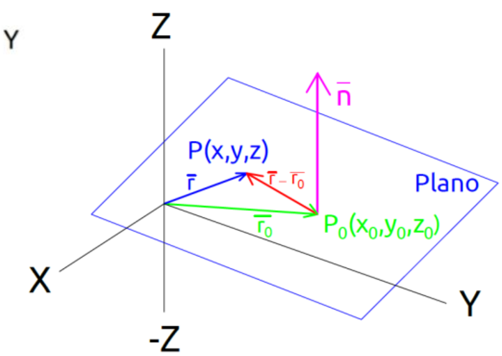


2. Como lo muestra la imagen, se tienen para ese plano
   2.1. Un vector normal al plano n con componentes que le dan dirección

$$\hat{n} = \langle\, a\ ,\ \ b\ ,\ \ c \rangle$$

   2.2. Un punto inicial $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ que genera un vector desde el punto inicial (0,0,0) el cual es $\widehat{\mathrm{r}_0}$

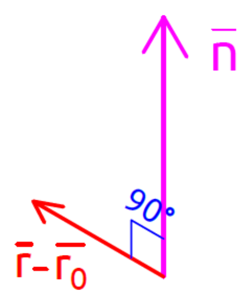
$$\widehat{\mathrm{r}_0} = \langle x_0\ ,\ y_0\ ,\ z_0 \rangle$$



   2.3. Un vector que conecta el punto inicial (0,0,0) con el punto $\mathrm{P}(x, y, z)$ es el vector $\hat{\mathrm{r}}$.

$$\hat{\mathrm{r}} = \langle x\ , y\ , z \rangle \quad \text{cualquier punto del plano}$$

3. El vector $\hat{\mathrm{r}} - \widehat{\mathrm{r}_0}$ es el vector paralelo al plano. Así mismo el vector $\hat{\mathrm{r}} - \widehat{\mathrm{r}_0}$ y el vector $\hat{n}$ se tienen 90° entre ellos.



4. La multiplicación por producto punto entre $\hat{\mathrm{r}} - \widehat{\mathrm{r}_0}$ y $\hat{n}$ será:

$$\hat{\mathrm{n}}\ \cdot\ (\hat{\mathrm{r}} - \widehat{\mathrm{r}_0}) =\ |\mathrm{n}|\ |\mathrm{r} - \mathrm{r}_0|\ \cos 90°\ =\ 0$$

$$\hat{\mathrm{n}}\ \cdot\ (\hat{\mathrm{r}} - \widehat{\mathrm{r}_0}) = 0$$

5. Sustituyendo las componentes de cada vector del paso 2.

$$\langle\, a\ ,\ \ b\ ,\ \ c \rangle\ \cdot\ [\,\langle x\ , y\ , z \rangle - \langle x_0\ ,\ y_0\ ,\ z_0 \rangle\,]\ =\ 0$$

$$\langle\, a\ ,\ \ b\ ,\ \ c \rangle\ \cdot\ \langle x - x_0\ ,\ \ y - y_0\ \ ,\ \ z - z_0 \rangle\ =\ 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0} \qquad \textbf{Ecuación 7.13}$$

Ejemplo 1

Encuentre la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular al vector $\langle 1\,, -2\,, 5\rangle$

1. Se identifica el punto inicial del plano, siendo: $P_0(x_0,\ y_0\ ,\ z_0)\ =\ P_0(0\ ,0\ ,0)$

2. Nótese que nos están dando el vector normal (perpendicular al plano):
$$\hat{n} = \langle 1\ , \quad -2\ ,5\ \rangle \qquad \text{por tanto:} \qquad a = 1 \quad b = -2 \quad c = 5$$

3. Sustituyendo valores en la ecuación 7.13
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$1(x - 0) - 2(y - 0) + 5(z - 0) = 0$$
$$x - 2y + 5z = 0$$

4. La respuesta será
$$x - 2y + 5z \ = 0$$

Ejemplo 2

El plano que pasa por el punto $(1\ , -1, -1)$ y es paralelo al plano $5x - y - z = 6$

Conceptualizando

Se tiene el punto inicial por donde pasa el plano. Pero se debe obtener la pendiente del plano (por así decirlo) con el vector normal que se sabe que tiene la misma pendiente que $5x - y - z = 6$

1. El vector normal del plano paralelo será
$$5x - y - z = 6$$
$$a = 5 \qquad b = -1 \qquad c = -1 \qquad \text{por tanto: } \hat{n} = \langle\ 5\ , -1\ , -1\ \rangle$$

2. Al tener la misma inclinación se busca que el plano $5x - y - z = 6$, su vector normal será el mismo
$$\hat{n} = \langle\ 5\ , -1\ , -1\ \rangle$$

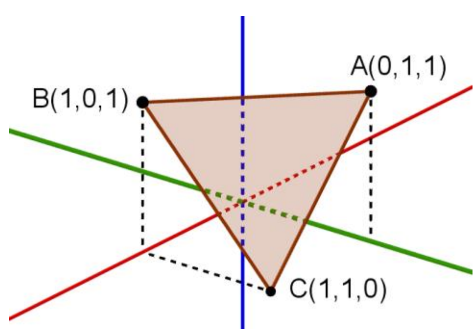
3. Sustituyendo datos en la ecuación 7.13
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$5(x - 1) - 1(y - (-1)) - 1(z - (-1)) = 0$$
$$5x - 5 - (y + 1) - (z + 1) = 0$$
$$5x - 5 - y - 1 - z - 1 = 0$$
$$5x - y - z - 7 = 0$$

4. La respuesta será
$$5x - y - z = 7$$

Ejemplo 3

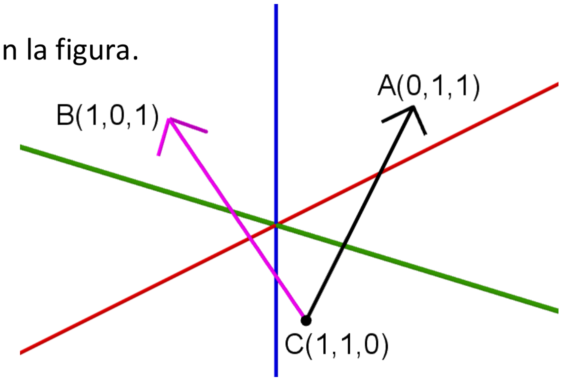
Encuentre la ecuación del plano que pasa por $(0\ ,1\ ,1\ )\ ,(\ 1\ ,0\ ,1\ )$ y $(\ 1\ ,1\ ,0\ )$

1. Se ubican los puntos en el plano cartesiano en 3 dimensiones, nombrando cada punto.



2. Se encuentran los vectores paralelos al plano mostrado en la figura.

$$\overrightarrow{BC} = \langle B_x - C_x\,,\ \ B_y - C_y\ \ ,\ \ B_z - C_z \rangle$$
$$\overrightarrow{BC} = \langle 1 - 1\,,\ \ 0 - 1\ \ ,\ \ 1 - 0 \rangle$$
$$\overrightarrow{BC} = \langle\ 0\,,\ \ \ -1\ \ ,\ \ 1\ \rangle$$
$$\overrightarrow{AC} = \langle A_x - C_x\,,\ \ A_y - C_y\ \ ,\ \ A_z - C_z \rangle$$
$$\overrightarrow{AC} = \langle 0 - 1\,,\ \ 1 - 1\ \ ,\ \ 1 - 0 \rangle$$
$$\overrightarrow{AC} = \langle\ -1\,,\ \ 0\ \ ,\ \ 1\ \rangle$$



3. Se calcula el vector perpendicular entre los vectores, utilizando el producto cruz.

$$\overrightarrow{BC} = \langle\ 0\,,\ \ \ -1\ \ ,\ \ 1\ \rangle$$
$$\overrightarrow{AC} = \langle\ -1\,,\ \ 0\ \ ,\ \ 1\ \rangle$$
$$\overrightarrow{BC}\ \mathrm{X}\ \overrightarrow{AC} = \ \ \langle (-1 * 1) - (1 * 0)\,,\ \ -[(0 * 1) - (1 * -1)]\ ,\ \ (0 * 0) - (-1 * -1) \rangle$$
$$\overrightarrow{BC}\ \mathrm{X}\ \overrightarrow{AC} = \ \ \langle -1 - 0\,,\ \ -[0 + 1]\ ,\ \ 0 - 1 \rangle$$
$$\overrightarrow{BC}\ \mathrm{X}\ \overrightarrow{AC} = \ \ \langle -1\,,\ \ -1\ ,\ \ -1 \rangle$$
$$\vec{n} = \ \ \langle -1\,,\ \ -1\ ,\ \ -1 \rangle$$

4. Teniendo el vector normal y el punto C como punto inicial se dice:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$-1(x - 1) - 1(y - 1) - 1(z - 0) = 0$$
$$-x + 1 - y + 1 - z\ =\ 0$$
$$-x - y - z + 2 =\ 0$$
$$x + y + z\ =\ 2$$

5. La respuesta será:

$$x + y + z\ =\ 2$$

6. ¿Qué hubiera pasado si se tomaba otro punto inicial?

$$-1(x - 0) - 1(y - 1) - 1(z - 1) = 0 \qquad \text{tomando el punto A}$$
$$-x - y + 1 - z + 1 = 0$$
$$x + y + z\ =\ 2 \qquad \text{Obteniendo la misma respuesta}$$

Así mismo, no hubiera afectado el haber obtenido el vector normal como $\overrightarrow{AC}\,\mathrm{X}\overrightarrow{BC}$
Tampoco hubiera afectado el haber obtenido un vector $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{CA}$, ya que el procedimiento hubiera sido el mismo y simplemente debe aplicar la teoría, querido lector. Recuerde que para el trazo de un plano debe conocer el vector normal (el que le da su pendiente o inclinación) y un punto inicial.

Ejemplo 4

El plano que pasa por el punto $(6\,,0\,,-2)$ y contiene la recta $x = 4 - 2t\,,\ y = 3 + 5t\,, z = 7 + 4t$

Conceptualizando

Este problema es muy conceptual y depende mucho del manejo de la teoría de los planos. Debe recordar que la multiplicación de dos vectores dentro del plano por el producto cruz nos dará como respuesta un vector normal, por lo que se debe buscar en este problema las componentes $a\,, b\ \ y\ \ c$.

1. Si tenemos un punto inicial, tendremos el vector r_0

$$P_0\ =\ (6\,,0\,,-2) \qquad r_0 = \langle 6\ ,0\,,-2 \rangle$$

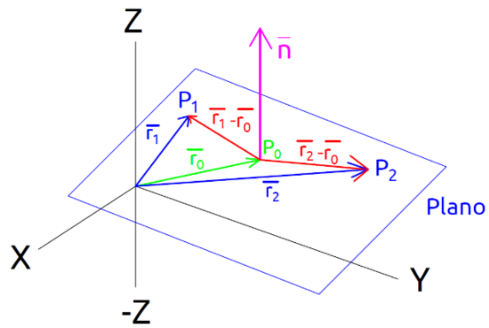
2. Se necesita otro punto ubicado en el plano. Como los puntos de la recta también pertenecen al plano, se puede ubicar un punto cuando $t = 0$

$$x(0) = 4 - 2(0) \quad y(0) = 3 + 5(0) \quad z(0) = 7 + 4(0)$$
$$x(0) = 4 \quad y(0) = 3 \quad z(0) = 7 \quad \text{Por tanto el punto P1 será} \quad \mathrm{P_1}(4\,,3\,,7)$$

2.1. Si se tiene un punto P entonces también se tendrá un vector r
$\mathrm{r_1} = \langle\, 4\,,3\,,7\,\rangle$

3. Para obtener otro vector, podríamos tomar el valor de t como $t = 1$
$$x(1) = 4 - 2(1) \quad y(1) = 3 + 5(1) \quad z(0) = 7 + 4(1)$$
$$x(1) = 2 \quad y(0) = 8 \quad z(0) = 11 \quad \text{Por tanto el punto P2 será} \quad \mathrm{P_2}(2\,,8\,,11)$$

3.1. Si se tiene un punto P entonces también se tendrá un vector r
$\mathrm{r_2} = \langle\, 2\,,8\,,11\,\rangle$



4. Los vectores en el plano buscados serán
$$\mathrm{r_2} - \mathrm{r_0} = \langle 2-6\,,\ 8-0\ ,\ 11-(-2)\rangle$$
$$\mathrm{r_2} - \mathrm{r_0} = \langle -4\,,\ 8\,,\ 13\rangle$$

$$\mathrm{r_1} - \mathrm{r_0} = \langle 4-6\,,\ 3-0\ ,\ 7-(-2)\rangle$$
$$\mathrm{r_1} - \mathrm{r_0} = \langle -2\,,\ 3\,,\ 9\rangle$$

5. La multiplicación entre $\mathrm{r_2} - \mathrm{r_0}$ y $\mathrm{r_1} - \mathrm{r_0}$ por producto cruz será el vector normal.
$$\mathrm{r_2} - \mathrm{r_0} = \langle -4\,,\ 8\,,\ 13\rangle$$
$$\mathrm{r_1} - \mathrm{r_0} = \langle -2\,,\ 3\,,\ 9\rangle$$
$$(\mathrm{r_2} - \mathrm{r_0})\ \mathrm{X}\ (\mathrm{r_1} - \mathrm{r_0}) = \hat{n} = \langle a\,,b\,,c\rangle$$
$$(\mathrm{r_2} - \mathrm{r_0})\ \mathrm{X}\ (\mathrm{r_1} - \mathrm{r_0}) = \langle (8*9) - (13*3)\,,-[(-4*9) - (13*-2)]\,,(-4*3) - (8*-2)\rangle$$
$$(\mathrm{r_2} - \mathrm{r_0})\ \mathrm{X}\ (\mathrm{r_1} - \mathrm{r_0}) = \langle 33\,,10\,,4\rangle = \langle a\,,b\,,c\rangle$$

6. Por tanto
$$a = 33 \quad b = 10 \quad c = 4$$

7. Sustituyendo datos en la ecuación 7.13. del plano
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$33(x - 6) + 10(y - 0) + 4(z - (-2)) = 0$$
$$33x - 198 + 10y + 4z + 8 = 0$$
$$33x + 10y + 4z - 190 = 0$$

8. La respuesta será
$$33x + 10y + 4z = 190$$

Ejemplo 5

¿Cuál de los cuatro planos son paralelos? ¿Algunos de ellos son idénticos?
$$P_1: \quad 3x + 6y - 3z = 3 \qquad P_2: \ 4x - 12y + 8z = 5$$
$$P_3: \quad 9y = 1 + 3x + 6z \qquad P_4: \ z = x + 2y - 2$$

1. Se obtienen los vectores normales de cada uno de los planos.
$$P_1: \quad 3x + 6y - 3z - 3 = 0 \qquad P_2: \ 4x - 12y + 8z - 5 = 0$$
$$P_3: \quad 0 = 3x - 9y + 6z + 1 \qquad P_4: \ 0 = x + 2y - z - 2$$
$$P_1: \ \langle 3\,,6\,,-3\rangle \qquad P_2: \ \langle 4\,,-12\,,8\rangle \qquad P_3: \ \langle 3\,,-9\,,6\rangle \qquad P_4: \ \langle 1\,,2\,,-1\rangle$$

2. Se multiplican los vectores por el producto cruz con el vector P_1

$P_1 : \langle 3\,,6\,,-3\rangle$

$P_2 : \langle 4\,,-12\,,8\rangle$

$P_1 \text{ X } P_2 = \langle\, 12\,,-36,-60\,\rangle \qquad |P_1 \text{ X } P_2| = \sqrt{5040}$

$|P_1 \text{ X } P_2| = P_1\, P_2\, sen\theta_{12}$

$\sqrt{5040} = \sqrt{54}\,\sqrt{224}\, sen\theta_{12}$

$\theta_{12} = 40.2029°$

$P_1 : \langle 3\,,6\,,-3\rangle$

$P_3 : \langle 3\,,-9\,,6\rangle$

$P_1 \text{ X } P_3 = \langle\, 9\,,-27,-45\,\rangle \qquad |P_1 \text{ X } P_3| = \sqrt{2835}$

$|P_1 \text{ X } P_3| = P_1\, P_3\, sen\theta_{13}$

$\sqrt{2835} = \sqrt{54}\,\sqrt{126}\, sen\theta_{13}$

$\theta_{13} = 40.2029°$

$P_1 : \langle 3\,,6\,,-3\rangle$

$P_4 : \langle 1\,,2\,,-1\rangle$

$P_1 \text{ X } P_4 = \langle\, 0\,,0,0\,\rangle \qquad |P_1 \text{ X } P_4| = 0$

$|P_1 \text{ X } P_4| = P_1\, P_4\, sen\theta_{14}$

$0 = \sqrt{54}\,\sqrt{6}\, sen\theta_{14}$

$\theta_{14} = 0°$

3. Se multiplican los vectores por el producto cruz con el vector P_2

$P_2 : \langle 4\,,-12\,,8\rangle$

$P_3 : \langle 3\,,-9\,,6\rangle$

$P_2 \text{ X } P_3 = \langle\, 0\,,0,0\,\rangle \qquad |P_1 \text{ X } P_3| = 0$

$|P_2 \text{ X } P_3| = P_2\, P_3\, sen\theta_{23}$

$0 = \sqrt{224}\,\sqrt{126}\, sen\theta_{23}$

$\theta_{23} = 0°$

$P_2 : \langle 4\,,-12\,,8\rangle$

$P_4 : \langle 1\,,2\,,-1\rangle$

$P_2 \text{ X } P_4 = \langle -4\,,12,20\,\rangle \qquad |P_2 \text{ X } P_4| = \sqrt{560}$

$|P_1 \text{ X } P_4| = P_2\, P_4\, sen\theta_{24}$

$\sqrt{560} = \sqrt{224}\,\sqrt{6}\, sen\theta_{24}$

$\theta_{24} = 40.2029°$

4. Se multiplican los vectores por el producto cruz con el vector P_2

$P_3 : \langle 3\,,-9\,,6\rangle$

$P_4 : \langle 1\,,2\,,-1\rangle$

$P_3 \text{ X } P_4 = \langle -3\,,9,15\rangle \qquad |P_1 \text{ X } P_3| = \sqrt{315}$

$|P_2 \text{ X } P_3| = P_3\, P_4\, sen\theta_{34}$

$\sqrt{315} = \sqrt{126}\,\sqrt{6}\, sen\theta_{34}$

$\theta_{34} = 40.2029°$

5. Para verificar si son idénticos los planos se plotean puntos y se analiza si son iguales.

$P_1 : \quad 3x + 6y - 3z - 3 = 0 \qquad \text{con} \qquad P_4 : \; 0 = x + 2y - z - 2$

5.1. Se toman valores para $x = 0\,, y = 0$ en el plano P1

$$3(0) + 6(0) - 3(z) = 3 \quad \text{por tanto:} \quad z = -1$$

5.2. Se sustituyen los valores para P4

$$0 = x + 2y - z - 2 \qquad (0\,,0\,,-1)$$
$$0 = (0) + 2(0) - (-1) - 2$$
$$0 = -1 \quad \text{(por tanto P1 no identico a P4)}$$

6. Para verificar si son idénticos los planos se plotean puntos y se analiza si son iguales.

$P_2 : \; 4x - 12y + 8z - 5 = 0 \qquad \text{con} \qquad P_3 : \quad 0 = 3x - 9y + 6z + 1$

6.1. Se toman valores para $x = 0\,, y = 0$ en el plano P2

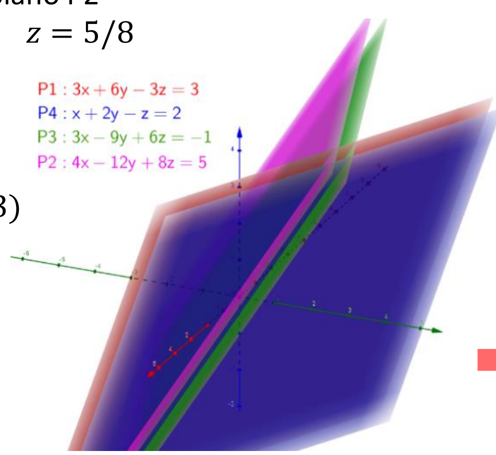
$4(0) - 12(0) + 8z - 5 = 0 \qquad \text{por tanto:} \quad z = 5/8$

6.2. Se sustituyen los valores para P4

$0 = 3x - 9y + 6z + 1 \qquad (0\,,0\,,5/8)$

$0 = 3(0) - 9(0) + 6(5/8) + 1$

$0 = 4.75 \quad \text{(por tanto P2 no identico a P3)}$



7. La respuesta será

P_1 Paralelo a P_4 ; P_2 Paralelo a P_3

Ejemplo 6

Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(1\ ,\ -1,\ 1)$ y que es perpendicular a la recta $3x = 2y = z$ y paralela al plano $x + y - z = 0$

1. Conceptualizando la ecuación vectorial de una recta

$$\mathrm{r} = \langle x_0 + at\ , y_0 + bt\ , z_0 + ct \rangle$$
$$\mathrm{r} = \langle 1 + at\ , -1 + bt\ , 1 + ct \rangle \quad \text{Sustituyendo punto inicial}$$

2. El vector directriz de la recta buscada será

$$\mathrm{v}_1 = \langle a\ , b\ , c \rangle \qquad \text{a buscar } a, b \text{ y } c$$

3. Buscando el vector directriz de la recta dada

$$3x = 2y = z \qquad \text{identificando } a, b \text{ y } c\text{:} \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$
$$a = \frac{1}{3} \quad b = \frac{1}{2} \quad c = 1 \quad ; \quad x_0 = 0 \quad y_0 = 0 \quad z_0 = 0 \;\; \text{(de la segunda recta)}$$
$$\mathbf{v_2} = \langle \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\ , \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ , \mathbf{1} \rangle$$

4. Se analiza el plano, donde se nos indica que la recta a buscar es paralela al plano

$$x + y - z = 0$$
$$\text{Identificando:} \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$a = 1\ ,\ \ b = 1 \ \text{ y } \ c = -1$$
$$\widehat{\boldsymbol{n}} = \langle \mathbf{1}\ , \mathbf{1}, -\mathbf{1} \rangle$$

5. Se necesita obtener otro vector, ya que se necesita plantear tres ecuaciones porque se tienen 3 variables. Este vector deberá ser paralelo al plano $x + y - z = 0$

5.1. Se toma un valor de referencia de $x = 1\ ;\ \ y = 1$. Podría haber sido otro valor

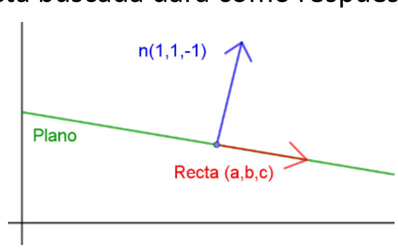
$$x + y - z = 0$$
$$1 + 1 - z = 0 \quad \text{por tanto} \quad z = 2$$

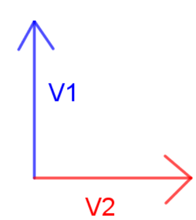
5.2. El vector 3 a partir del origen hacia P_3 será

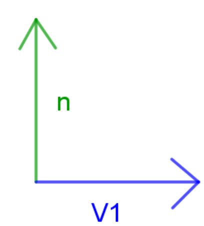
$$P_3 = (1\ , 1\ , 2) \qquad \mathbf{V_3} = \langle\ \mathbf{1}\ , \mathbf{1}\ , \mathbf{2}\ \rangle$$

6. Se plantean las ecuaciones utilizando el producto punto y producto cruz. Como el problema describe que la recta es paralela al plano, la multiplicación por producto cruz de cualquier vector del plano por el vector directriz de la recta buscada dará como respuesta la normal.

$$\mathrm{v}_1 = \langle a\ , b\ , c \rangle$$
$$\mathbf{v_2} = \langle \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\ , \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ , \mathbf{1} \rangle$$
$$\mathbf{v_3} = \langle\ \mathbf{1}\ , \mathbf{1}\ , \mathbf{2}\ \rangle$$
$$\widehat{\boldsymbol{n}} = \langle \mathbf{1}\ , \mathbf{1}, -\mathbf{1} \rangle$$







$$\mathrm{v}_1 \cdot \mathbf{v_2} = |\mathrm{v}_1|\,|\mathrm{v}_2| \cos 90°$$
$$\mathrm{v}_1 \cdot \mathrm{v}_2 = 0$$
$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = 0$$

$$\mathrm{v}_1 \cdot \widehat{\boldsymbol{n}} = |\mathrm{v}_1|\,|\mathrm{n}| \cos 90°$$
$$\mathrm{v}_1 \cdot \hat{\mathrm{n}} = 0$$
$$1(a) + 1(b) - 1(c) = 0$$

$$\mathrm{v}_1 \times \mathbf{v_3} = \widehat{\boldsymbol{n}}$$
$$\langle a\ , b\ , c \rangle \times \langle\ 1\ \ , 1\ \ , 2\ \rangle = \langle 1\ , 1, -1 \rangle$$
$$\langle\ 2b - c\ \ , c - 2a\ \ , a - b\ \rangle = \langle 1\ , 1\ , -1 \rangle$$

$$2a + 3b + 6c = 0\ \ (1) \qquad a + b - c = 0\ (2) \qquad 2b - c = 1\ (3) \qquad c - 2a = 1\ \ (4) \qquad a - b = -1\ \ \ (5)$$

7. Solucionando las ecuaciones: Como se tienen cinco ecuaciones, se resolverán tres de ellas y las otras dos servirán de apoyo para comprobación de los resultados.

$$c - 2a = 1 \;\; (4) \qquad a - b = -1 \;\; (5)$$
$$c = 1 + 2a \;\; (4) \qquad b = a + 1 \;\; (5)$$

7.1. Sustituyendo en (1)

$$2a + 3b + 6c = 0 \quad (1)$$
$$2a + 3(a + 1) + 6(1 + 2a) = 0$$
$$2a + 3a + 3 + 6 + 12a = 0$$
$$17a + 9 = 0$$
$$a = -\frac{9}{17}$$

7.2. Sustituyendo en (4) y en (5)

$$c = 1 + 2a \;\; (4) \qquad b = a + 1 \;\; (5)$$
$$c = 1 + 2\left(-\frac{9}{17}\right) \qquad b = -\frac{9}{17} + 1$$
$$c = -\frac{1}{17} \qquad b = \frac{8}{17}$$

7.3. Comprobando datos con ecuaciones (2) y (3)

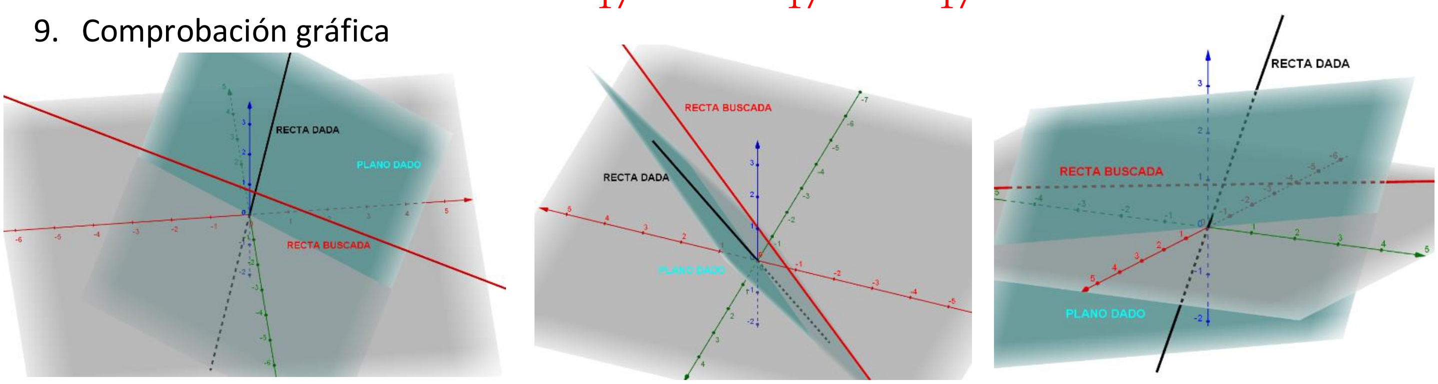
$$a + b - c = 0 \; (2) \qquad 2b - c = 1 \; (3)$$
$$-\frac{9}{17} + \frac{8}{17} + \frac{1}{17} = 0 \; (2) \qquad 2\left(\frac{8}{17}\right) + \frac{1}{17} = 1 \; (3)$$
$$0 = 0 \; (2) \qquad 1 = 1 \; (3) \qquad \text{comprobado}$$

8. La respuesta será:

$$\mathrm{r} = \langle 1 + at, -1 + bt, 1 + ct \rangle \qquad \text{donde}: \quad \mathrm{r} = \text{Recta Buscada}$$

$$\mathrm{r} = \langle 1 - \frac{9}{17}t \;,\; -1 + \frac{8}{17}t \;,\; 1 - \frac{1}{17}t \rangle$$

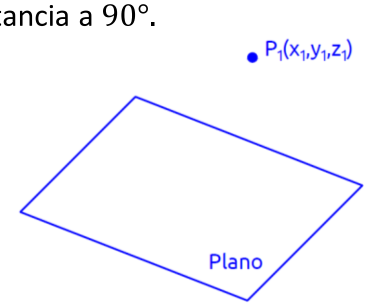
9. Comprobación gráfica



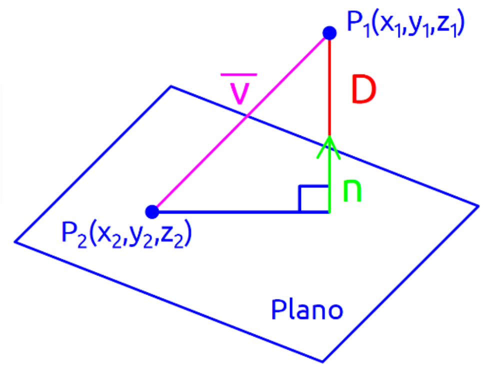
7.5.1. Distancia entre un punto y un plano

Esta distancia será de 90° del plano al punto a evaluar la distancia. Esto es importante al momento de conceptualizar la distancia en el plano en tres dimensiones, recuerde, que las distancias existen muchas de un punto al plano, pero al utilizar la ecuación 7.14 será la distancia a 90°.

1. Piense en el siguiente plano con un punto P1 coordenado.



2. Piense en un punto P_2 cualquiera que pertenezca al plano, como lo muestra la imagen de la derecha.



2.1. El vector que une el punto 2 con el punto 1 se le denota $\hat{v}$ con dirección hacia P1

$$\hat{v} = \langle x_1 - x_2 \ , \ y_1 - y_2 \ , \ z_1 - z_2 \rangle$$

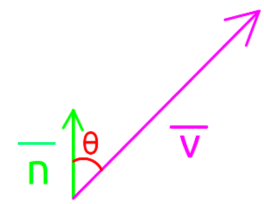
2.2. El vector normal ($\hat{n}$)es el vector directriz del plano

$$\hat{n} = \langle a \, , b \, , c \ \rangle$$

$$|\mathrm{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

2.3. La distancia D es la que se busca (un escalar).

3. El análisis de los vectores en el punto P1 por el producto punto:

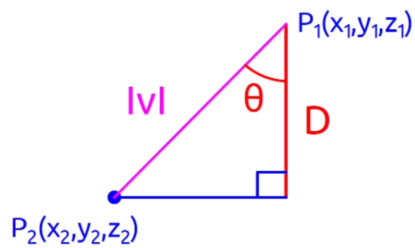


$$\hat{n} \cdot \hat{v} = \ |\mathrm{n}| \ |\mathrm{v}| \ \cos\theta$$

4. El triángulo rectángulo sería:

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{D}}{|\mathrm{v}|}$$

$$|\mathrm{v}|\cos\theta = \mathrm{D}$$



5. Sustituyendo el resultado del paso 4. En el resultado del paso 3.

$$\mathrm{n} \cdot \mathrm{v} = \ |\mathrm{n}| \ |\mathrm{v}|\cos\theta$$

$$\mathrm{n} \cdot \mathrm{v} = \ |\mathrm{n}| \ \mathrm{D}$$

$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{n} \cdot \mathrm{v}}{|\mathrm{n}|} = \frac{\langle a \, , b \, , c \ \rangle \cdot \langle x_1 - x_2 \ , \ y_1 - y_2 \ , \ z_1 - z_2 \rangle}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) + c(z_1 - z_2)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

5.1. Se extiende el producto punto.

$$\mathrm{D} = \frac{a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) + c(z_1 - z_2)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 - ax_2 - by_2 - cz_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\mathrm{D} = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_2 + by_2 + cz_2)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

5.2. Como el punto $x_2 \, , y_2 \, , z_2$ es parte del plano, se debe cumplir con la ecuación del plano:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad\qquad d = \text{constante}$$

$$ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0$$

$$ax_2 + by_2 + cz_2 = -d$$

5.3. Sustituyendo en el resultado del paso 5.2. en el paso 5.1.

$$\mathrm{D} = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_2 + by_2 + cz_2)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 - (-d)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

6. Siendo D positiva, la fórmula es:

$$\boxed{\mathrm{D} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}} \qquad \textbf{Ecuación 7.14}$$

Ejemplo 1

Encuentre la distancia del punto $(-6\,,3\,,5)$ al plano $x-2y-4z=8$

1. Al querer aplicar la ecuación 7.14 se debe identificar a, b, c y d que pertenecen al plano.

$$x-2y-4z=8$$
$$x-2y-4z-8=0$$
$$n=\langle\,1\,,-2\,,-4\,\rangle\ \text{ por tanto: }\quad a=1\ ;\ b=-2\ ;\ c=-4\ ;\ \mathbf{d=-8}$$

2. Del punto se tiene la información:

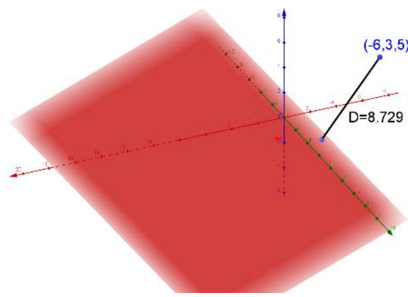
$$x_1=-6\qquad y_1=3\qquad z_1=5$$

3. Sustituyendo en la ecuación:

$$\mathrm{D}=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+\mathbf{d}\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|\,1(-6)+(-2)(3)+(-4)(5)-8\,|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-4)^2}}=\frac{|\,-40\,|}{\sqrt{21}}=\frac{40}{\sqrt{21}}=8.728$$

4. Conceptualizando

$$\mathrm{D}=8.728$$



Ejemplo 2

Determine la distancia entre los planos paralelos $6z=4y-2x\ \ ;\ \ 9z=1-3x+6y$

1. Se decide cuál será el plano que se utilizará y el otro plano se tomará como un punto. El plano que decida tomar es a criterio del matemático (el que decida)

$$6z=4y-2x$$
$$2x-4y+6z=0$$
$$x-2y+3z=0\qquad\qquad \text{simplificando por 2}$$

$$n=\langle\,1\,,-2\,,3\,\rangle\ \text{ por tanto: }\quad a=1\ ;\ b=-2\ ;\ c=3\ ;\ d=0$$

2. Se identifica el punto. Para ello se utiliza el otro plano paralelo que en este ejemplo será:

$$9z=1-3x+6y$$

$$x=1\quad y=1\quad \text{(este punto usted los decide)}\quad =>\quad \text{evaluando:}\quad 9z=1-3(1)+6(1)$$
$$9z=\ 4$$

$$\boldsymbol{x_1=1}\qquad \boldsymbol{y_1=1}\qquad \boldsymbol{z_1=\frac{4}{9}}$$

3. Sustituyendo los datos en la ecuación 7.14

$$\mathrm{D}=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\left|1(\mathbf{1})+(-2)(\mathbf{1})+(3)\left(\mathbf{\frac{4}{9}}\right)+0\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}=\frac{\left|\frac{1}{3}\right|}{\sqrt{14}}=\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{14}}=\frac{1}{3\sqrt{14}}$$

$$\mathrm{D}\ =\frac{1}{3\sqrt{14}}=0.08909$$

7.6. Cilindros y superficies cuádricas

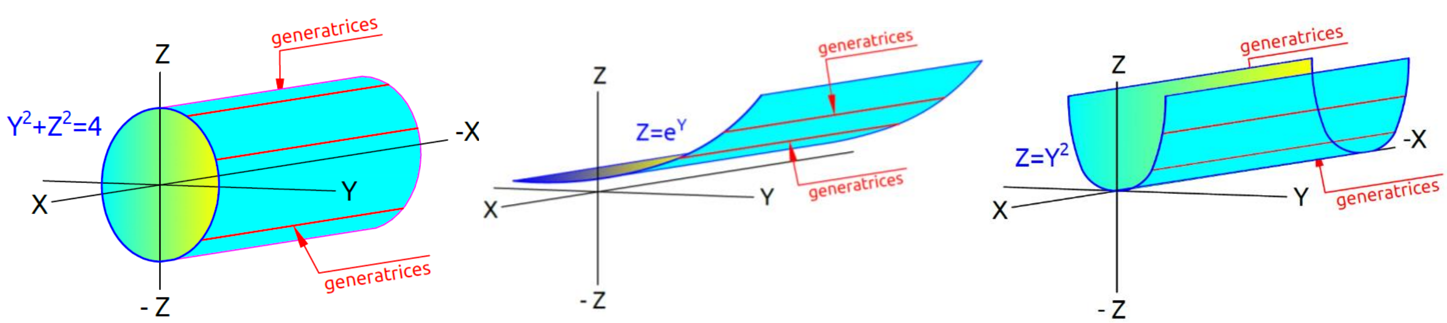
Este es el último tema, cuyo campo de aplicación en el mundo real es amplio en cuanto a formar superficies geométricas, algunas superficies más conocidas que otras. El ser humano visualiza en tres dimensiones, pero a menudo es factible analizar superficies en dos dimensiones o analizar las vistas de una superficie dada.

En esta sección solo se aprenderá a dibujar las superficies a partir de una ecuación matemática en términos de dos variables (cilindros) y con tres variables (cuádricas). Un análisis profundo de puntos máximos, dominios, entre otros temas de superficies que se realizarán en el curso de matemática intermedia 2 (Mate 5). Las superficies vistas y por ver son:

- **Planos** (tema ya visto)
- **Cilindros** (Cilindro parabólico, cilindro circular, cilindro hiperbólico, …)
- **Superficies cuádricas** (esfera, elipsoide, paraboloide, paraboloide elíptico, paraboloide hiperbólico, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas, entre otras.)

7.6.1. Cilindros

Un cilindro se define como la superficie que tiene todas sus líneas rectas, que son paralelas a la superficie denominadas generatrices.



Las tres figuras son cilíndricas porque sus líneas son paralelas y la superficie desplazada.

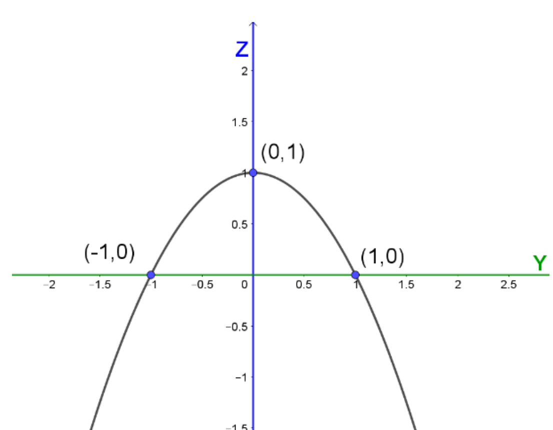
En el curso de matemática básica 2 se analizaron los cilindros de rotación, donde se trazaba la función en dos dimensiones y luego se rotaba respecto a un eje. Las superficies cilíndricas de esta sección son similares, se traza la gráfica en dos dimensiones y se desplaza o se corre en el eje faltante.

Ejemplo 1

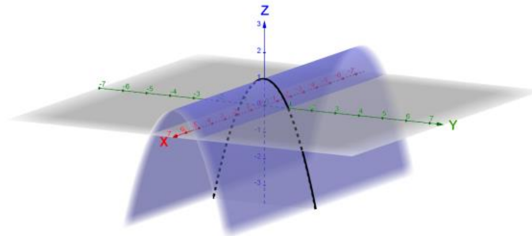
Describa y bosqueje la superficie $z = 1 - y^2$

1. Se traza la gráfica en dos dimensiones y vrs z

y	$z = 1 - y^2$
-2	-3
-1	0
0	1
1	0
2	-3

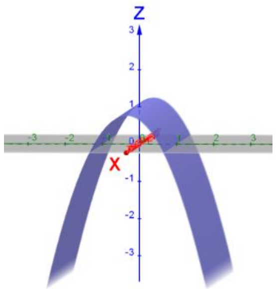


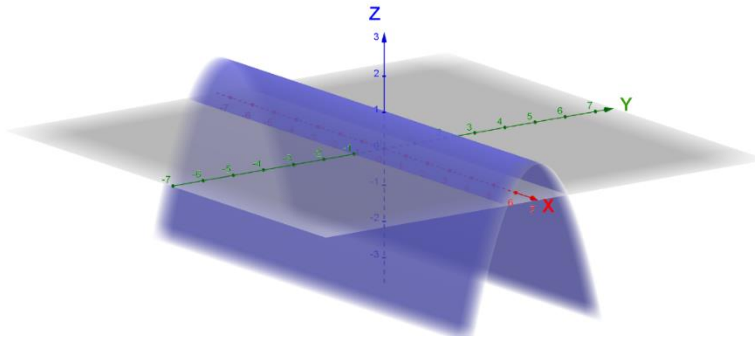
2. Se corre la parábola en el eje x, que es el eje faltante en la ecuación. Se desplaza la gráfica del paso 1



hacía el eje x positivo y hacia el eje x negativo.

3. Quedando la gráfica:





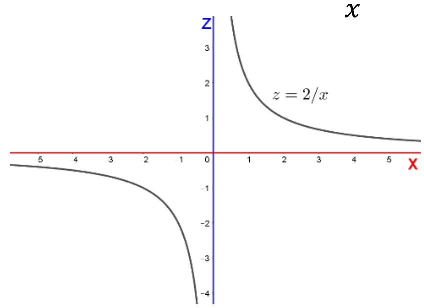
Al ver la superficie en dos dimensiones se deduce que es un cilindro parabólico

Ejemplo 2

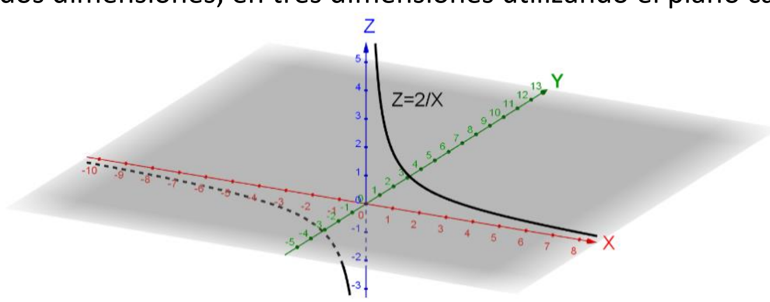
Describa y bosqueje la superficie $xz = 2$

1. Se traza la gráfica en R^2 analizando x vrs y. Siendo esta una función irracional $z = \dfrac{2}{x}$ siendo el valor x=0 una asíntota vertical

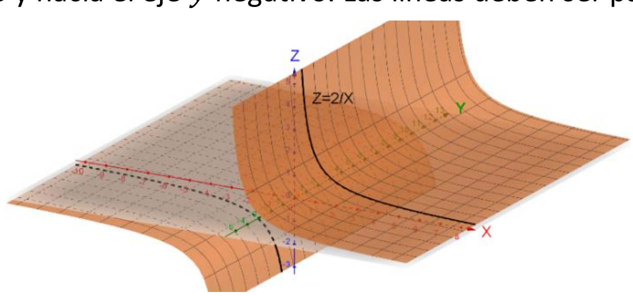
x	$z = 2/x$
-3	-0.667
-2	-1.000
-1	-2.000
0	Asíntota Vertical
1	2.000
2	1.000
3	0.667



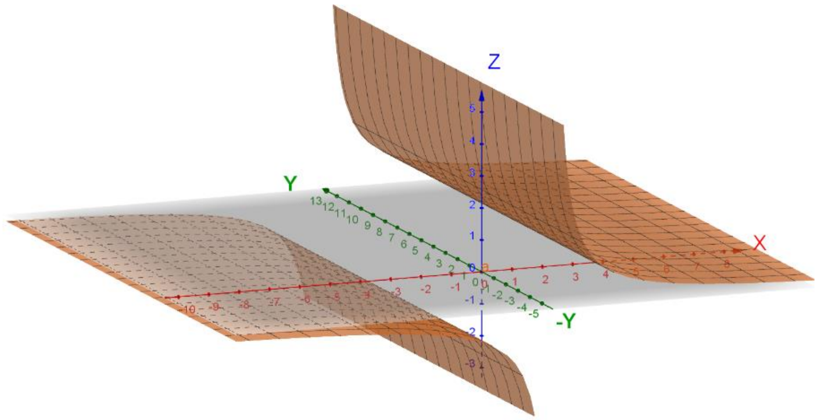
2. Se traza la gráfica de dos dimensiones, en tres dimensiones utilizando el plano cartesiano.



3. Corriendo la función en el eje y, que es el eje faltante en la ecuación, se desplaza la gráfica del paso 2 hacía el eje y positivo y hacia el eje y negativo. Las líneas deben ser paralelas al eje y



4. Quedando la gráfica:



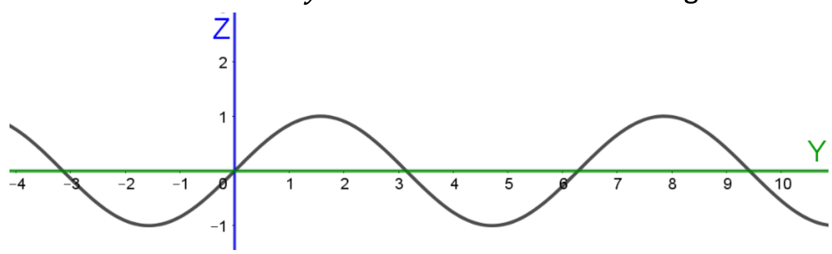
Al ver la superficie en dos dimensiones se deduce que es un cilindro hiperbólico

NOTA: El detalle de la gráfica y el ángulo de vista depende del matemático, similar a los detalles del dibujante con los planos en técnicas complementarias. El matemático le agregará los detalles como los cuadrados que se pueden ver en la gráfica final del ejemplo 2 para que se comprenda el descenso de la superficie.

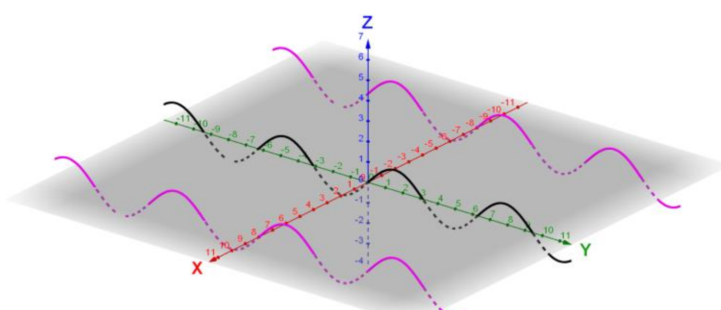
Ejemplo 3

Describa y bosqueje la superficie $z = seny$

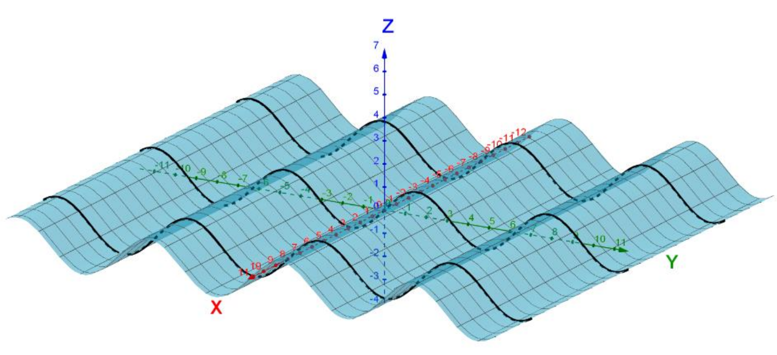
1. Se traza la gráfica en R^2 analizando z vrs y. Siendo esta una función trigonométrica.



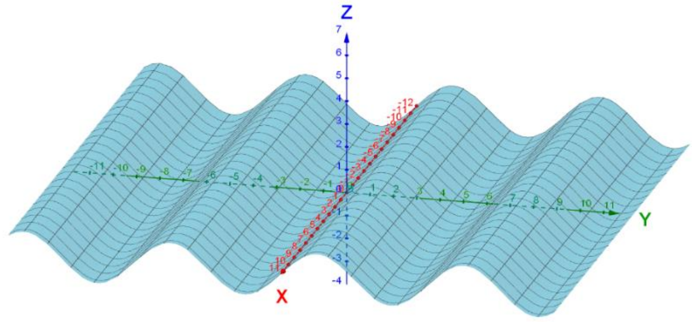
2. Se traza la gráfica de dos dimensiones, en 3 dimensiones utilizando el plano cartesiano. Luego se proyecta en el eje x, tanto el positivo como el negativo.



3. Se corre la gráfica en el eje x, uniendo las gráficas trazadas en el paso 2.



4. Quedando la gráfica:



7.6.2. Superficies cuádricas

Una superficie cuádrica es la gráfica de una ecuación en términos de tres variables x, y y z. Los términos principales de las variables son de segundo grado. Su ecuación general es:

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{C}z^2 + \mathrm{D}xy + \mathrm{E}xz + \mathrm{F}yz + \mathrm{G}x + \mathrm{H}y + \mathrm{I}z + \mathrm{J} = 0$$

Donde:

$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$ y J son constantes

¿Cómo se trazan las gráficas de las superficies cuádricas?

1. Se trazan las vistas del isométrico o superficie
   1.1. Cuando $x = 0$ => Se pasa un plano vertical yz (analiza la elevación de la superficie yz)
   1.2. Cuando $y = 0$ => Se pasa un plano vertical xz (analiza la elevación de la superficie xz)
   1.3. Cuando $z = 0$ => Se pasa un plano horizontal xy (analiza la planta de la superficie)

2. Se plantea los cortes de la superficie, variando el corte en cada eje con una constante K. El valor de la constante. Vulgarmente se dice que es similar a pasar un machetazo en la gráfica a un valor k

$$z = k$$
$$x = k$$
$$y = k$$

3. El trazo de las superficies es como la de un isométrico cualquiera, en la cual teniendo sus vistas se imagina y dibuja el isométrico. Se unen las gráficas del paso 1 y 2 en el plano cartesiano de tres dimensiones para comprender y por último se le agregan detalles de achurado.

Ejemplo 1

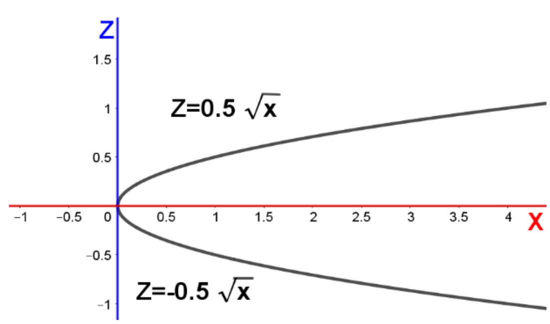
Use trazas para bosquejar e identificar la superficie: $x = y^2 + 4z^2$

1. Se traza la vista cuando $x = 0$

$$0 = y^2 + 4z^2 \quad \text{solo responde a} \quad y = 0 \quad \text{y} \quad z = 0$$

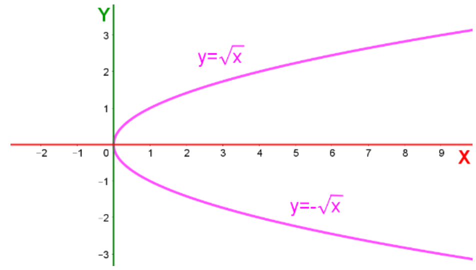
2. Se traza la vista cuando $y = 0$

$$x = (0)^2 + 4z^2 \quad => \quad x = 4z^2 \quad => \quad z = \pm\frac{1}{2}\sqrt{x}$$

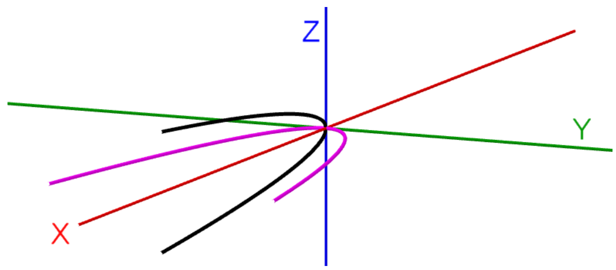


3. Se traza la vista cuando $z = 0$

$$x = y^2 + 4(0)^2 \quad => \quad x = y^2 \quad => \quad y = \pm\sqrt{x}$$

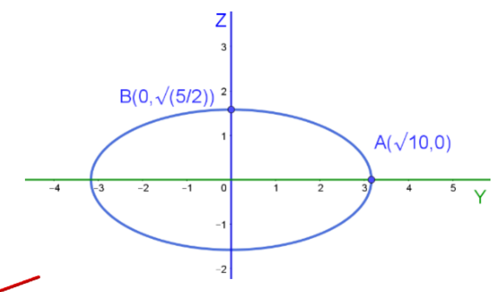


4. Teniendo esas dos vistas se comienza a armar el isométrico, utilizando la imaginación de que es un cilindro hiperbólico que abre hacia el eje x

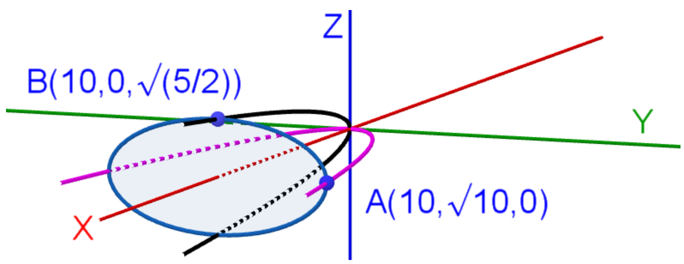


5. Para conocer más del comportamiento de la gráfica, se podría conocer el corte en $x = 10$

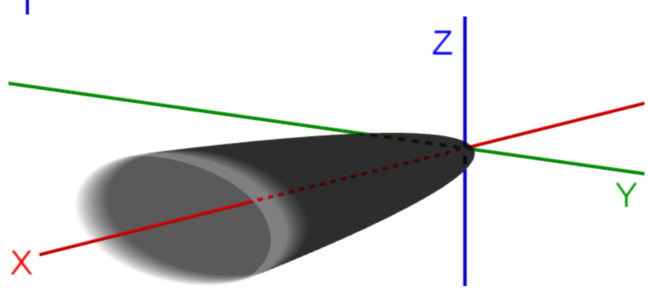
$$x = y^2 + 4z^2$$
$$10 = y^2 + 4z^2$$
$$1 = \frac{y^2}{10} + \frac{z^2}{5/2}$$



6. Quedando en tres dimensiones



7. La superficie será un cilindro parabólico:

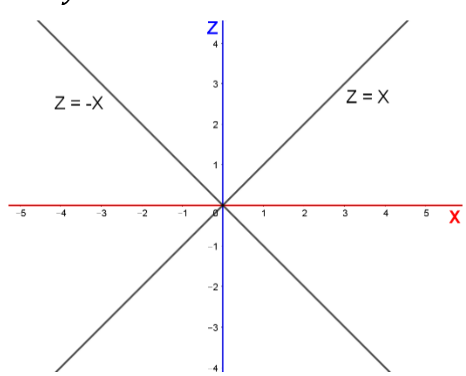


Ejemplo 2

Use trazas para bosquejar e identificar la superficie: $y = z^2 - x^2$

1. Se traza la vista cuando $y = 0$

$$y = z^2 - x^2$$
$$0 = z^2 - x^2$$
$$z^2 = x^2$$
$$z = \pm x$$



2. La vista cuando $y = k$. Esto para ver si se mantiene el corte en forma de rectas o varía su forma.

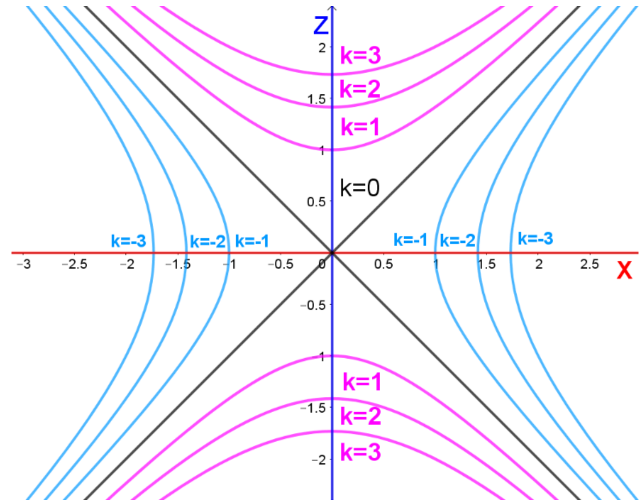
$$k = z^2 - x^2$$

$$1 = \frac{z^2}{k} - \frac{x^2}{k} \quad \text{forma general}$$

Siendo una gráfica hipérbola

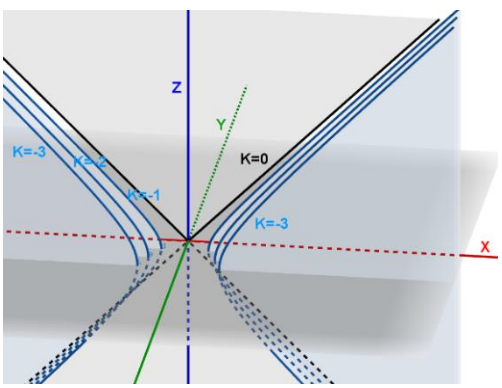
Con diagonal k, k

$k > 0$	$k < 0$
$\mathbf{k = 1 \;;\; 1 = \frac{z^2}{1} - \frac{x^2}{1}}$	$\mathbf{k = -1 \;;\; 1 = \frac{z^2}{1} - \frac{x^2}{1}}$
$\mathbf{k = 2 \;;\; 1 = \frac{z^2}{1} - \frac{x^2}{1}}$	$\mathbf{k = -2 \;;\; 1 = \frac{z^2}{1} - \frac{x^2}{1}}$
$\mathbf{k = 3 \;;\; 1 = \frac{z^2}{1} - \frac{x^2}{1}}$	$\mathbf{k = -3 \;;\; 1 = \frac{z^2}{1} - \frac{x^2}{1}}$

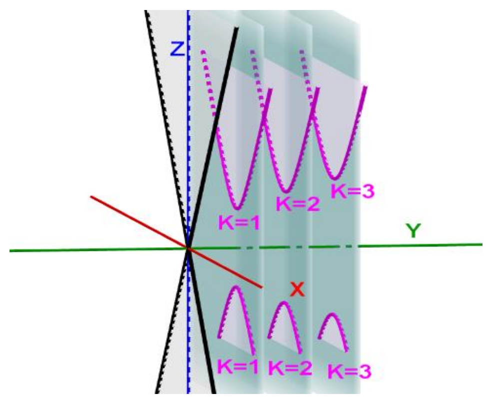


3. La vista de estos cortes en 3D será:

$k < 0$



$k > 0$

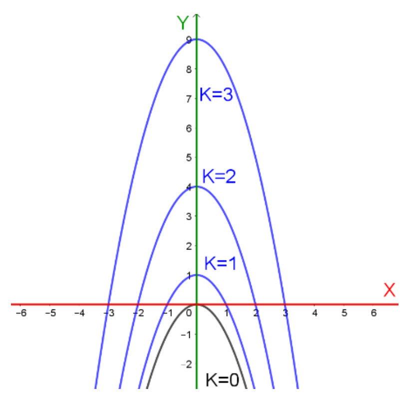


4. Se analiza los cortes en el eje z. Para ello se sustituye la constante con $z = k$

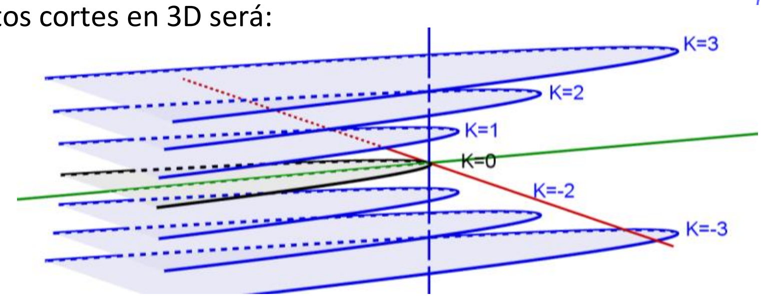
$$y = z^2 - x^2$$
$$y = k^2 - x^2$$

4.1. El valor de k tanto para negativo como positivo darán la misma parábola

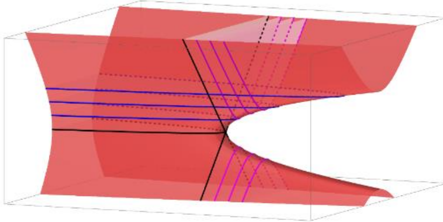
$k > 0$	$k < 0$
$\mathrm{k} = 1 \;;\; y = 1 - x^2$	$\mathrm{k} = -1 \;;\; y = 1 - x^2$
$\mathrm{k} = 2 \;;\; y = 4 - x^2$	$\mathrm{k} = -2 \;;\; y = 4 - x^2$
$\mathrm{k} = 3 \;;\; y = 9 - x^2$	$\mathrm{k} = -3 \;;\; y = 9 - x^2$

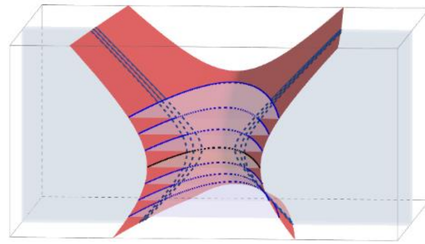


5. La vista de estos cortes en 3D será:

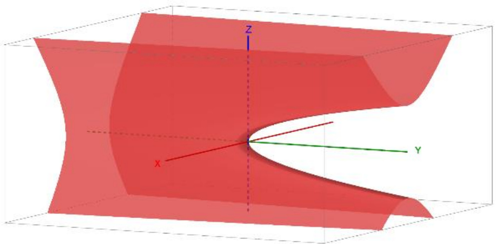


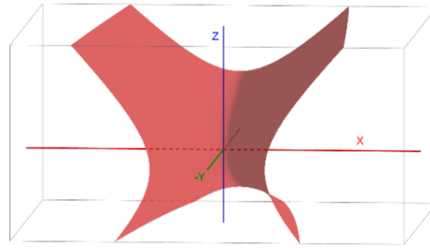
6. El trazo de la superficie (isométrico) tomando en cuenta las vistas de los pasos anteriores:





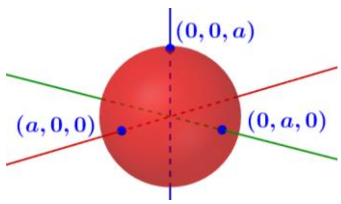
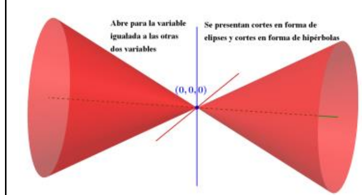
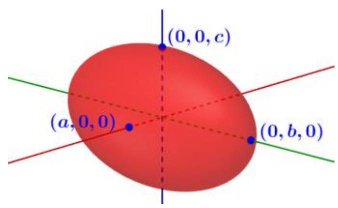
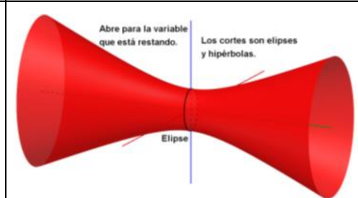
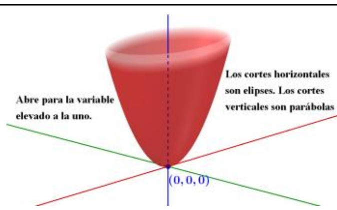
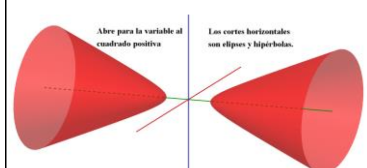
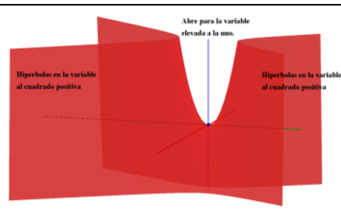
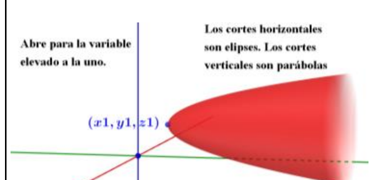
7. Quedando la superficie cuádrica:





A continuación, se le deja una tabla de resumen con las superficies más famosas.

Tabla 7.1. a

No.	Ecuación Matemática	Superficie	No.	Ecuación Matemática	Superficie
1	Esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$		5	Cono $\frac{y^2}{a^2}=\frac{x^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$	
2	Elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		6	Hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-\frac{y^2}{c^2}=1$	
3	Paraboloide elíptico $\frac{z}{a}=\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{c^2}$		7	Hiperboloide de dos hojas $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
4	Paraboloide hiperbólico $\frac{z}{a}=\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{c^2}$		8	Paraboloide elíptico desplazado $y-y_1=a(x-x_1)^2$ $+b(z-z_1)^2$	

La tabla 7.1.a servirá para trazar otras gráficas, tomando como referencia las identificadas anteriormente. Para ello vea los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3

Reduzca la ecuación a una de las formas estándar, clasifique la superficie y bosquéjela.

$$4x^2+y^2+4z^2-4y-24z+36=0$$

1. Se reduce la ecuación, adjuntando las variables en cada grupo

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4y - 24z + 36 = 0$$
$$4x^2 + y^2 - 4y + 4z^2 - 24z + 36 = 0$$
$$4x^2 + y^2 - 4y + a^2 + 4z^2 - 24z + b^2 + 36 = a^2 + b^2$$

1.1. Encontrando a y b para convertir a trinomio cuadrado perfecto.

$y^2 - 4y + a^2 = (y-a)^2$ $\qquad$ $4z^2 - 24z + b^2 = (2z - b)^2$

$2 * y * a = 4y$ $\qquad$ $2 * 2z * b = 24z$

$a = 2$ $\qquad$ $b = 6$

1.2. Continuando

$$4x^2 + y^2 - 4y + a^2 + 4z^2 - 24z + b^2 + 36 = a^2 + b^2$$
$$4x^2 + y^2 - 4y + 4 + 4z^2 - 24z + 36 + 36 = 4 + 36$$
$$4x^2 + (y-2)^2 + (2z-6)^2 + 36 = 40$$
$$4x^2 + (y-2)^2 + [(2)(z-3)]^2 = 4$$
$$4x^2 + (y-2)^2 + 4(z-3)^2 = 4$$

1.3. Dividiendo entre 4.

$$\frac{x^2}{1} + \frac{(y-2)^2}{4} + \frac{(z-3)^2}{1} = 1$$

Lo que da como resultado un elipsoide desplazado con centro en $(0, 2, 3)$

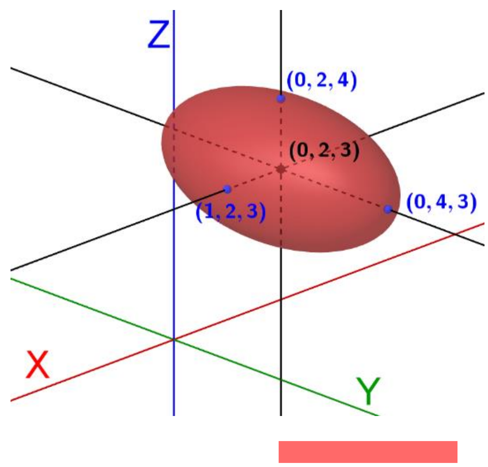
2. Para el trazo de la gráfica se toma de referencia la Tabla 7.1.a

2.1. Se traza primero el centro de la elipse.

2.2. Para encontrar los extremos de la gráfica se utiliza el centro y de referencia la tabla 7.1.a

$$\frac{x^2}{1} + \frac{(y-2)^2}{4} + \frac{(z-3)^2}{1} = 1 \quad ; \quad (0, 2, 3)$$

$$x = 1 + 0 = 1 \qquad \text{(para el extremo en } x\text{)}$$



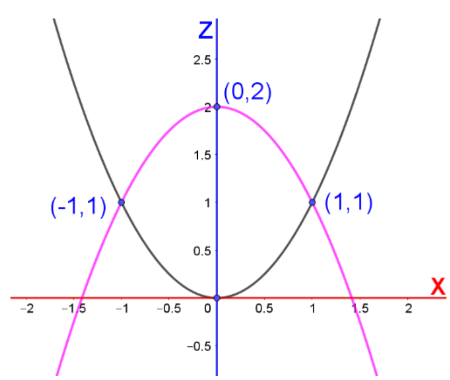
Ejemplo 4

Bosqueje la región acotada por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$

1. Se trazan ambas superficies en R2 analizando sus puntos de intercepto

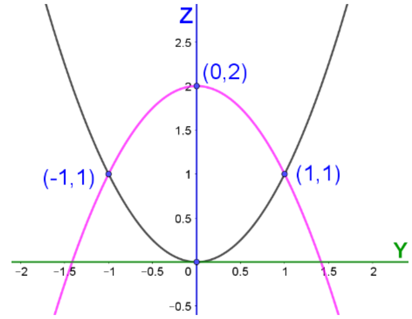
1.1. Corte de $y = 0$

$$z = x^2 \qquad z = 2 - x^2$$
$$z = z$$
$$x^2 = 2 - x^2$$
$$2x^2 = 2$$
$$x = \pm 1$$

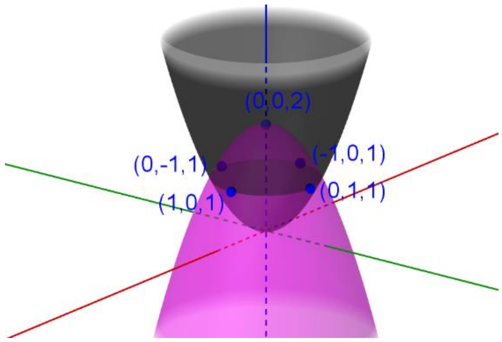


1.2. Corte de $x = 0$

$$z = y^2 \qquad z = 2 - y^2$$
$$z = z$$
$$y^2 = 2 - y^2$$
$$2y^2 = 2$$
$$y = \pm 1$$



2. Ambas superficies en un mismo plano cartesiano serán:



Note que el corte de intersección es una circunferencia de radio 1.00

Hay problemas donde se solicita encontrar la ecuación de la superficie cuádrica bajo algunas condiciones de cálculo, como el siguiente problema.

Ejemplo 5

a) Encuentre la ecuación de la esfera con centro en $\mathrm{P}(6\,,4\,,9)$ y es tangente al plano $2x + 3y + 4z - 12 = 0$

b) ¿Cuál es el punto de tangencia?

Conceptualizando

Para encontrar el valor del radio se utiliza el conocimiento del tema distancia entre un plano y un punto, ya que debe recordar que la distancia D era a 90 grados del plano, por lo tanto, al ser la circunferencia tangente al plano, también debe tener el radio y el plano a 90 grados.

1. Se encuentra el radio utilizando la ecuación 7.14.

Plano

$$2x + 3y + 4z - 12 = 0$$
$$n = \text{normal al plano} = \langle 2\,,3\,,4\rangle$$
$$\boldsymbol{a = 2} \quad ; \quad \boldsymbol{b = 3} \quad ; \quad \boldsymbol{c = 4} \quad ; \quad \boldsymbol{d = -12}$$

Centro de la circunferencia

$$\mathrm{P}(6\,,4\,,9)$$
$$x_1 = 6 \quad ; \quad y_1 = 4 \quad \text{y} \quad z_1 = 9$$

$$\mathrm{D} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2(6) + 3(4) + 4(9) - 12|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{48}{\sqrt{29}}$$

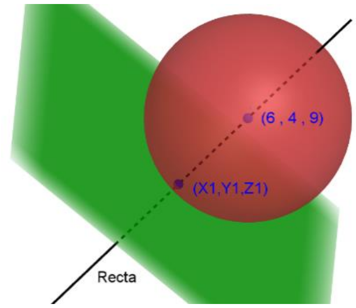
2. Siendo la distancia D igual al radio de la circunferencia y teniendo el centro, se encuentra la ecuación matemática de la esfera.

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = \mathrm{D}^2 \qquad \text{Ecuación general desplazada}$$

3. La respuesta del inciso a) será:

$$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 + (z - 9)^2 = \frac{2304}{29}$$

Conceptualización



Para encontrar el punto de tangencia es necesario formular la ecuación de la recta que une al centro de la circunferencia $(6{,}4{,}9)$ con el punto tangente $(x_1\ ,\ \ y_1\ ,\ \ z_1)$. Para encontrar dicha recta se debe saber que la pendiente de la recta (llamado vector directriz) tiene las mismas componentes del vector normal del plano, pues esa recta debe estar a 90 grados al ser tangente, que es una condición del problema.

1. Se plantea la ecuación de la recta tomando de referencia la normal del plano.

RECTA	**PLANO**
$\vec{r} = \langle x_0 + at\ ,\ \ y_0 + bt\ ,\ \ z_0 + ct \rangle$	$2x + 3y + 4z - 12 = 0$
$\vec{r} = \langle 6 + at\ ,\ \ 4 + bt\ ,\ \ 9 + ct \rangle$	$n = \langle\ 2\ ,3\ ,4\ \rangle$

1.1. Sustituyendo los valores del vector directriz.

$$\boldsymbol{a = 2} \quad ; \quad \boldsymbol{b = 3} \quad ; \quad \boldsymbol{c = 4}$$
$$\vec{r} = \langle 6 + 2t\ ,\ \ 4 + 3t\ ,\ \ 9 + 4t \rangle$$

2. Ahora se analiza las ecuaciones simétricas:

$$x = 6 + 2t \qquad y = 4 + 3t \qquad z = 9 + 4t$$

3. Sustituyendo los resultados del paso 2. En la ecuación del plano para encontrar los interceptos de la recta con el plano.

$$2x + 3y + 4z - 12 = 0$$
$$2(6 + 2t) + 3(4 + 3t) + 4(9 + 4t) - 12 = 0$$
$$12 + 4t + 12 + 9t + 36 + 16t - 12 = 0$$
$$29t + 48 = 0$$
$$t = -\frac{48}{29} \qquad \text{(valor del parámetro)}$$

4. Sustituyendo el valor del parámetro en x, y y z.

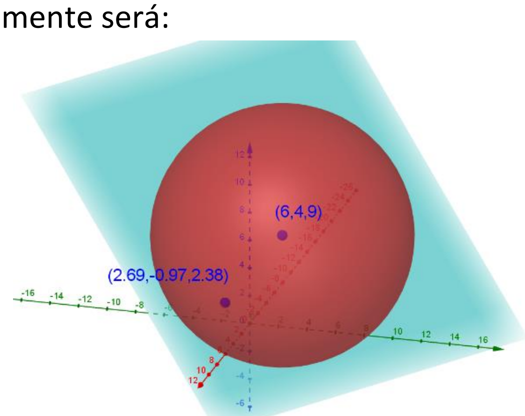
$$x = 6 + 2\left(-\frac{48}{29}\right) \qquad y = 4 + 3\left(-\frac{48}{29}\right) \qquad z = 9 + 4\left(-\frac{48}{29}\right)$$

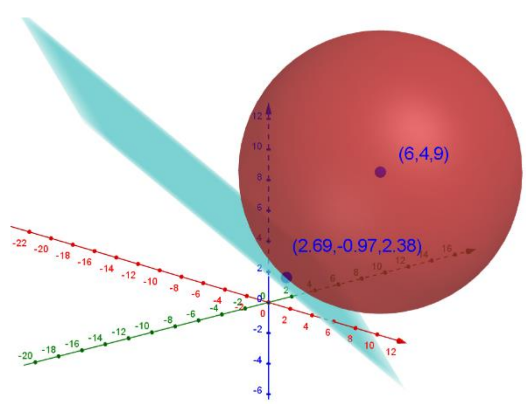
$$x = \frac{78}{29} \qquad y = -\frac{28}{29} \qquad z = \frac{69}{29}$$

5. El punto de tangencia será:

$$(x_1\ ,\ \ y_1\ ,\ \ z_1)\ =\ \left(\frac{78}{29}\ ,\ \ -\frac{28}{29}\ ,\ \ \frac{69}{29}\right) =\ (2.689\ ,\ \ -0.966\ ,\ \ 2.379)$$

6. Gráficamente será:



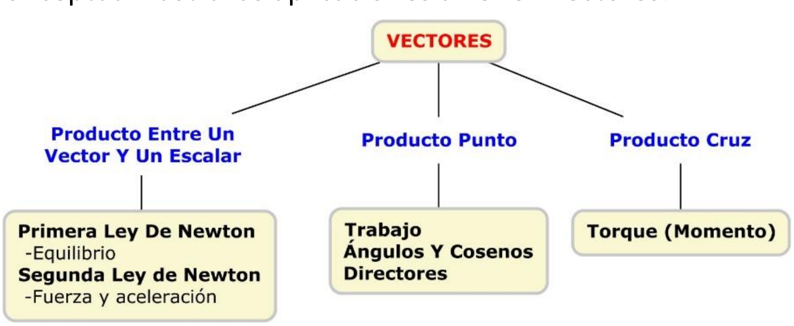


7-APLICACIÓN DE VECTORES Y GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

7.7. APLICACIÓN DE VECTORES Y GEOMETRÍA

En esta sección se analizarán las aplicaciones más comunes de los vectores y las aplicaciones de superficies en tres dimensiones. En cuanto a vectores quiero comentarle que las aplicaciones vistas en este texto no son todas, puesto que, en la rama de la física clásica, llamada teoría electromagnética clásica, sus teoremas son más notables al momento de la teoría como lo es campo eléctrico (producto cruz), flujo magnético (producto punto) y fuerza magnética (producto cruz). Las aplicaciones que se verán a continuación son más sencillas de comprender, ya que son problemas con los que nos topamos todos los días en el mundo real.

El siguiente mapa conceptual ilustra las aplicaciones a ver en vectores.



En la portada se representa la admiración que usted debe sentir por este capítulo, así como a la determinación de afrontar lo ultimo de este texto, para aprender y ser mejor cada día.

7.7.1. Producto entre un vector y un escalar

Debe recordar que este tema no es más que incrementar o disminuir un vector dado.

$$\vec{A} = \text{Vector A} \qquad \text{K} = \text{constante}$$

$$\vec{B} = \vec{A} * K$$

El vector $\vec{B}$ se incrementará si $K > 1$ y se reducirá si $0 < K < 1$

El vector $\vec{B}$ invertirá su dirección si $K < 0$

A continuación, analizaremos las dos leyes de newton (se enfocan a fuerzas) donde se aplicará el producto entre un vector y un escalar.

A. Primera ley de Newton

- **Fuerza:** De acuerdo con física universitaria 1 (Sears y Zemansky, 2013) es una interacción entre dos cuerpos o entre un cuerpo y su ambiente. Es la causa de por qué siempre nos referimos a la fuerza que un cuerpo ejerce sobre un segundo cuerpo. Cuando empujamos un automóvil atascado en la nieve, ejercemos una fuerza sobre el auto; un cable de acero ejerce una fuerza sobre la viga que levanta en una construcción, etcétera. En el sistema internacional la fuerza se mide en newton, mientras que en el sistema inglés la mide en libras.

- **La primera ley de Newton:** De acuerdo con física universitaria 1 (Sears y Zemansky, 2013) un cuerpo sobre el que no actúa una fuerza neta se mueve con velocidad constante (que puede ser cero) y aceleración cero.

  También llamada ley de inercia, establece que, si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (equilibrio estático) o la partícula se moverá a velocidad constante en línea recta (equilibrio dinámico) a menos que una fuerza neta externa actúe sobre él. La ecuación que representa a ambos equilibrios, dinámico o estático es:

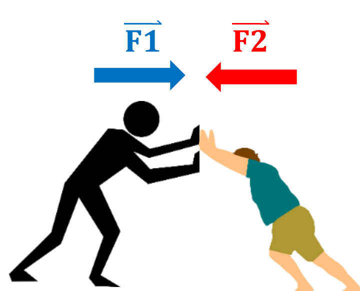
$$\boxed{\sum \vec{F} = 0} \qquad \textbf{Ecuación 7.15}$$

- ✓ El equilibrio estático se da cuando un cuerpo no se mueve (Se encuentra en reposo)
- ✓ El equilibrio dinámico se da cuando un cuerpo se mueve a velocidad constante (no tiene aceleración)

  Ambas definiciones de física universitaria 1 (Sears y Zemansky, 2013)

Equilibrio estático

El equilibrio estático ocurre cuando existen dos o más fuerzas sobre un cuerpo, pero el cuerpo no se mueve, está en reposo. Justo como la imagen siguiente:



$$|\,\mathbf{F1}\,| = |\,\mathbf{F2}\,|$$

Note como las dos personas se empujan una a la otra, pero no se mueven. Eso sucede debido a que el sistema (las dos personas) se encuentran en equilibrio estático. La mejor forma de resolver estos problemas será descomponiendo las fuerzas en sus componentes y encontrar lo solicitado.

Los problemas se presentan en dos dimensiones y en 3 dimensiones. Las ecuaciones al analizar las componentes sobre el sistema serán:

$$\boxed{\sum \mathrm{F_x} = 0 \qquad \sum \mathrm{F_y} = 0 \qquad \sum \mathrm{F_y} = 0} \qquad \textbf{Ecuaciones 7.16}$$

Otra ecuación que se va a utilizar es la multiplicación de un vector por un escalar, es la **relación masa-peso**. La gravedad es una aceleración que apunta hacia abajo, la masa es un escalar. El peso es el resultado de multiplicar la aceleración con la masa así mismo el peso apunta hacia abajo (tal como la aceleración)

$$\mathrm{w} = \text{peso (Cantidad Vectorial)} \quad ; \quad m = \text{masa} \quad ; \quad g = \text{gravedad o aceleración (vector)}$$

$$\boxed{\vec{\mathrm{w}} = m * \vec{g}} \qquad \textbf{Ecuación 7.17}$$

$$\mathrm{N} = \mathrm{Kg} * {}^{m}/_{s^2} \quad \text{(Sistema Internacional)} \qquad \mathrm{Lb} = \mathrm{Slug} * {}^{\mathrm{ft}}/_{s^2} \quad \text{(Sistema Inglés)}$$

$$\mathrm{N} = \text{Newton} \;;\; \mathrm{Kg} = \text{Kilogramo} \;;\; {}^{m}/_{s^2} = \text{aceleración} \qquad \mathrm{Lb} = \text{Libra} \;;\; \text{Slug} = \text{masa} \;;\; {}^{\mathrm{ft}}/_{s^2} = \text{aceleración}$$

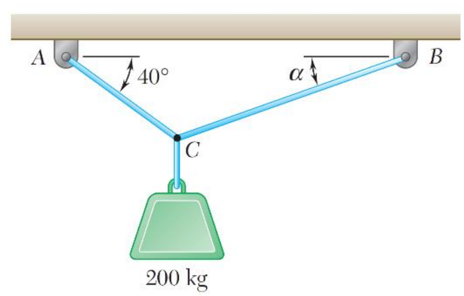
También es útil para resolver estos problemas un **diagrama de cuerpo libre,** donde se representa por un plano cartesiano

Ejemplo 1

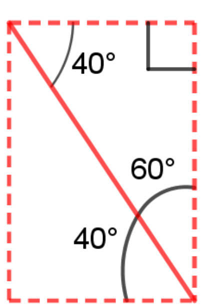
En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que $\alpha = 20°$ determine la tensión en:

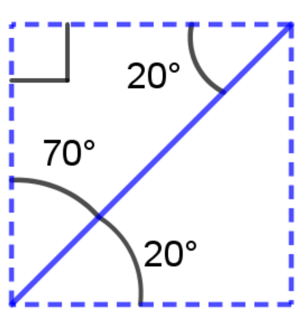
a) en el cable AC

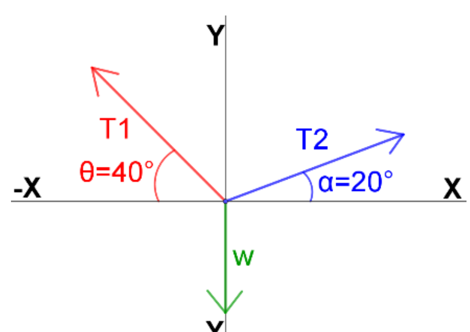
b) en el cable BC



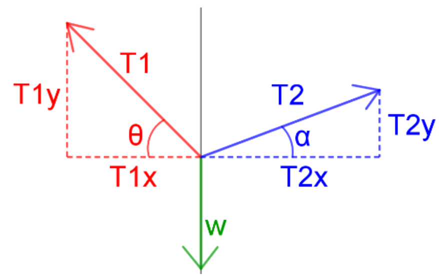
1. Se realiza un diagrama de cuerpo libre sobre el punto C. Las fuerzas por incluir son tres, la fuerza de A a C (siendo tensión porque tensa o jala el cable) la fuerza de B a C (también está a tensión) y el peso (ya que se proporciona la masa) del objeto verde.







2. Se procede a encontrar las componentes de cada vector.



$$\text{sen}\theta = \frac{\text{Cat. Op}}{\text{Hipot.}} = \frac{T1_y}{T1} \quad ; \quad \cos\theta = \frac{\text{Cat. ady}}{\text{Hipot.}} = \frac{T1_x}{T1}$$

$$T1\ \text{sen}\theta = T1_y \quad ; \quad T1\cos\theta = T1_x$$

$$T1\ \text{sen}40 = T1_y \quad ; \quad T1\cos 40 = T1_x$$

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{Cat. Op}}{\text{Hipot.}} = \frac{T2_y}{T2} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{\text{Cat. ady}}{\text{Hipot.}} = \frac{T2_x}{T2}$$

$$T2\ \text{sen}\ \alpha = T2_y \quad\quad T2\cos\alpha = T2_x$$

$$T2\ \text{sen}20 = T2_y \quad\quad T2\cos 20 = T2_x$$

Componentes de w

$$w_y = w = m * g \quad ; \quad w_x = 0$$

$$w_y = w = 200\ \text{Kg} * 9.81\ {}^{m}/_{s^2}$$

$$w_y = w = 1962\ \text{N}$$

3. Aplicando las ecuaciones 7.17.

$$\sum F_x = 0 \quad \xrightarrow{+}$$

$$T2_x - T1_x = 0$$

$$T2_x = T1_x$$

$$T2\cos 20 = T1\cos 40$$

$$T2 = \frac{T1\cos 40}{\cos 20} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad + \uparrow$$

$$T2_y + T1_y - w = 0$$

$$T2\ \text{sen}20 + T1\ \text{sen}40 - 1962 = 0 \quad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2)

$$\frac{T1\cos 40}{\cos 20} * \ \text{sen}20 + T1\ \text{sen}40 - 1962 = 0$$

$$T1\left(\frac{\cos 40}{\cos 20} * \ \text{sen}20 + \text{sen}40\right) = 1962$$

$$T1 = \frac{1962}{\frac{\cos 40}{\cos 20} * \ \text{sen}20 + \text{sen}40} = 2{,}128.9\ \text{N}$$

3.1. Sustituyendo T1 en (1)

$$T2 = \frac{T1\cos 40}{\cos 20} = \frac{2128.9 * \ \cos 40}{\cos 20} = 1{,}735.5\ \text{N}$$

4. La respuesta será

$$T_1 = F_{AC} = 2{,}128.9\ \text{N} \quad ; \quad T_2 = F_{BC} = 1{,}735.5\ \text{N}$$

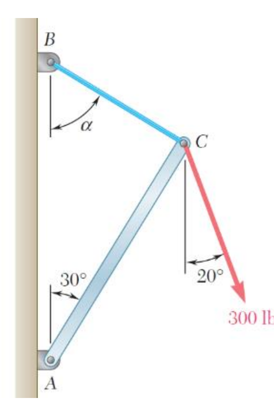
NOTA: Si una fuerza planteada da como resultado un valor negativo, la dirección se tomó equivocada y por tanto va a 180 grados de la dirección planteada.

Ejemplo 2

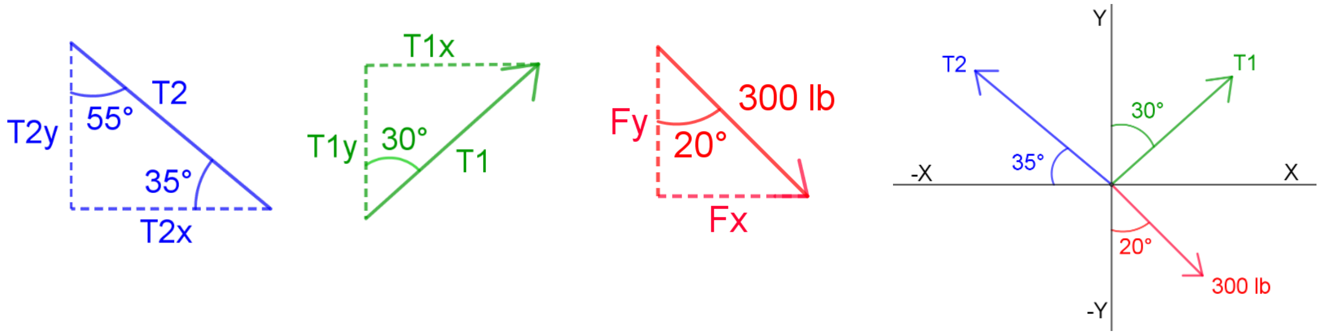
Si se sabe que α = 55° y que el aguilón AC ejerce sobre la articulación C una fuerza dirigida a lo largo de la línea AC, determine:

a) la magnitud de la fuerza

b) la tensión en el cable BC



1. Se realiza el diagrama de cuerpo libre en el punto C, siendo el que converge las tres fuerzas aplicadas.



2. Se procede a encontrar las componentes de cada fuerza $F_{BC} = T2$; $F_{AC} = T1$

$$\operatorname{sen} 35 = \frac{T2y}{T2} \; ; \; \cos 35 = \frac{T2x}{T2} \qquad \operatorname{sen} 30 = \frac{T1x}{T1} \quad \cos 30 = \frac{T1y}{T1}$$

$$T2 \operatorname{sen} 35 = T2y \; ; \; T2 \cos 35 = T2x \qquad T1 \operatorname{sen} 30 = T1x \; ; \; T1 \cos 30 = T1y$$

$$\operatorname{sen} 20 = \frac{Fx}{300} \; ; \; \cos 20 = \frac{Fy}{300}$$

$$300 \operatorname{sen} 20 = Fx \; ; \; 300 \cos 20 = Fy$$

3. Planteando las ecuaciones se utiliza la ecuación de equilibrio

$$\sum F_x = 0 \quad \xrightarrow{+} \qquad \sum F_y = 0 \quad \uparrow +$$

$$Fx + T1x - T2x = 0 \qquad T1y + T2y - Fy = 0$$

$$300 \operatorname{sen} 20 + T1 \operatorname{sen} 30 - T2 \cos 35 = 0 \qquad T1 \cos 30 + T2 \operatorname{sen} 35 - 300 \cos 20 = 0$$

$$\frac{300 \operatorname{sen} 20 + T1 \operatorname{sen} 30}{\cos 35} = T2 \quad (1)$$

Sustituyendo (1) en T2

$$T1 \cos 30 + T2 \operatorname{sen} 35 - 300 \cos 20 = 0$$

$$T1 \cos 30 + \left(\frac{300 \operatorname{sen} 20 + T1 \operatorname{sen} 30}{\cos 35}\right) \operatorname{sen} 35 - 300 \cos 20 = 0$$

$$T1 \cos 30 + 300 \operatorname{sen}20 \tan35 + T1 \operatorname{sen}30 \tan35 = 300 \cos 20$$

$$T1(\cos 30 + \operatorname{sen}30 \tan35) = 300 \cos 20 - 300 \operatorname{sen}20 \tan35$$

$$T1 = \frac{300 \cos 20 - 300 \operatorname{sen}20 \tan35}{\cos 30 + \operatorname{sen}30 \tan35} = \frac{210.06226}{1.21613} = 172.73 \text{ Lb}$$

3.1. Sustituyendo T1 en (1)

$$\frac{300 \operatorname{sen} 20 + T1 \operatorname{sen} 30}{\cos 35} = T2$$

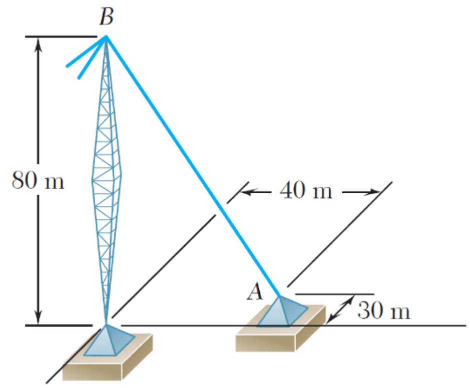
$$\frac{300 \operatorname{sen} 20 + (172.73) \operatorname{sen} 30}{\cos 35} = T2 \qquad => \qquad T2 = 230.69 \text{ lb}$$

4. La respuesta será

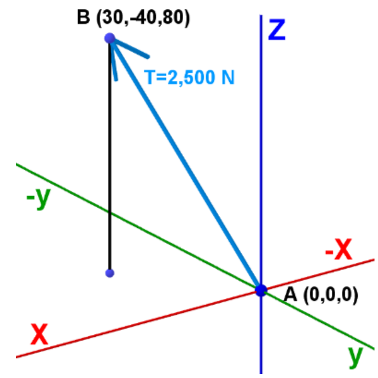
$$T_1 = F_{AC} = 172.73 \text{ Lb} \qquad ; \qquad T_2 = F_{BC} = 230.69 \text{ Lb}$$

Ejemplo 3 (Equilibrio en 3 dimensiones)

El alambre de una torre está anclado en A por medio de un perno. La tensión en el alambre es de 2 500 N. Determine las componentes Fx, Fy y Fz de la fuerza que actúa sobre el perno.



1. Se procede a insertar un plano cartesiano, puede ser en el punto A o en el punto B. En este ejemplo se tomará el punto A como referencia



$$\text{Punto A } (0,0,0)$$

$$\text{Punto B } (30,-40,80) \quad \text{ver imagen}$$

Al estar en tensión el cable, la torre está Jalando el alambre por tanto, su dirección está de A hacia B tal como la imagen de la derecha.

1. Se obtiene el vector AB

$$V_{AB} = \text{Punto B} - \text{Punto A} = \langle\, 30-0\,, -40-0\,, 80-0\,\rangle$$

$$V_{AB} = \langle\, 30\,, -40\,,\; 80\,\rangle$$

2. Se obtiene la magnitud del vector AB

$$\|V_{AB}\| = \sqrt{30^2 + (-40)^2 + 80^2}$$

$$\|V_{AB}\| = \sqrt{8{,}900} \;=\; 10\sqrt{89}$$

3. El vector unitario será:

$$u = \frac{V_{AB}}{\|V_{AB}\|} = \frac{1}{10\sqrt{89}}\langle\, 30\,, -40\,,\; 80\,\rangle = \left\langle \frac{30}{10\sqrt{89}}\,, \frac{-40}{10\sqrt{89}}\,, \frac{80}{10\sqrt{89}} \right\rangle = \left\langle \frac{3}{\sqrt{89}}\,, \frac{-4}{\sqrt{89}}\,, \frac{8}{\sqrt{89}} \right\rangle$$

4. Se multiplica la fuerza por el vector unitario

$$\langle Fx\,, Fy\,, Fz\rangle = \text{Fuerza} * \text{vector unitario}$$

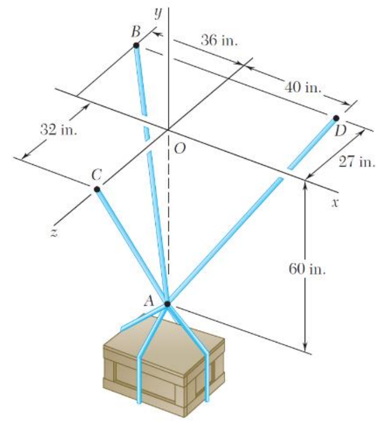
$$\langle Fx\,, Fy\,, Fz\rangle \;=\; 2{,}500 * \left\langle \frac{3}{\sqrt{89}}\,, \frac{-4}{\sqrt{89}}\,, \frac{8}{\sqrt{89}} \right\rangle = \left\langle \frac{7{,}500}{\sqrt{89}}\,, \frac{-10{,}000}{\sqrt{89}}\,, \frac{20{,}000}{\sqrt{89}} \right\rangle$$

5. La respuesta será:

$$\langle Fx\,, Fy\,, Fz\rangle \;=\; \left\langle \frac{7{,}500}{\sqrt{89}}\,, \frac{-10{,}000}{\sqrt{89}}\,, \frac{20{,}000}{\sqrt{89}} \right\rangle = \langle\, 795\text{ N}\,, -1{,}060\text{ N}\,,\; 2{,}120\text{ N}\,\rangle$$

Ejemplo 4 (Equilibrio en 3 Dimensiones)

Tres cables sostienen una caja como se muestra en la figura. Determine el peso de la caja, si se sabe que la tensión en el cable AD es de 616 lb.



1. El plano cartesiano no es necesario, puesto que se nos otorga la ubicación de este. Las tensiones irían hacia arriba, contrarrestando el peso de la caja. Las componentes serán:

$$\text{Punto} = (x, y, z)$$

$$\text{Punto A} = (0, -60, 0) \;\; ; \;\; \text{Punto B} = (-36{,}0, -27) \;\; ; \;\; \text{Punto C} = (0\,{,}0\,{,}32) \;\; ; \;\; \text{Punto D}\ (40{,}0, -27)$$

$$\mathrm{V_{AB}} = \langle -36 - 0{,}0 - (-60), -27 - 0 \rangle \qquad ; \qquad \mathrm{V_{AC}} = \langle 0 - 0{,}0 - (-60), 32 - 0 \rangle$$

$$\mathrm{V_{AD}} = \langle 40 - 0{,}0 - (-60), -27 - 0 \rangle$$

$$\mathrm{V_{AB}} = \langle -36\,, 60\,, -27 \rangle \qquad \mathrm{V_{AC}} = \langle\, 0\,, 60\,, 32 \,\rangle \qquad \mathrm{V_{AD}} = \langle\, 40\,, 60\,, -27 \,\rangle$$

2. La magnitud de cada vector será

$$\|\mathrm{V_{AB}}\| = \sqrt{(-36)^2 + (60)^2 + (-27)^2} = 75 \quad ; \quad \|\mathrm{V_{AC}}\| = \sqrt{(0)^2 + (60)^2 + (32)^2} \;=\; 68$$

$$\|\mathrm{V_{AD}}\| = \sqrt{(40)^2 + (60)^2 + (-27)^2} \;\; = 77$$

3. Los vectores unitarios serán:

$$\mathrm{u_{AB}} = \frac{\mathrm{V_{AB}}}{\|\mathrm{V_{AB}}\|} \qquad ; \qquad \mathrm{u_{AC}} = \frac{\mathrm{V_{AC}}}{\|\mathrm{V_{AC}}\|} \qquad ; \qquad \mathrm{u_{AD}} = \frac{\mathrm{V_{AD}}}{\|\mathrm{V_{AD}}\|}$$

$$\mathrm{u_{AB}} = \frac{\langle -36\,, 60\,, -27 \rangle}{75} \qquad ; \qquad \mathrm{u_{AC}} = \frac{\langle\, 0\,, 60\,, 32 \,\rangle}{68} \qquad ; \qquad \mathrm{u_{AD}} = \frac{\langle\, 40\,, 60\,, -27 \,\rangle}{77}$$

$$\mathrm{u_{AB}} = \langle -\frac{12}{25}, \frac{4}{5}, -\frac{9}{25} \rangle \qquad ; \qquad \mathrm{u_{AC}} = \langle 0\,, \frac{15}{17}, \frac{8}{17} \rangle \qquad ; \qquad \mathrm{u_{AD}} = \langle \frac{40}{77}, \frac{60}{77}, -\frac{27}{77} \rangle$$

4. Las componentes de cada fuerza serán:

$$\langle \mathrm{T_{AB}}x\,, \mathrm{T_{AB}}y\,, \mathrm{T_{AB}}z \rangle = \mathrm{T_{AB}} * \mathrm{u_{AB}} = \mathrm{T_{AB}}\ \langle -\frac{12}{25}, \frac{4}{5}, -\frac{9}{25} \rangle = \langle -\frac{12}{25}\mathrm{T_{AB}}\,, \frac{4}{5}\mathrm{T_{AB}}\,, -\frac{9}{25}\mathrm{T_{AB}} \rangle$$

$$\langle \mathrm{T_{AC}}x\,, \mathrm{T_{AC}}y\,, \mathrm{T_{AC}}z \rangle = \mathrm{T_{AC}} * \mathrm{u_{AC}} = \mathrm{T_{AC}}\ \langle 0\,, \frac{15}{17}, \frac{8}{17} \rangle = \langle 0\,, \frac{15}{17}\mathrm{T_{AC}}\,, \frac{8}{17}\mathrm{T_{AC}} \rangle$$

El problema nos indica que: $\mathrm{T_{AD}} = 616\ \mathrm{Lb}$

$$\langle \mathrm{T_{AD}}x\,, \mathrm{T_{AD}}y\,, \mathrm{T_{AD}}z \rangle = 616 * \mathrm{u_{AD}} = 616 \langle \frac{40}{77}, \frac{60}{77}, -\frac{27}{77} \rangle = \langle\, 320\,,\ 480\,,\ -216 \,\rangle$$

5. Se aplican las ecuaciones de equilibrio estático 7.16. Para ello se necesita ver nuevamente la distribución de tensiones. El peso tendrá componente en el eje y (apuntando hacia abajo).

$$\sum F_x = 0$$

$$TADx + TABx = 0$$

$$320 + \left(-\frac{12}{25} T_{AB}\right) = 0$$

$$T_{AB} = 666.667 \text{ lb}$$

$$T_{AB} = 666.667 \text{ lb}$$

$$\sum F_z = 0$$

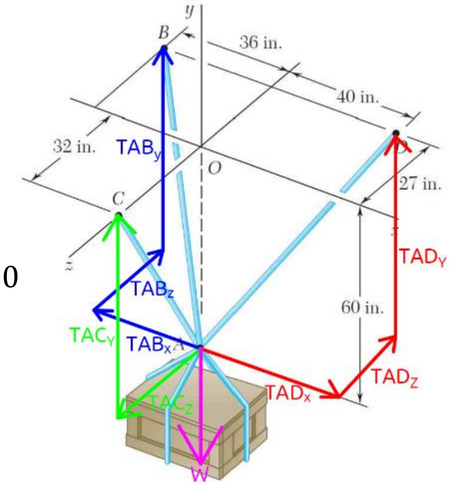
$$TADz + TABz + TACz = 0$$

$$-216 + \left(-\frac{9}{25} T_{AB}\right) + \frac{8}{17} T_{AC} = 0$$

$$-216 + \left(-\frac{9}{25}(666.667)\right) + \frac{8}{17} T_{AC} = 0$$

$$-216 - 240 + \frac{8}{17} T_{AC} = 0$$

$$T_{AC} = 969 \text{ lb}$$



$$\sum F_y = 0$$

$$TADy + TABy + TACy + w = 0$$

$$480 + \left(\frac{4}{5} T_{AB}\right) + \left(\frac{15}{17} T_{AC}\right) = -w$$

$$480 + \left(\frac{4}{5}(666.667)\right) + \left(\frac{15}{17}(969)\right) = -w$$

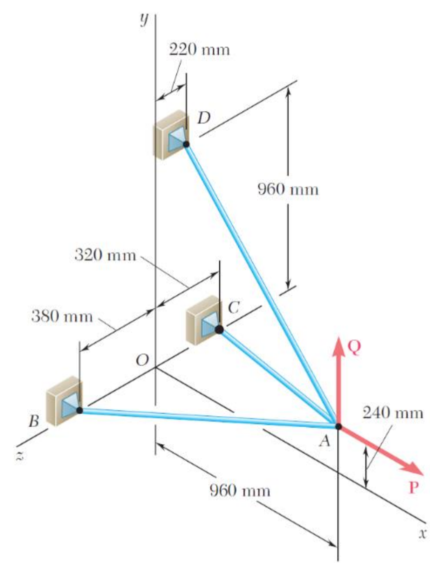
$$-1{,}868.33 \text{ lb} = w$$

6. El peso de la caja (apuntando hacia abajo, por eso el negativo) será:

$$\text{Peso} = w = 1{,}868.33 \text{ lb}$$

Ejemplo 5

Tres cables están conectados en A, donde se aplican las fuerzas problemas 61 P y Q, como se muestra en la figura. Si se sabe que $Q = 0$, encuentre el valor de P para el cual la tensión en el cable AD es de 305 N.



1. Se obtienen los puntos A, B, C y D

   $A = (960,\ 240,\ 0)$ $\quad B = (0,\ 0,\ 380)$

   $C = (0,\ 0,\ -320)$ $\quad D = (0,\ 960,\ -220)$

2. Se obtienen los vectores de las tensiones. Las tensiones deben contrarrestar las fuerzas P y Q (contrarias a ellas)

   $$V_{AB} = \langle 0-960, 0-240, 380-0\rangle = \langle -960, -240, 380\rangle$$
   $$V_{AC} = \langle 0-960, 0-240, -320-0\rangle = \langle -960, -240, -320\rangle$$
   $$V_{AD} = \langle 0-960, 960-240, -220-0\rangle = \langle -960, 720, -220\rangle$$

3. Se obtiene la magnitud de cada vector

   $$\|V_{AB}\| = \sqrt{(960)^2 + (240)^2 + (380)^2} = 1{,}060$$
   $$\|V_{AC}\| = \sqrt{(960)^2 + (240)^2 + (320)^2} = 1{,}040$$
   $$\|V_{AB}\| = \sqrt{(960)^2 + (720)^2 + (220)^2} = 1{,}220$$

4. Los Vectores unitarios serán:

$$u_{AB} = \frac{\langle -960\,, -240\,, 380 \rangle}{1{,}060} \quad ; \quad u_{AC} = \frac{\langle -960\,, -240\,, -320 \rangle}{1{,}040} \quad ; \quad u_{AD} = \frac{\langle -960\,, 720\,, -220 \rangle}{1{,}220}$$

$$u_{AB} = \langle -\frac{48}{53}\,, -\frac{12}{53}\,, \frac{19}{53} \rangle \quad ; \quad u_{AC} = \langle -\frac{12}{13}\,, -\frac{3}{13}\,, -\frac{4}{13} \rangle \quad ; \quad u_{AD} = \langle -\frac{48}{61}\,, \frac{36}{61}\,, -\frac{11}{61} \rangle$$

5. Las componentes serán, sabiendo que TAD=305 N

$$\langle \mathrm{TAB}x\,, \mathrm{TAB}y\,, \mathrm{TAB}z \rangle = \mathrm{TAB} * u_{AB} = \mathrm{TAB}\,\langle -\frac{48}{53}\,, -\frac{12}{53}\,, \frac{19}{53} \rangle = \langle -\frac{48}{53}\mathrm{TAB}\,, -\frac{12}{53}\mathrm{TAB}\,, \frac{19}{53}\mathrm{TAB} \rangle$$

$$\langle \mathrm{TAC}x\,, \mathrm{TAC}y\,, \mathrm{TAC}z \rangle = \mathrm{TAC} * u_{AC} = \mathrm{TAC}\,\langle -\frac{12}{13}\,, -\frac{3}{13}\,, -\frac{4}{13} \rangle = \langle -\frac{12}{13}\mathrm{TAC}\,, -\frac{3}{13}\mathrm{TAC}\,, -\frac{4}{13}\mathrm{TAC} \rangle$$

$$\langle \mathrm{TAD}x\,, \mathrm{TAD}y\,, \mathrm{TAD}z \rangle = 305 * u_{AD} = 305\,\langle -\frac{48}{61}\,, \frac{36}{61}\,, -\frac{11}{61} \rangle = \langle -240\,, 180\,, -55 \rangle$$

6. La sumatoria de componentes tomando las ecuaciones de equilibrio serán:

$$\sum F_z = 0 \qquad\qquad \sum F_y = 0$$

$$\mathrm{TAB}z + \mathrm{TAC}z + \mathrm{TAD}z = 0 \qquad\qquad \mathrm{TAB}y + \mathrm{TAC}y + \mathrm{TAD}y = 0$$

$$\frac{19}{53}\mathrm{TAB} - \frac{4}{13}\mathrm{TAC} - 55 = 0 \qquad\qquad -\frac{12}{53}\mathrm{TAB} - \frac{3}{13}\mathrm{TAC} + 180 = 0$$

6.1. Se encuentran las tensiones TAB y TAC

$$\frac{19}{53}\mathrm{TAB} - \frac{4}{13}\mathrm{TAC} - 55 = 0 \qquad\qquad -\frac{12}{53}\mathrm{TAB} - \frac{3}{13}\mathrm{TAC} + 180 = 0$$

$$247\ \mathrm{TAB} - 212\ \mathrm{TAC} - 37{,}895 = 0 \qquad\qquad -156\ \mathrm{TAB} - 159\ \mathrm{TAC} + 124{,}020 = 0$$

$$\mathrm{TAB} = \frac{2{,}915}{19} + \frac{212}{247}\ \mathrm{TAC} \quad (1) \qquad\qquad -156\ \mathrm{TAB} - 159\ \mathrm{TAC} + 124{,}020 = 0 \quad (2)$$

6.2. Sustituyendo (1) en (2)

$$-156\left(\frac{2{,}915}{19} + \frac{212}{247}\ \mathrm{TAC}\right) - 159\ \mathrm{TAC} + 124{,}020 = 0$$

$$-\frac{454{,}740}{19} - \frac{2{,}544}{19}\ \mathrm{TAC} - 159\ \mathrm{TAC} + 124{,}020 = 0$$

$$\frac{1{,}901{,}640}{19} = \frac{5{,}565}{19}\ \mathrm{TAC}$$

$$1{,}901{,}640 = 5{,}565\ \mathrm{TAC}$$

$$\mathrm{TAC} = 341.714\ \mathrm{N}$$

6.3. Sustituyendo en (1)

$$\mathrm{TAB} = \frac{2{,}915}{19} + \frac{212}{247}\ \mathrm{TAC} \quad => \quad \mathrm{TAB} = \frac{2{,}915}{19} + \frac{212}{247}(341.714) = 446.714\ \mathrm{N}$$

6.4. La sumatoria de fuerzas en el eje x debe ser también igual a cero:

$$\sum \mathrm{F_x} = 0$$

$$\mathrm{TAB}x + \mathrm{TAC}x + \mathrm{TAD}x + \mathrm{P} = 0$$

$$-\frac{48}{53}\mathrm{TAB} - \frac{12}{13}\mathrm{TAC} - 240 + \mathrm{P} = 0$$

$$-\frac{48}{53}(446.714) - \frac{12}{13}(341.714) - 240 + \mathrm{P} = 0$$

$$-959.99999 + \mathrm{P} = 0$$

$$\mathrm{P} = 959.99999$$

7. Llegando al resultado que P es:

$$\mathrm{P} = 960\ \mathrm{N}\ \ (\text{hacia el eje } x \text{ positivo})$$

B. Segunda ley de Newton

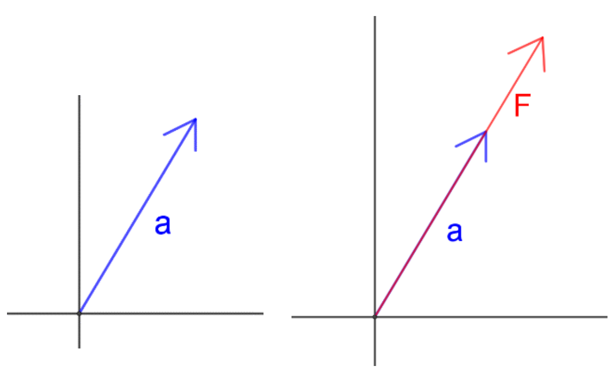
La **segunda ley de Newton** también llamada ley de movimiento establece que, cuando la suma de fuerzas que actúan sobre un cuerpo no es igual a cero (no se cancelan entre sí) provoca en el cuerpo una aceleración. Esa aceleración tiene la misma dirección que la fuerza resultante. La segunda ley de Newton es una aplicación del producto de un vector por un escalar:

$$\vec{\mathrm{B}} = \mathrm{k} * \vec{\mathrm{A}}$$

$\vec{\mathrm{F}} = \text{fuerza resultante}$; $m = \text{masa}$; $\vec{a} = \text{aceleración}$

$$\boxed{\vec{\mathrm{F}} = m * \vec{a}} \qquad \textbf{Ecuación 7.18}$$

Por eso en la ecuación 7.17 se cumple que: $\vec{\mathrm{w}} = m * \vec{g}$, ya que el peso va hacia abajo siguiendo la dirección de la gravedad que también apunta hacia abajo, por tomar un lenguaje un poco burdo.



$$\vec{\mathrm{F}} = m * \vec{a}$$

La fuerza es proporcional a la masa y a la aceleración.

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{F}_x} = m * \overrightarrow{\mathrm{a}_x} \quad ; \quad \overrightarrow{\mathrm{F}_y} = m * \overrightarrow{\mathrm{a}_y}} \qquad \textbf{Ecuación 7.19}$$

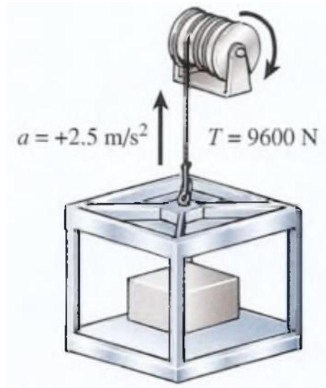
Ejemplo 1

El ascensor cargado que se muestra en la figura se levanta con una aceleración de 2.5 $^{m}/_{s^2}$. Si la tensión en el cable que lo soporta es de 9,600 N, ¿cuál es la masa del elevador y su contenido?

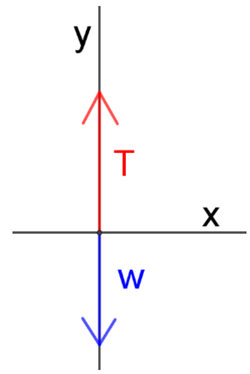
$\mathrm{T} = 9{,}600\ \mathrm{N}$

$a = 2.5\ ^{m}/_{s^2}$

$g = 9.8\ ^{m}/_{s^2}$



1. Se procede a obtener el diagrama de fuerzas sobre el elevador



2. En la figura del ascensor se indica que se mueve hacia arriba, por tanto, la aceleración positiva también apunta hacia arriba.
   (Hacia arriba es el eje y positivo)

$$\sum \mathrm{F}_y = m * a \quad \text{La fuerza positiva debe tener la dirección de la aceleración}$$

$$\mathrm{T} - \mathrm{w} = m * a$$

$$\mathrm{T} - m * g = m * a$$

$$\mathrm{T} = m * a + m * g$$

$$\mathrm{T} = m(a + g) \qquad => \qquad \frac{\mathrm{T}}{a + g} = m$$

3. Sustituyendo datos

$$\frac{9600}{2.5 + 9.8} = m \quad ; \quad \text{recuerde que:} \quad \mathrm{N} = Kg * {}^{m}/_{s^2} \quad => \quad \frac{\mathrm{N}}{{}^{m}/_{s^2}} = Kg$$

4. La respuesta será:

$$m = 780.49\ \mathrm{Kg}$$

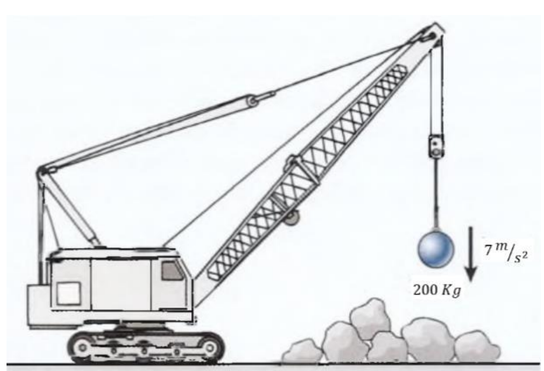
Ejemplo 2

Una bola de 200 Kg se hace descender por medio de un cable, con una aceleración hacia debajo de 7 $^{m}/_{s^2}$. ¿Cuál es la tensión en el cable?

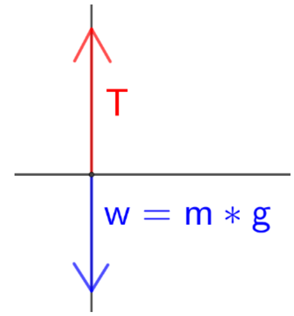
$m = 200\ Kg$

$a = 7.0\ ^{m}/_{s^2}$

$g = 9.8\ ^{m}/_{s^2}$



1. Se genera el diagrama de cuerpo libre de la bola. La tensión irá hacia arriba contrarrestando el peso de la bola que apunta hacia abajo.



2. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum \mathrm{F}_y = m * a$$

2.1. La aceleración al apuntar hacia abajo, las fuerzas positivas se tomarán también las que apunten hacia abajo.

$$\mathrm{w} - \mathrm{T} = m * a$$
$$m * g - \mathrm{T} = m * a$$
$$m * g - m * a = \mathrm{T}$$

3. Sustituyendo datos

$$(200\ Kg)(9.8\ {}^{m}/_{s^2}) - (200\ Kg)(7\ {}^{m}/_{s^2}) = \mathrm{T}$$
$$1{,}960\ \mathrm{N} - 1{,}400\ \mathrm{N} = \mathrm{T}$$

4. La respuesta será:

$$560\ \mathrm{N} = \mathrm{T}$$

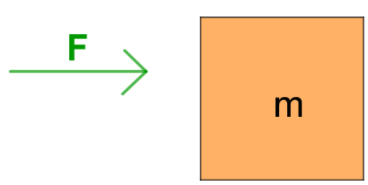
7.7.2. Producto punto (producto escalar)

Este producto genera un número como resultado por la multiplicación entre dos vectores. A continuación, se verán dos temas de aplicación del producto punto.

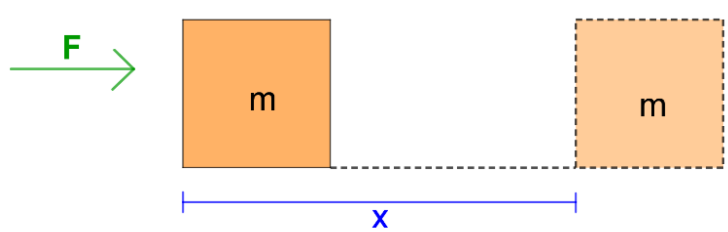
A. Trabajo

El trabajo es la cantidad de energía para realizar una acción (respirar, comer, caminar, drenar tanques, etc). La acción que se verá a continuación será producida por una fuerza al empujar un objeto. El trabajo es proporcional a la fuerza y a la distancia, así mismo el trabajo se mide en Joules (J)

1. Piense en la siguiente caja, que se empuja hacia la derecha con una fuerza **F**



2. Se desplazará una distancia **x**

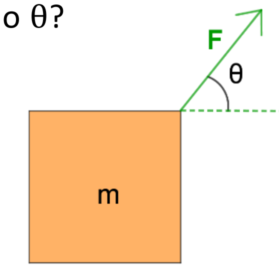


3. El trabajo (la energía) para mover esa caja de izquierda a derecha será

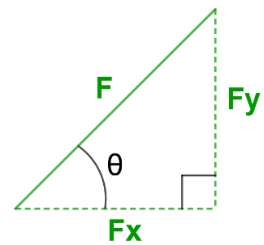
$$W = \text{trajo} = \text{Fuerza} * \text{Distancia desplazada}$$
$$W = \color{green}{\mathbf{F}} * \color{blue}{\mathbf{x}}$$

$$\boxed{W = F * x} \quad \textbf{Ecuación 7.21}$$

4. Ahora, ¿qué pasará si la fuerza está dada a un ángulo θ?



5. Las componentes de la fuerza F serán:



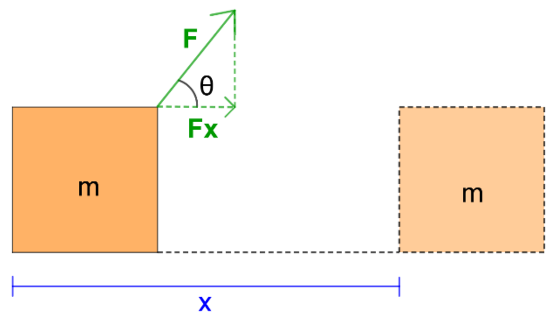
$$\text{sen}\theta = \frac{Fy}{\color{green}{F}} \qquad \cos\theta = \frac{Fx}{\color{green}{F}}$$
$$\color{green}{F} * \text{sen}\theta = Fy \qquad \color{green}{F} * \cos\theta = Fx$$

6. La fuerza Fy no genera empuje, solamente la fuerza Fx, por tanto, el trabajo será:

$$W = Fx * \color{blue}{\mathbf{x}}$$

$$W = \color{green}{F} * \cos\theta * \color{blue}{\mathbf{x}} = \color{green}{F} * \color{blue}{\mathbf{x}} * \cos\theta$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{x}$$



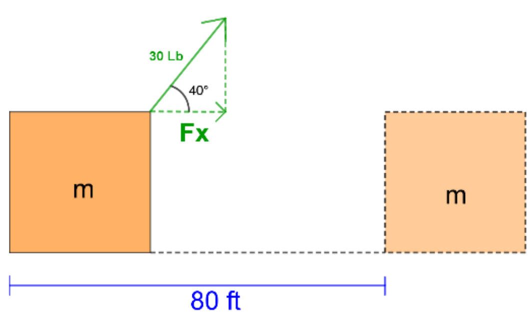
7. Por tanto, se concluye que el trabajo es la multiplicación por producto punto entre el vector fuerza y el vector posición. El resultado de la multiplicación por producto punto del trabajo es un escalar (un número).

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{x} = F\,x\cos\theta} \quad \textbf{Ecuación 7.22}$$

Ejemplo 1

Un trineo es jalado por una cuerda a lo largo de un sendero nivelado. Una fuerza de 30 libras que actúa a un ángulo de 40° sobre la horizontal mueve el trineo 80 pies. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza.

1. Se realiza el diagrama para comprender datos:



2. Aplicando la ecuación 7.22 se tendrá

$$W = F\,x\cos\theta$$
$$W = 30\ Lb * 80\ ft * \cos 40°$$
$$W = 1{,}838.51\ Lb - ft$$

3. La respuesta será:

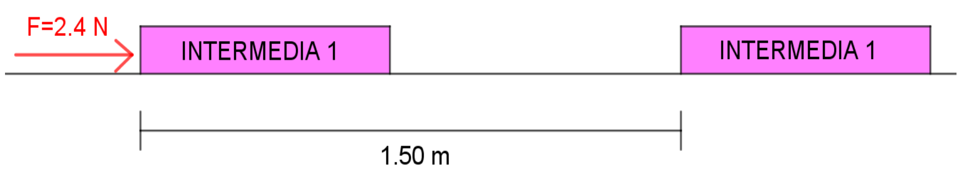
$$W = 1{,}838.51\ Lb - ft$$

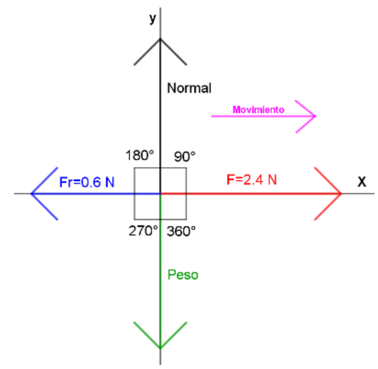
Ejemplo 2

Usted empuja un libro de física a 1.50 m a lo largo de una mesa horizontal con un empuje horizontal de 2.40 N mientras que la fuerza de fricción opuesta es de 0.6 N. ¿Cuánto trabajo realiza cada de las siguientes fuerzas sobre el libro?

a) La fuerza de 2.4 N
b) La fuerza de fricción
c) La fuerza normal de la mesa
d) La gravedad

1. Se realiza un diagrama de fuerzas sobre el libro, indicando la dirección de movimiento.





2. Aplicando la ecuación 7. 22. para cada fuerza.

Inciso a)	**Inciso b)**	**Inciso c)**	**Inciso d)**
$W = F\,x\cos\theta$;	$W = F\,x\cos\theta$;	$W = F\,x\cos\theta$;	$W = F\,x\cos\theta$
$W = 2.4N * 1.5m\cos(0)$;	$W = 0.6 * 1.5 * \cos(180)$;	$W = No * 1.5 * \cos(90)$;	$W = w * 1.5 * \cos 270$
$W = 3.6\ J$;	$W = -0.9\ J$;	$W = 0$;	$W = 0$

3. La respuesta será:

$$W = 3.6\ J \quad ; \quad W = -0.9\ J \quad ; \quad W = 0 \quad ; \quad W = 0$$

Ejemplo 3

Encuentre el trabajo realizado al mover una caja del punto $A(1, 1, 1)$ al punto $B(4, 6, 8)$ medidos en metros, aplicando una fuerza F dada por $\langle 4\ N,\ 10\ N,\ -5\ N\rangle$

1. Se encuentra el vector posición

$$\vec{x} = \text{Punto B} - \text{Punto A} = \langle 4-1, 4-1, 8-1\rangle = \langle 3\ m,\ 3\ m,\ 7\ m\rangle$$

2. El producto punto entre x y F será el trabajo. Aplicando la ecuación 7.22.

$$W = \vec{F}\cdot\vec{x}$$

$$W = \langle 4\text{ N},\ 10\text{ N},\ -5\text{ N}\rangle \cdot \langle 3\text{ m},\ 3\text{ m},\ 7\text{ m}\rangle$$

$$W = (4\text{N} * 3\text{m}) + (10\text{N} * 3\text{m}) + (-5\text{N} * 7\text{m})$$

$$W = 12\text{ J} + 30\text{ J} - 35\text{ J}$$

$$W = 7\text{ J}$$

3. La respuesta será:

$$W = 7\text{ J}$$

B. Ángulos y cosenos directores

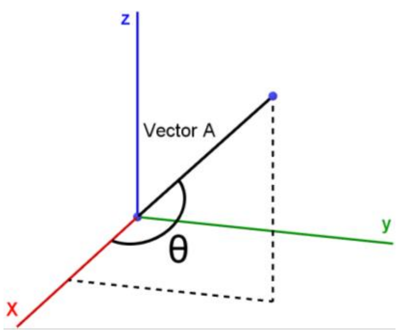
En el capítulo anterior, en el tema del producto punto y producto cruz se realizaron unos ejercicios previos de ángulos entre vectores. En esta sección se profundizará para encontrar ángulos en tres dimensiones de un solo vector, entre vectores y ángulos internos de superficies, solamente utilizando el producto punto, pues es más fácil aplicarlo al producto cruz.

1. Para encontrar el ángulo entre dos vectores A y B utilizando el producto punto:

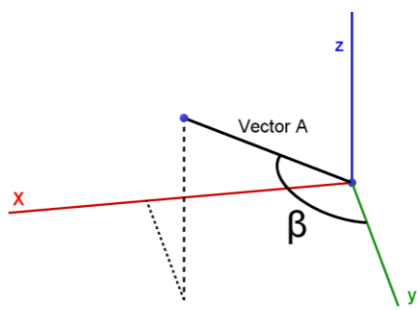
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A\,B\cos\theta \qquad \text{A y B son magnitudes}$$

$$\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A\,B} = \cos\theta$$

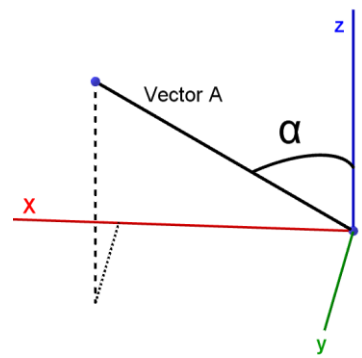
2. Para encontrar los ángulos del vector A respecto a los ejes x, y y z será:



$i = \langle 1, 0, 0 \rangle$



$j = \langle 0, 1, 0 \rangle$



$k = \langle 0, 0, 1 \rangle$

3. Se ingresa un vector unitario parcial en cada eje como guía para poder multiplicar ambos vectores y obtener los ángulos.

$$\vec{A} \cdot \vec{\imath} = A\, i\cos\theta$$
$$\langle A_x, A_y, A_z\rangle \cdot \langle 1,0,0\rangle = A\cos\theta$$
$$A_x = A\cos\theta$$

$$\vec{A} \cdot \vec{\jmath} = A\, j\cos\beta$$
$$\langle A_x, A_y, A_z\rangle \cdot \langle 0,1,0\rangle = A\cos\beta$$
$$A_y = A\cos\beta$$

$$\vec{A} \cdot \vec{k} = A\, k\cos\alpha$$
$$\langle A_x, A_y, A_z\rangle \cdot \langle 0,1,0\rangle = A\cos\alpha$$
$$A_z = A\cos\alpha$$

4. Despejando para el coseno de cada ángulo:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{\imath}}{A} = \frac{A_x}{A} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{\jmath}}{A} = \frac{A_y}{A} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{k}}{A} = \frac{A_z}{A}} \qquad \textbf{Ecuaciones 7.23}$$

Ejemplo 1

Halle los cosenos directores y los ángulos directores del vector de: $i - 2j - 3k$.

1. Se obtiene el vector A identificando sus componentes

$$\vec{A} = \langle A_x , A_y , A_z \rangle = \langle 1 , -2 , -3 \rangle$$

2. Se obtiene la magnitud de A

$$A = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

3. Siguiendo la ecuación 7.23 se obtienen los cosenos directores

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{\imath}}{A} = \frac{A_x}{A} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{\jmath}}{A} = \frac{A_y}{A} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{k}}{A} = \frac{A_z}{A}$$

$$\cos\theta = \frac{A_x}{A} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{A_y}{A} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{A_z}{A}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{14}} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{14}} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{14}}$$

4. Los cosenos directores serán (sabiendo que es igual al vector unitario de A):

$$\frac{\vec{A}}{A} = \langle \cos\theta , \cos\beta , \cos\alpha \rangle$$

$$\frac{\vec{A}}{A} = \langle \frac{1}{\sqrt{14}} , \frac{-2}{\sqrt{14}} , \frac{-3}{\sqrt{14}} \rangle$$

5. Para los ángulos directores se despeja el ángulo pasando el coseno como coseno inverso.

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{14}} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{14}} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{14}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \quad ; \quad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{14}}\right) \quad ; \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{14}}\right)$$

6. Los ángulos directores serán:

$$\theta = 74.4986° \quad ; \quad \beta = 122.3115° \quad ; \quad \alpha = 143.30°$$

Ejemplo 2

Determine si los vectores dados son ortogonales, paralelos o ninguno entre: $a = -i + 2j + 5k$
$b = 3i + 4j - k$

1. Se obtienen los vectores

$$a = \langle -1 , 2 , 5 \rangle \qquad b = \langle 3 , 4 , -1 \rangle$$

2. Se multiplican por el producto punto

$$a \cdot b = (-1 * 3) + (2 * 4) + (5 * -1) = -3 + 8 - 5 = 0$$

3. Se obtienen las magnitudes de cada vector

$$|a| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (5)^2} = \sqrt{30} \qquad |b| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

4. Se aplica la ecuación 7.5.

$$a \cdot b = |a| \; |b| \cos\theta$$

$$0 = \sqrt{30}\,\sqrt{26}\cos\theta$$

$$\cos^{-1}(0) = \theta$$

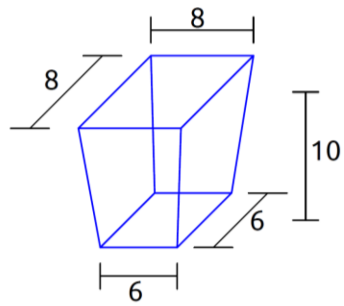
$$90° = \theta$$

5. Al haber un ángulo de 90 grados entre ambos vectores se determina que:

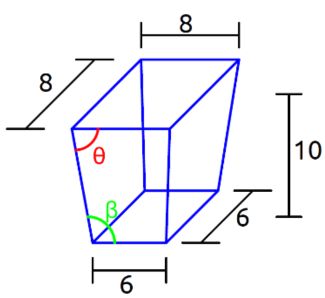
Los vectores son ortogonales

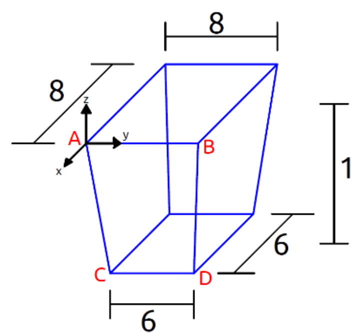
Ejemplo 3

Hallar el ángulo que forman dos lados adyacentes del recipiente elevador de granos, cuyas dimensiones están en la figura de abajo.

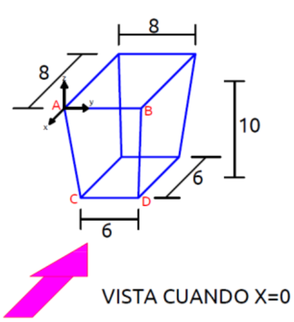


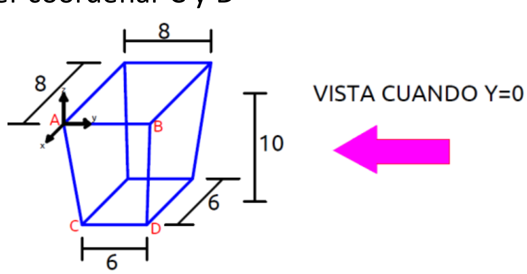
1. Se identifican los ángulos solicitados

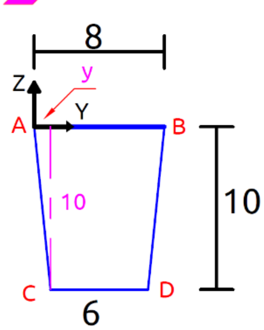




2. Se obtienen las vistas del isométrico para poder coordenar C y D

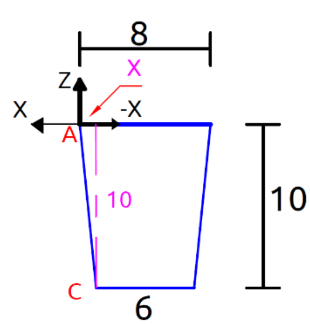






$$6 + 2y = 8$$
$$2y = 2$$
$$y = 1$$

(En el eje y positivo)



$$6 + 2x = 8$$
$$2x = 2$$
$$x = 1$$

(En el eje x negativo)

3. Se obtienen los vectores v_1, v_2, v_3 y v_4.

$$\text{Punto A} = (0,0,0) \;\; ; \;\; \text{Punto B} = (0,8,0) \;\; ; \;\; \text{Punto C} = (-x, y, -10) \;\; ; \;\; \text{Punto D} = (-x, 8-y, -10)$$

$$\text{Punto A} = (0,0,0) \;\; ; \;\; \text{Punto B} = (0,8,0) \;\; ; \;\; \text{Punto C} = (-1,1,-10) \;\; ; \;\; \text{Punto D} = (-1,7,-10)$$

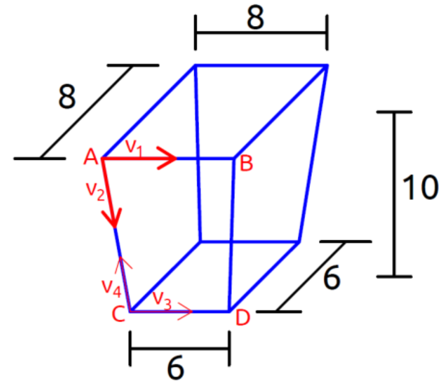
4. Se obtienen los vectores v_1, v_2, v_3 y v_4.

$$V_1 = \text{Punto B} - \text{Punto A} = \langle 0,8,0 \rangle$$

$$V_2 = \text{Punto C} - \text{Punto A} = \langle -1,1,-10 \rangle$$

$$V_3 = \text{Punto D} - \text{Punto C} = \langle 0,6,0 \rangle$$

$$V_4 = \text{Punto A} - \text{Punto C} = \langle 1,-1,10 \rangle$$



5. Se obtiene el producto punto entre los vectores siguiendo la imagen guía del paso 4.

$$V_1 \cdot V_2 = (0 * -1) + (8 * 1) + (0 * -10) \qquad V_3 \cdot V_4 = (0 * 1) + (6 * -1) + (0 * 10)$$

$$V_1 \cdot V_2 = 8 \qquad V_3 \cdot V_4 = -6$$

6. Encontrando la magnitud de cada vector

$$|V_1| = \sqrt{0^2 + 8^2 + 0^2} \qquad |V_2| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-10)^2} \qquad |V_3| = \sqrt{0^2 + 6^2 + 0^2} \qquad |V_4| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 10^2}$$

$$|V_1| = 8 \qquad |V_2| = \sqrt{102} \qquad |V_3| = 6 \qquad |V_4| = \sqrt{102}$$

7. Aplicando el producto punto

$$V_1 \cdot V_2 = |V_1| \; |V_2| \cos\theta \qquad V_3 \cdot V_4 = |V_4| \; |V_3| \cos\beta$$

$$8 = 8 \; \sqrt{102} \cos\theta \qquad -6 = \sqrt{102} \; 6 \cos\beta$$

8. Despejando para los ángulos

$$\frac{1}{\sqrt{102}} = \cos\theta \qquad -\frac{1}{\sqrt{102}} = \cos\beta$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{102}}\right) \qquad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{102}}\right)$$

$$\theta = 84.32° \qquad \beta = 95.68°$$

9. Los ángulos serán

$$\theta = 84.32° \qquad \beta = 95.68°$$

7.7.3. Producto cruz (producto vectorial)

Este producto entre dos vectores genera un vector ortogonal, 90 grados entre ambos vectores. La magnitud del vector resultante es

$$A \; X \; B = A \; B \operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{Ecuación 7.7}$$

$$A \; X \; B = -B \; X \; A \qquad \textbf{Ecuación 7.8}$$

La aplicación por ver será el torque, descrito como un vector. Es importante que el matemático identifique una cantidad vectorial y una cantidad escalar, pues la suma de cantidades escalares sigue reglas aritméticas, mientras que las cantidades vectoriales siguen reglas geométricas.

A. Torque o momento

El torque (para los físicos) o momento (para los ingenieros) es el mismo tema y representa la propiedad que tiene una fuerza en hacer rotar un objeto respecto a un punto, de ahí su nombre momento, pues el torque es relativo según el punto a querer evaluar (la distancia desde la fuerza al punto a querer evaluar).

1. Piense en las siguientes tres fuerzas respecto al punto A:

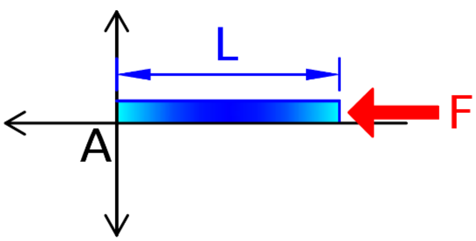


Figura 1

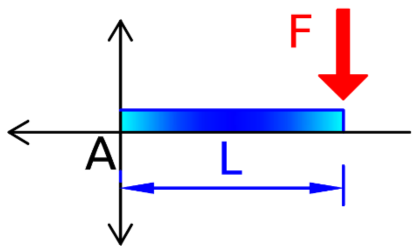


Figura 2

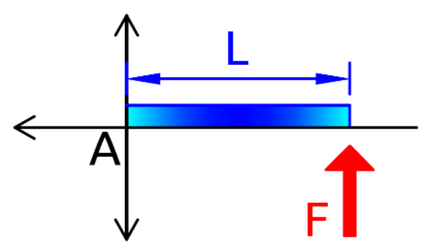
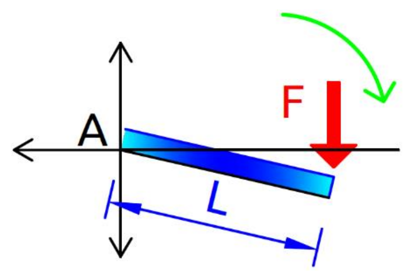


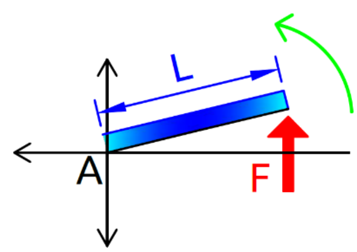
Figura 3

2. De las tres fuerzas:
   2.1. La fuerza (**F**) en la figura 1 no genera rotación de la barra L respecto a A, si no lo comprende tome un lapicero y con una mano sujételo de un lado e intente simular la acción de la figura 1 empujando el lapicero (comprimiéndolo)

   2.2. La fuerza (**F**) de la figura 2 va a generar que la barra L rote hacia la derecha respecto al punto A, tal como lo muestra la siguiente imagen.



   2.3. La fuerza (**F**) de la figura 3 va a generar que la barra L rote hacia la izquierda respecto al punto A, tal como lo muestra la siguiente imagen.

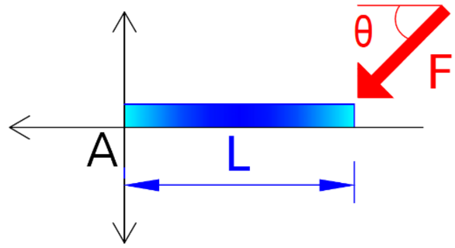


3. La rotación (torque) por tanto depende del tamaño de la fuerza (cantidad vectorial, pues depende del ángulo al que se aplique) y de la longitud **L**, ya que entre más grande sea la longitud **L** más grande será la rotación (haga la prueba con el lapicero)

$$\text{Torque} = \tau \quad (\text{símbolo})$$
$$\text{Torque} = \tau = \text{ Distancia X Fuerza vertical}$$
$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{L} \text{ X } \mathbf{F}$$

   El signo del torque es relativo, usted lo define:
   3.1. Los torques a la izquierda son positivos y los torques a la derecha son negativos.
   3.2. Los torques a la izquierda son negativos y los torques a la derecha son positivos.

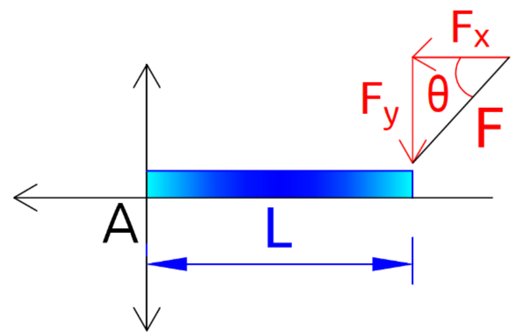
4. Se ha visto que la fuerza vertical al eje de transmisibilidad produce un torque. Ahora analicemos juntos qué pasaría si la fuerza estaría a un ángulo θ.



5. Se debería encontrar la componente vertical de la fuerza, ya que sería la única en producir torque.

$$\text{sen}\theta = \frac{F_y}{F} \qquad \cos\theta = \frac{F_x}{F}$$

$$F\,\text{sen}\theta = F_y \qquad F\cos\theta = F_x$$



5.1. El torque será:

$$\boldsymbol{\tau} = \text{Longitud x Fuerza vertical}$$
$$\boldsymbol{\tau} = \text{L x } F_y$$
$$\boldsymbol{\tau} = \text{L x F sen}\theta$$
$$\tau = \text{L F sen}\theta$$

6. Nótese que el torque es un vector, pues su magnitud se da por:

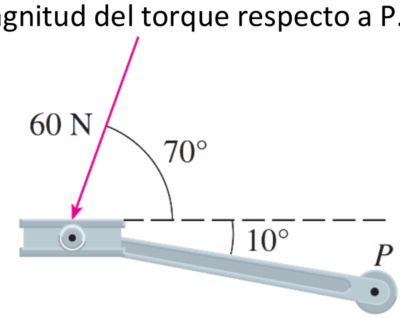
$$\boxed{\tau = \text{L F sen}\theta} \qquad \textbf{Ecuación 7.24}$$

7. El vector torque estará dado por:

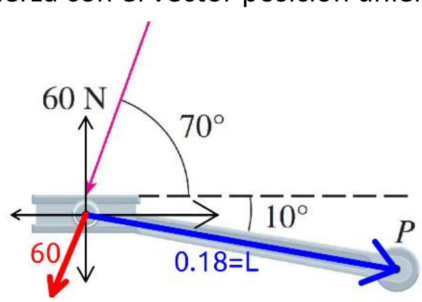
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{L} \text{ X } \vec{F}} \qquad \textbf{Ecuación 7.25}$$

Ejemplo 1

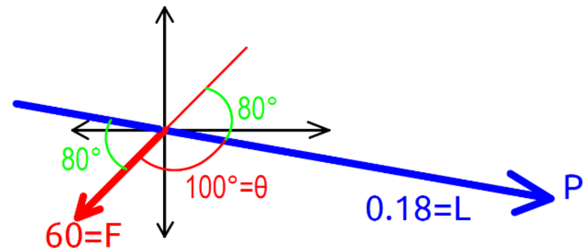
Un pedal de bicicleta es empujado por un pie con una fuerza de 60 N como se ilustra. El eje del pedal es de 18 cm de largo. Encuentre la magnitud del torque respecto a P.



1. Se realiza la distribución de fuerza con el vector posición uniendo punta con punta.



2. Se encuentra el ángulo entre fuerza y posición



3. Simplemente se solicita la magnitud del torque, por tanto, se aplica la ecuación 7.24

$$\tau = \mathrm{L\ F\ sen}\theta$$

$$\tau = 0.18\ \mathrm{m} * 60\ \mathrm{N} * \ \mathrm{sen}100°$$

$$\tau = 10.636\ \mathrm{N - m}$$

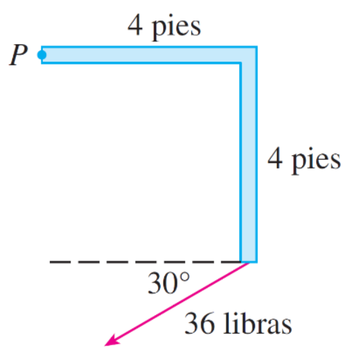
$$\text{Moviendose hacia la izquierda el brazo L}$$

4. La respuesta será, dejando evidencia de hacia dónde va el giro:

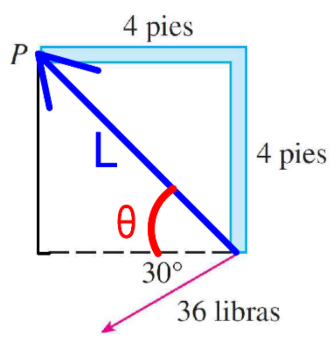
$$\tau = 10.636\ \mathrm{N - m}$$

Ejemplo 2

Determine la magnitud del torque respecto a P si se aplica una fuerza de 36 libras como se muestra.



1. Se realiza el diagrama que muestre la unión entre el vector posición (distancia entre el punto de aplicación del a fuerza al punto a analizar) y el vector fuerza.



2. El ángulo θ y la distancia L serán:

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{Cat.Op}}{\mathrm{Cat.ady}} = \frac{4}{4} \qquad \mathrm{L}^2 = 4^2 + 4^2$$

$$\theta = \tan^{-1}(1) \qquad \mathrm{L}^2 = 32$$

$$\theta = 45° \qquad \mathrm{L} = 4\sqrt{2}\ \mathrm{ft}$$

3. Utilizando la ecuación 7.24

$$\tau = \mathrm{L\ F\ sen}\theta$$

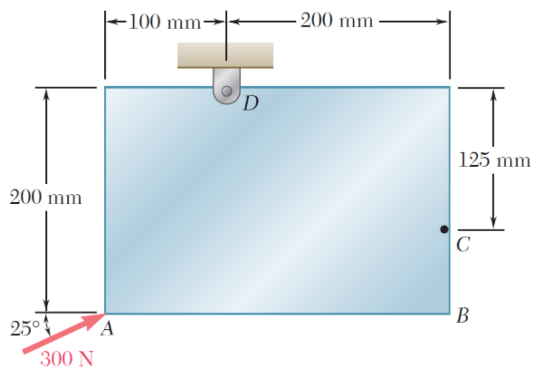
$$\tau = (4\sqrt{2}\ \text{ft})\ (36\ \text{Lb})\ \text{sen}\ (45° + 30°)$$
$$\tau = (4\sqrt{2}\ \text{ft})\ (36\ \text{Lb})\ \text{sen}\ (75°)$$
$$\tau = 196.708\ \text{Lb} - \text{ft}$$

4. La fuerza hace girar al punto P hacia la derecha
5. La respuesta será:

$$\tau = 196.708\ \text{Lb} - \text{ft}$$

Ejemplo 3

Una fuerza de 300 N se aplica en A como se muestra en la figura. Determine a) el momento de la fuerza de 300 N alrededor de D y b) la fuerza mínima aplicada en B que produce el mismo momento alrededor de D. c) La fuerza mínima aplicada en C que produce el mismo momento alrededor de D.

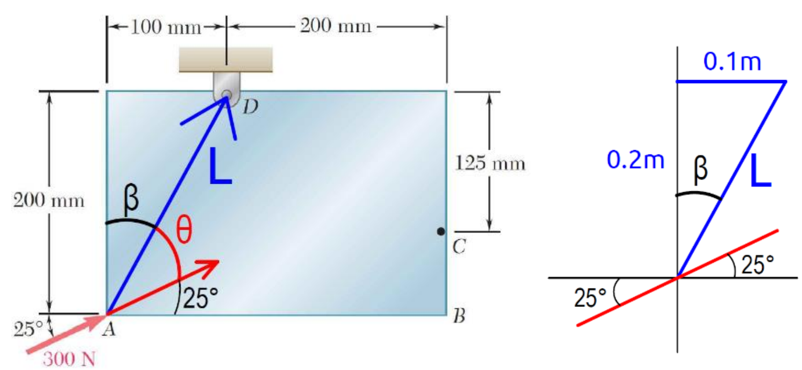


Inciso a)

1. Se encuentra la distancia entre A y D, así como el ángulo entre ambos vectores.

$$L^2 = 0.1^2 + 0.2^2$$
$$L^2 = 0.05$$
$$L = 0.2236\ \text{m}$$

$$\tan\beta = \frac{100}{200}$$
$$\beta = 26.565°$$



2. El ángulo θ será:

$$\theta = 90° - 25° - \beta$$
$$\theta = 90° - 25° - 26.565°$$
$$\theta = 38.435°$$

3. Utilizando la ecuación 7.24

$$\tau = L\ F\ \text{sen}\theta$$
$$\tau = 0.2236\ \text{m} * 300\ \text{N}\ \text{sen}(38.435°)$$
$$\tau = 41.70\ \text{N} - \text{m}$$

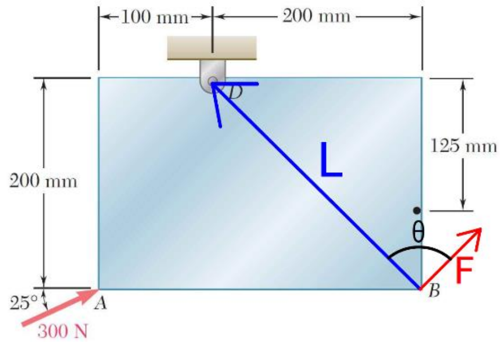
4. La respuesta será:

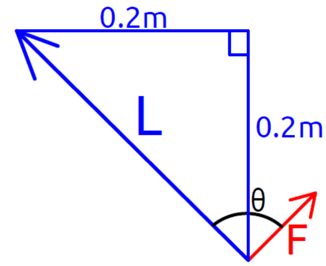
$$\tau = 41.70\ \text{N} - \text{m}$$

Inciso b)

5. El vector posición entre B y L será:

$$L^2 = 0.2^2 + 0.2^2$$
$$L^2 = 0.08$$
$$L = 0.2828\ \text{m}$$





6. La fuerza F será:

$$\tau = L\,F\,\text{sen}\theta$$

$$\frac{\tau}{L * \text{sen}\theta} = F \qquad \text{despejando F}$$

6.1. Para que la fuerza sea mínima el ángulo debe ser 90°, pues no hace que L se reduzca.

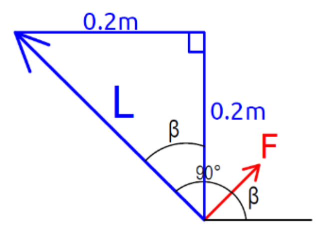
$$\frac{41.70\ \text{N} - \text{m}}{0.2828\ \text{m} * \text{sen}90} = F$$

$$147.4540\ \text{N} = F$$

7. El ángulo será

$$\tan\beta = \frac{\text{Cat. Op}}{\text{Cat. Ay}} = \frac{0.2}{0.2}$$

$$\beta = 45°$$



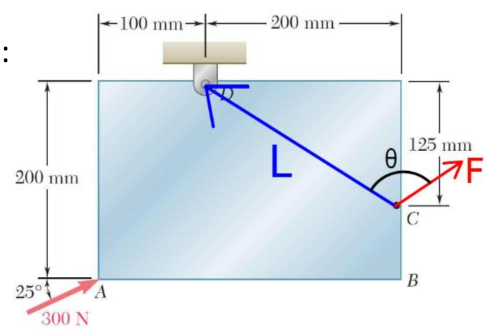
8. La respuesta será:

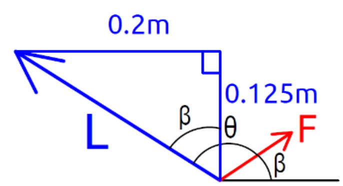
$$F = 147.4540\ \text{N} \quad \text{a} \ \ 45° \ \text{Sobre la horizontal}$$

Inciso c)

9. El vector posición entre B y L será:

$$L^2 = 0.2^2 + 0.125^2$$
$$L^2 = 0.055625$$
$$L = 0.2358\ \text{m}$$





10. La fuerza F será:

$$\tau = L\,F\,\text{sen}\theta$$

$$\frac{\tau}{L * \text{sen}\theta} = F \qquad \text{despejando F}$$

10.1. Para que la fuerza sea mínima el ángulo debe ser 90°, pues no hace que L se reduzca

$$\frac{41.70\ \text{N} - \text{m}}{0.2358\ \text{m} * \text{sen}90} = F$$

$$176.845\ \text{N} = F$$

11. El ángulo de la fuerza será:

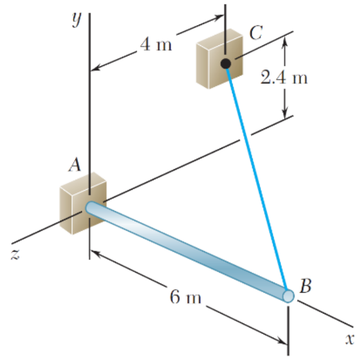
$$\beta = \tan^{-1}\left({}^{0.2}/_{0.125}\right) \qquad \beta = 57.995°$$

12. La respuesta será:

$$F = 176.85\ \text{N} \quad \text{a} \ \ 58° \ \text{Sobre la horizontal}$$

Ejemplo 4

El aguilón AB de 6 m que se muestra en la figura tiene un extremo fijo A. Un cable de acero se estira desde el extremo libre B del aguilón hasta el punto C ubicado en la pared vertical. Si la tensión en el cable es de 2.5 kN, determine el momento alrededor de A de la fuerza ejercida por el cable en B.



1. Se obtienen los puntos coordenados tomando A como el punto (0,0,0)

$$\text{Punto A} = (0, 0, 0) \qquad \text{Punto B} = (6, 0, 0) \qquad \text{Punto C} = (0, 2.4, -4)$$

2. Se obtienen los vectores L (posición) y F (fuerza)

$$\vec{L} = \text{Punto A} - \text{Punto B} = \langle 0-6, 0-0, 0-0 \rangle = \langle -6, 0, 0 \rangle$$

   2.1. Se obtiene el vector fuerza en sus componentes

$$V_{CB} = \text{Vector de B a C} = \text{Punto C} - \text{Punto B} = \langle 0-6, 2.4-0, -4-0 \rangle = \langle -6, 2.4, -4 \rangle$$

   2.2. La magnitud del vector V_{CB} será:

$$|V_{CB}| = \sqrt{(-6)^2 + 2.4^2 + (-4)^2} = \sqrt{57.76} = 7.6$$

   2.3. El vector unitario V_{CB} será:

$$u_{CB} = \frac{V_{CB}}{|V_{CB}|} = \frac{\langle -6, 2.4, -4 \rangle}{7.6} = \langle \frac{15}{19}, \frac{6}{19}, \frac{10}{19} \rangle$$

   2.4. El vector F en componentes será:

$$\vec{F} = F * u_{CB} = 2.5KN * \frac{1{,}000\text{ N}}{1\text{ KN}} * \langle \frac{15}{19}, \frac{6}{19}, \frac{10}{19} \rangle = 2{,}500 \langle \frac{15}{19}, \frac{6}{19}, \frac{10}{19} \rangle = \langle \frac{37{,}500}{19}, \frac{15{,}000}{19}, \frac{25{,}000}{19} \rangle$$

3. El momento respecto al punto A producida por la fuerza F se obtiene con la ecuación 7.25:

$$\vec{\tau} = \vec{L} \text{ X } \vec{F}$$

$$\vec{\tau} = \langle -6, 0, 0 \rangle \text{ X } \langle \frac{37{,}500}{19}, \frac{15{,}000}{19}, \frac{25{,}000}{19} \rangle$$

$$L = \langle -6, 0, 0 \rangle$$

$$F = \langle \frac{37{,}500}{19}, \frac{15{,}000}{19}, \frac{25{,}000}{19} \rangle$$

$$\vec{\tau} = \langle \left(0 * \frac{25{,}000}{19}\right) - \left(0 * \frac{15{,}000}{19}\right), \ -\left[\left(-6 * \frac{25{,}000}{19}\right) - \left(0 * \frac{37{,}500}{19}\right)\right], \ \left(-6 * \frac{15{,}000}{19}\right) - \left(0 * \frac{37{,}500}{19}\right) \rangle$$

$$\vec{\tau} = \langle 0, \frac{150{,}000}{19}, -\frac{90{,}000}{19} \rangle$$

4. La magnitud del vector momento será:

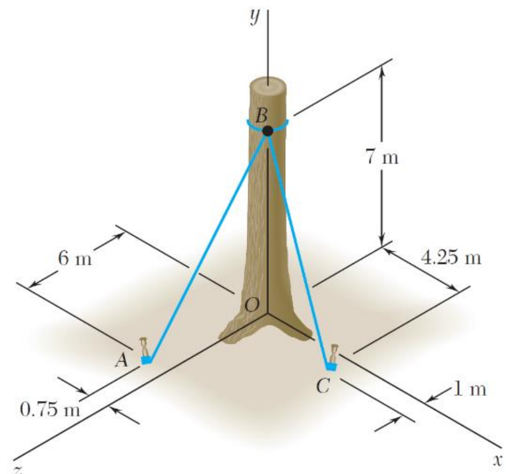
$$|\vec{\tau}| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{150{,}000}{19}\right)^2 + \left(\frac{-90{,}000}{19}\right)^2} = 9{,}206.77\ \mathrm{N-m}$$

5. La respuesta será:

$$9{,}206.77\ \mathrm{N-m}$$

Ejemplo 5

Los cables AB y BC se sujetan al tronco de un árbol muy grande para evitar que se caiga. Si se sabe que las tensiones en los cables AB y BC son de 555 N y 660 N, respectivamente, determine el momento respecto de O de la fuerza resultante ejercida por los cables sobre el árbol en B.



1. Se obtienen las coordenadas de los puntos 0, A, B y C según el plano cartesiano mostrado.

$$\mathrm{Punto} = (x, y, z)$$
$$\mathrm{Punto\ O} = (0, 0, 0)\ ;\ \mathrm{Punto\ A} = (-0.75, 0, 6)\ ;\ \mathrm{Punto\ B} = (0, 7, 0)\ ;\ \mathrm{Punto\ C} = (4.25, 0, 1)$$

2. El vector que guie las tensiones será

$$V_{AB} = \mathrm{Punto\ A} - \mathrm{Punto\ B} = \langle -0.75, -7, 6\rangle \qquad V_{CB} = \mathrm{Punto\ C} - \mathrm{Punto\ B} = \langle 4.25, -7, 1\rangle$$

3. Los vectores unitarios de cada vector serán:

$$|V_{AB}| = \sqrt{(-0.75)^2 + (-7)^2 + 6^2} = 9.25 \quad ; \quad |V_{CB}| = \sqrt{(4.25)^2 + (-7)^2 + 1^2} = 8.25$$

$$u_{AB} = \frac{\langle -0.75, -7, 6\rangle}{9.25} = \left\langle -\frac{3}{37}, -\frac{28}{37}, \frac{24}{37}\right\rangle \quad ; \quad u_{CB} = \frac{\langle 4.25, -7, 1\rangle}{8.25} = \left\langle \frac{17}{33}, -\frac{28}{33}, \frac{4}{33}\right\rangle$$

4. Se obtienen las componentes de cada tensión

$$F_{AB} = 555 * u_{AB} \quad ; \quad F_{CB} = 660 * u_{CB}$$
$$F_{AB} = 555\left\langle -\frac{3}{37}, -\frac{28}{37}, \frac{24}{37}\right\rangle \quad ; \quad F_{CB} = 660\left\langle \frac{17}{33}, -\frac{28}{33}, \frac{4}{33}\right\rangle$$
$$F_{AB} = \langle -45, -420, 360\rangle \quad ; \quad F_{CB} = \langle 340, -560, 80\rangle$$

5. El vector posición para ambas fuerzas será B0

$$L = \mathrm{Punto\ O} - \mathrm{Punto\ B} = \langle 0, -7, 0\rangle$$

6. Se obtiene el momento AB producido por la fuerza F_{AB}

$$M_{AB} = L \, X \, F_{AB}$$

$$M_{AB} = \langle\, 0\,, -7\,, 0\,\rangle \, X \, \langle -45\,, \;\; -420\,, \;\; 360\rangle$$

$\langle\, 0\,, -7\,, 0\,\rangle$
$\langle -45\,, -420\,, 360\rangle$

$$M_{AB} = \langle -2520\,, 0\,, -315\rangle$$

7. Se obtiene el momento CB producido por la fuerza F_{CB}

$$M_{CB} = L \, X \, F_{CB}$$

$$M_{CB} = \langle\, 0\,, -7\,, 0\,\rangle \, X \, \langle\, 340\,, -560\,, \;\; 80\rangle$$

$\langle\, 0\,, -7\,, 0\,\rangle$
$\langle\, 340\,, -560\,, 80\rangle$

$$M_{CB} = \langle -560\,, 0\,, 2380\rangle$$

8. Se suman los momentos para obtener el momento respecto a 0

$$M_O = M_{AB} + M_{CB}$$

$$M_O = \langle -2520\,, 0\,, -315\rangle + \langle -560\,, 0\,, 2380\rangle$$

$$M_O = \langle -2520 - 560\,, 0 + 0\,, -315 + 2380\rangle$$

$$M_O = \langle -3080\,, \;\; 0\,, \;\; 2065\rangle$$

9. La respuesta por tanto será:

$$M_O = \langle -3080 \text{ N} - \text{m} \;\;, \;\; 0\,, \;\; 2065 \text{ N} - \text{m}\rangle$$

10. La magnitud del momento en el punto O será:

$$|M_O| = \sqrt{(-3{,}080)^2 + (0)^2 + (2065)^2} = \sqrt{13{,}750{,}625} = 3{,}708.2 \text{ N} - \text{m}$$

11. La respuesta será:

$$3{,}708.2 \;\; \text{N} - \text{m}$$

Bibliografía

Beer, F. P. (2010). Estática. En F. Beer, & R. Johnston, *Mecánica vectorial para ingenieros, Estática, novela edición* (pág. 604). México D.F.: McGraw Hill.

Edwards, L. H. (2006). Cálculo. En *Cálculo, octava edición* (págs. 1,138). México: McGraw-Hill.

Sears y Zemansky. (2013). Física. En S. Zemansky, *Física universitaria volumen 1, décima tercera edición* (pág. 744). México: Pearson México, 2013.

Stewart, J. (2013). Cálculo. En J. Stewart, *Cálculo Trascendentes Tempranas, séptima edición* (págs. 1,170). México D.F.: Cengage Learning.

Tippens, P. E. (2007). Física. En P. E. Tippens, *Física, conceptos y aplicaciones, séptima edición* (pág. 777). México D.F.: McGraw-Hill Interamericana.

El libro Hablemos De Matemática Intermedia I es un libro gratuito que busca explicar de manera simple, concreta y con un lenguaje común los temas de seguimiento de cálculo, donde el lector sentirá la experiencia al leerlo como si un docente privado le estuviera explicando dichos temas, de ahí el nombre "Hablemos De Matemática Intermedia I" para que la lectura no sea tediosa y busque servir de manera eficiente.

Este libro no contiene ejercicios propuestos, solamente lincluye la explicación del tema, aplicación en la ingeniería y ejercicios resueltos.

Los temas que incluye son:

1. Integrales
2. Integrales Impropias
3. Ecuaciones Paramétricas
4. Ecuaciones Polares
5. Sucesiones Y series
6. Algebra Matricial
7. Vectores Y Geometría en el Espacio

USAC
TRICENTENARIA
Universidad de San Carlos de Guatemala

División de Ciencias de la ingeniería